

УДК 517.925.54

## О НЕКОЛЕБЛЮЩИХСЯ КНЕЗЕРОВСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА — ФАУЛERA

В. А. РАВЦЕВИЧ

Рассматривается уравнение Эмдена — Фаулера

$$u^{(n)} = (-1)^n p(t) |u|^\lambda \operatorname{sign} u, \quad 0 < \lambda < 1, \quad n \geq 2, \quad p(t) \geq 0, \quad a < t < w \leq +\infty, \quad (1)$$

с локально интегрируемой функцией  $p(t)$ , отличной от нуля на множестве положительной меры в любой окрестности  $+\infty$ .

Неколеблющееся кнезеровское решение  $u : [a, w) \rightarrow R$  уравнения (1) называют правильным исчезающим в бесконечности, если

$$(-1)^i u^{(i)}(t) u(t) > 0 \quad (i = \overline{0, n-1}), \quad t \in [a, w), \quad \lim_{t \rightarrow w} u(t) = 0, \quad w = +\infty, \quad (2)$$

и сингулярным первого рода, если  $w < +\infty$  и  $u(t) = 0$  при  $t > w$  [1, 2].

Задача (1), (2) разрешима, когда выполнено условие [1, с. 317; 3]

$$0 < J(t, +\infty) < +\infty \quad \forall t > a, \quad J(s, t) \equiv \int_s^t p(\tau) \tau^{n-1} d\tau, \quad (3)$$

и тогда каждое ее решение при больших  $t$  допускает оценку

$$|u(t)| \leq c(n, \lambda) \left[ \int_t^{+\infty} p(\tau) (\tau - t)^{n-1} d\tau \right]^{1/(1-\lambda)}. \quad (4)$$

Необходимое условие разрешимости задачи (1), (2) заключается в выполнении равенства [4, 5 при  $\varepsilon_1 = 0$ ; 1, с. 317; 6 при  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ ]

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\varepsilon_1} \int_t^{+\infty} \tau^{n\mu - \varepsilon_1 - 1} p^\mu(\tau) d\tau = 0, \quad \mu \in (0, n_1^{-1}), \quad \varepsilon > 0, \quad (5)$$

где  $n_1 = 1 + (n-1)\lambda$ . Каждое правильное решение (2) уравнения (1) в некоторой окрестности  $+\infty$  допускает оценку [1, с. 317; 7]

$$|u(t)| > \gamma(n, \lambda, \mu) \left[ \int_t^{+\infty} (\tau - t)^{n-2} \left( \int_t^{+\infty} p^\mu(x) dx \right)^{(n-1)/(n\mu-1)} d\tau \right]^{(n\mu-1)/((n-1)(1-\lambda)\mu)}, \quad \mu \in (n^{-1}, n_1^{-1}). \quad (6)$$

Более подробно результаты и библиография по исследованию асимптотических свойств решений и условий разрешимости задачи (1), (2) представлены, например, в [1, 2].

В настоящей работе получены близкие к достаточным и в ряде случаев являющиеся таковыми необходимые условия разрешимости задачи (1), (2), обобщающие условие (5); исследовано на необходимость условие (3) и его естественные обобщения; существенно усилена оценка (6); указаны условия, при которых оценка (4) точна, и получена соответствующая нижняя оценка.

Пусть  $u : [a, +\infty) \rightarrow R_+$  — решение задачи (1), (2) и  $\varphi : [a, +\infty) \rightarrow R_+$  — неубывающая функция. Введем в рассмотрение вспомогательные функции  $v_k(t) = \sum_{i=0}^k |u^{(i)}(t)|t^i/i!$ ,  $v_{\varphi,k}(t) = v_k(t)/\varphi(t)$  ( $k = \overline{0, n-1}$ ),  $\varphi_M(t) = \min\{t^{-1}, \dot{\varphi}(t)/(M\varphi(t))\}$ ,  $M > 0$ , и множество  $T_p = T_p(a, +\infty)$ , где  $T_p(s, t) = \{x \in (s, t) : p(x) > 0\}$ .

Лемма 1. Пусть  $u$  — решение задачи (1), (2),  $\varphi(t)$  — произвольная неубывающая положительная функция. Тогда функции  $v_i(t) > 0$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ) монотонны, стремятся к нулю на бесконечности и обладают свойством:

$$\frac{|\dot{v}_{\varphi, n-1}(t)|}{v_{\varphi, n-1}(t)} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} + \frac{t^{n-1}p(t)v_{\varphi, 0}^\lambda(t)\varphi^{\lambda-1}(t)}{(n-1)!v_{\varphi, n-1}(t)}, \quad \frac{|\dot{v}_{\varphi, i}(t)|}{v_{\varphi, i+1}(t)} > \varphi_M(t) \quad (i = \overline{0, n-2}) \quad \forall M > 0.$$

Доказательство. Стремление к нулю функций  $v_i(t)$  следует из неравенств  $|u^{(k)}(t)|t^k < 2^{k(k-1)/2}|u(2^{-k}t)|$  ( $k = \overline{1, n-1}$ ),  $t > 2^{n-1}a$ , а их монотонность — из представлений

$$v_i(t) = \frac{1}{i!} \int_t^{+\infty} \tau^i |u^{(i+1)}(\tau)| d\tau \quad (i = \overline{0, n-1}). \quad (7)$$

Равенство для  $(n-1)$ -й производной проверяется непосредственным дифференцированием, а оценки остальных производных могут быть получены следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{\varphi, i}(t) &= \frac{\dot{v}_i(t)\varphi(t) - v_i(t)\dot{\varphi}(t)}{\varphi^2(t)} = -\frac{i!v_{\varphi, i}(t)\dot{\varphi}(t) + t^i|u^{(i+1)}(t)|}{i!\varphi(t)} \leq \\ &\leq -\frac{i+1}{t\varphi(t)} \left[ v_{i+1}(t) - v_i(t) \left( 1 - \frac{t\varphi_M(t)}{i+1} \right) \right] \leq -v_{\varphi, i+1}(t)\varphi_M(t). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Основным результатом работы является следующая общая

Теорема 1. Пусть задача (1), (2) разрешима и  $\varphi(t) > 0$  — произвольная неубывающая функция. Тогда для любых чисел  $\nu \in [0, 1]$ ,  $\mu \in [(1-\nu)/n, (1-\nu)/n_1]$ ,  $M > 0$  и  $\sigma > 0$  выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_{\nu, \mu, \sigma, M}(\varphi)(t) = 0 \quad (8)$$

и каждое ее решение в некоторой окрестности  $+\infty$  допускает оценку

$$v_{n-1}(t) > \gamma \left[ F_{\nu, \mu, \sigma, M}(\varphi)(t) \right]^{1/((1-\lambda)\mu)}, \quad (9)$$

где

$$F_{\nu, \mu, \sigma, M}(\varphi)(t) = \varphi^\sigma(t) \int_t^{+\infty} \frac{(p(\tau)\tau^{n-1})^\mu}{\varphi^\sigma(\tau)} \left( \frac{\dot{\varphi}(\tau)}{\varphi(\tau)} \right)^\nu \varphi_M^{1-\mu-\nu}(\tau) d\tau$$

и  $\gamma$  — положительная константа, зависящая от  $n$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ .

Доказательство. По выбранным, согласно условию теоремы, значениям  $\nu$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  зададим числа  $\mu_i > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ),  $\mu_{n+1} \geq 0$  равенствами  $\mu_n = \mu$ ,  $\mu_{n+1} = \nu$ ,

$$\mu_i = \begin{cases} \mu - (n-i)\varepsilon_1, & \varepsilon_1 = \frac{2(\nu + n\mu - 1)}{n(n-1)}, & \mu \in \left( \frac{1-\nu}{n}, \frac{2(1-\nu)}{n+n_1} \right) \\ \lambda\mu + i\varepsilon_1, & \varepsilon_1 = \frac{2(1-\nu - n_1\mu)}{n(n-1)}, & \mu \in \left( \frac{2(1-\nu)}{n+n_1}, \frac{1-\nu}{n_1} \right) \end{cases} \quad (i = \overline{1, n}).$$

Легко убедиться, что они удовлетворяют условиям

$$\mu_{i+1} - \mu_i \geq \varepsilon_1 > 0 \quad (i = \overline{1, n-1}), \quad \mu_1 - \lambda\mu_n \geq \varepsilon_1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i = 1. \quad (10)$$

Предположим теперь, что задача (1), (2) разрешима, и пусть даны неубывающая функция  $\varphi(t) > 0$  и число  $M > 0$ . Для производной вспомогательной функции  $\omega_\varphi(t) = \prod_{i=0}^{n-1} v_{\varphi,i}(t)$  в силу леммы 1 справедливо неравенство

$$\frac{|\dot{\omega}_\varphi(t)|}{\omega_\varphi(t)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|\dot{v}_{\varphi,i}(t)|}{v_{\varphi,i}(t)} > \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} + \frac{t^{n-1}p(t)v_{\varphi,0}^\lambda(t)\varphi^{\lambda-1}(t)}{(n-1)!v_{\varphi,n-1}(t)} + \varphi_M(t) \sum_{i=0}^{n-2} \frac{v_{\varphi,i+1}(t)}{v_{\varphi,i}(t)}, \quad t > t_M,$$

с универсальной постоянной  $\gamma > 0$ , зависящей, вообще говоря, лишь от  $n, \lambda, \mu$ . Из него в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует оценка

$$\begin{aligned} \frac{|\dot{\omega}_\varphi(t)|}{\omega_\varphi(t)} &\geq \gamma \left( \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} \right)^{\mu_{n+1}} \left( \frac{t^{n-1}p(t)v_{\varphi,0}^\lambda(t)\varphi^{\lambda-1}(t)}{(n-1)!v_{\varphi,n-1}(t)} \right)^{\mu_n} \prod_{i=0}^{n-2} \left( \frac{v_{\varphi,i+1}(t)}{v_{\varphi,i}(t)} \varphi_M(t) \right)^{\mu_{i+1}} = \\ &= \gamma \left( \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} \right)^{\mu_{n+1}} (\varphi_M(t))^{1-\mu_n-\mu_{n+1}} (t^{n-1}p(t))^{\mu_n} v_{\varphi,0}^{\lambda\mu_n-\mu_1}(t) \varphi^{(\lambda-1)\mu_n}(t) \prod_{i=1}^{n-1} v_{\varphi,i}^{\mu_i-\mu_{i+1}}(t). \end{aligned}$$

Домножив обе части полученного неравенства на произведение  $w_\varphi^\varepsilon(t)\varphi^{-\delta}(t)$  с положительными числами  $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \sigma/n\}$ ,  $\delta = \sigma - n\varepsilon$ , а затем проинтегрировав его от  $t$  до  $+\infty$ , получим

$$\frac{w_\varphi^\varepsilon(t)}{\varepsilon\varphi^\delta(t)} \geq \gamma \int_t^{+\infty} \frac{(x^{n-1}p(x))^{\mu_n}}{\varphi^\delta(x)} \left( \frac{\dot{\varphi}(x)}{\varphi(x)} \right)^{\mu_{n+1}} \left( \frac{\varphi_M(x)^{1-\mu_n-\mu_{n+1}}}{\varphi^{(1-\lambda)\mu_n}(x)} \right) v_{\varphi,0}^{\lambda\mu_n-\mu_1+\varepsilon}(x) \prod_{i=1}^{n-1} v_{\varphi,i}^{\mu_i-\mu_{i+1}+\varepsilon}(x) dx.$$

Отсюда в силу леммы 1 и неравенств (10) вытекает неравенство

$$v_{n-1}^{(1-\lambda)\mu}(t) \geq v_0^{\mu_1-\lambda\mu}(t) \prod_{i=1}^{n-1} v_i^{\mu_{i+1}-\mu_i}(t) \geq \gamma\varphi^\sigma(t) \int_t^{+\infty} \frac{(p(\tau)\tau^{n-1})^\mu \varphi_M^{1-\mu-\nu}(\tau)}{\varphi^\sigma(\tau)} \left( \frac{\dot{\varphi}(\tau)}{\varphi(\tau)} \right)^\nu d\tau,$$

следствием которого являются равенство (8) и оценка (9). Теорема 1 доказана.

Следствием теоремы 1 является содержащая меньшее число параметров

**Теорема 2.** Если задача (1), (2) разрешима, то для произвольной неубывающей функции  $\varphi(t) > 0$ , при некотором  $M > 0$  удовлетворяющей почти всюду на множестве  $T_p$  условию  $t\dot{\varphi}(t)/\varphi(t) \leq M$ , любых чисел  $\mu \in (0, 1/n_1)$ ,  $\sigma > 0$  выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} G_{\mu,\sigma}(\varphi)(t) = 0 \quad (11)$$

и в некоторой окрестности  $+\infty$  все ее решения допускают оценку

$$v_{n-1}(t) > \gamma [G_{\mu,\sigma}(\varphi)(t)]^{1/((1-\lambda)\mu)}, \quad (12)$$

$$G_{\mu,\sigma}(\varphi)(t) = \varphi^\sigma(t) \int_t^{+\infty} \frac{(p(\tau)\tau^{n-1})^\mu}{\varphi^\sigma(\tau)} \left( \frac{\dot{\varphi}(\tau)}{\varphi(\tau)} \right)^{1-\mu} d\tau$$

и  $\gamma$  — положительная константа, зависящая от  $n, \lambda, \mu$ .

Необходимые условия (8) и (11) существенно усиливают условие (5), а оценки (9) и (12) оценку (6).

Из теоремы 1 вытекает также эффективный признак неразрешимости задачи (1), (2), который содержит

**Следствие 1.** Уравнение (1) не имеет неколеблущихся правильных исчезающих в бесконечности решений (2), если существуют неубывающая функция  $\varphi(t)$  и числа  $\nu \in [0, 1)$ ,  $\mu \in [(1-\nu)/n, (1-\nu)/n_1[$  и  $M, \sigma > 0$ , удовлетворяющие условию

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} F_{\nu,\mu,\sigma,M}(\varphi)(t) > 0. \quad (13)$$

Аналогичное следствие имеет и теорема 2.

Следствие 2. Уравнение (1) не имеет колеблющихся правильных исчезающих в бесконечности решений (2), если существует неубывающая функция  $\varphi(t) > 0$ , удовлетворяющая при некотором  $M > 0$  почти всюду на множестве  $T_p$  неравенству

$$t\dot{\varphi}(t)/\varphi(t) \leq M, \quad (14)$$

и числа  $\mu \in (0, 1/n_1)$  и  $\sigma > 0$  такие, что выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} G_{\mu, \sigma}(\varphi)(t) > 0. \quad (15)$$

Условия (13) и (15) в некотором смысле монотонны по функции  $\varphi$ . Точнее, если выполнено какое-либо из этих условий с некоторой неубывающей пробной функцией  $\varphi$ , то оно же будет выполнено и после прибавления к ней неубывающей ступенчатой функции. Следует также отметить и тот факт, что если выполнено условие (13) или (15) с некоторой функцией  $\varphi$ , то найдется такая неубывающая кусочно-постоянная функция  $\psi$ , прибавив которую к  $\varphi$ , получим новую пробную функцию, удовлетворяющую условию (8). Таким образом, при попытке установить неразрешимость задачи (1), (2) с помощью признаков, содержащихся в следствиях 1 и 2, подходящие пробные функции  $\varphi$  прежде всего следует искать среди абсолютно непрерывных функций, имеющих ограниченную вариацию на дополнении к множеству  $T_p$  и удовлетворяющих при больших  $t \in T_{\dot{\varphi}}(a, +\infty) \cap T_p$  неравенству (14).

Легко проверить с помощью интегрального неравенства Гёльдера, что если выполнено достаточное условие (3), то автоматически выполняется и необходимое условие (8) с произвольной неубывающей пробной функцией  $\varphi(t)$ . Однако ясно, что выполнение необходимого условия (8) или (11), вообще говоря, не гарантирует разрешимости задачи (1), (2). Вместе с тем для широкого класса функций  $p(t)$  выполнение условия (8) или (11) влечет за собой разрешимость рассматриваемой задачи и выполнение неравенства (3). Этот важнейший с точки зрения приложений частный случай рассматривает

Теорема 3. Если задача (1), (2) с функцией  $p(t)$ , удовлетворяющей почти всюду неравенству

$$p(t)t^n < cJ(a, t), \quad c > 0, \quad t > t_c > a, \quad (16)$$

разрешима, то выполняется условие (3) и для каждого из ее решений в некоторой окрестности  $+\infty$  справедлива оценка

$$v_{n-1}(t) > \gamma J^{1/(\mu(1-\lambda))}(t, +\infty) \quad \forall \mu \in (0, 1/n_1). \quad (17)$$

Если наряду с (3) выполнено условие

$$p(t)t^n < cJ(t, +\infty), \quad t > a, \quad (18)$$

то имеет место точная двухсторонняя асимптотическая оценка

$$0 < \gamma_1 < u(t)/J^{1/(1-\lambda)}(t, +\infty) < \gamma_2. \quad (19)$$

Доказательство. Предположим, что уравнение (1) с функцией  $p(t)$ , удовлетворяющей условиям (16) и  $J(a, +\infty) = +\infty$ , имеет правильное решение вида (2). Тогда функция  $\varphi(t) = J(a, t)$  монотонно неограниченно возрастает на полуоси  $t > a$  и удовлетворяет условию  $t\dot{\varphi}(t)/\varphi(t) = p(t)t^n/J(a, t) < M$  при  $t > t_M > a$ . В этой ситуации в силу теоремы 2 должно выполняться равенство (11). Однако непосредственная проверка показывает, что из сделанного предположения о невыполнении условия (3) вытекает при  $\mu < \sigma$  равенство

$$G_{\mu, \sigma}(\varphi)(t) = J^\sigma(a, t) \int_t^{+\infty} \frac{(p(x)x^{n-1})^\mu}{J^\sigma(a, x)} \left( \frac{p(x)x^{n-1}}{J(a, x)} \right)^{1-\mu} dx = J^\sigma(a, t) \int_t^{+\infty} \frac{p(x)x^{n-1}}{J^{\mu+\sigma-1}(a, x)} dx = cJ^\mu(a, t),$$

в силу которого  $G_{\mu, \sigma}(\varphi)(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Полученное противоречие доказывает необходимость выполнения условия (3).

Чтобы получить оценку (17), воспользуемся теоремой 2 с пробной функцией  $\varphi(t) = J(a, t)$ , удовлетворяющей в силу (16) ее условиям и по доказанному выше ограниченной. В этом случае из (12) на основании неравенства

$$G_{\mu, \sigma}(\varphi)(t) = J^\sigma(a, t) \int_t^{+\infty} p(x)x^{n-1}J^{\mu-\sigma-1}(a, x)dx > \gamma J(t, +\infty), \quad t > t_\gamma > a,$$

вытекает требуемая оценка (17).

Пусть теперь  $u$  — правильное решение вида (2) уравнения (1) с функцией  $p(t)$ , удовлетворяющей условиям (3) и (18). Ясно, что функция  $\varphi(t) = 1/J(t, +\infty)$  монотонно неограниченно возрастает на полуоси  $t > a$  и в силу (18) удовлетворяет неравенству  $t\dot{\varphi}(t)/\varphi(t) = p(t)t^n/J(t, +\infty) \leq M < +\infty$ , начиная с некоторого момента  $t_M > a$ . Тогда в силу равенства

$$G_{\mu, \sigma}(\varphi)(t) = J^{-\sigma}(t, +\infty) \int_t^{+\infty} (p(x)x^{n-1})^\mu J^\sigma(x, +\infty) \left( \frac{p(x)x^{n-1}}{J(x, +\infty)} \right)^{1-\mu} dx = \gamma J^\mu(t, +\infty), \quad t > t_\gamma,$$

с положительной константой  $\gamma$ , зависящей от  $n$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ , и вытекающего в силу (3) из интегрального представления (7) неравенства  $v_{n-1}(t) < \text{const } u^\lambda(t)J(t, +\infty)$  из теоремы 2 следует неравенство, которое вместе с (4) и дает оценку (19). Теорема доказана.

Задача о существовании и асимптотических свойствах решений вида (2) уравнения (1) с функцией  $p(t)$ , удовлетворяющей условию

$$0 < c_1 < p(t)t^{n-1}l_k(t)(\ln_k t)^\sigma < c_2, \quad t > e_{k-1}, \quad (20)$$

где  $\ln_0 t = t$ ,  $e_0 = 1$ ,  $\ln_{j+1} t = \ln(\ln_j t)$ ,  $l_j(t) = \prod_{i=0}^k \ln_i t$ ,  $e_{j+1} = \exp e_j$ ,  $j \in N$ , частично может быть изучена с помощью достаточного условия (3) и оценок (5), (6) и полностью решается с привлечением теоремы 3. Этот результат содержит

**Следствие 3.** Уравнение (1) с функцией  $p(t)$ , удовлетворяющей условию (20), имеет правильные исчезающие в бесконечности решения (2) тогда и только тогда, когда число  $\sigma$  положительно, и в этом случае каждое его решение такого типа допускает точную двухстороннюю асимптотическую оценку  $\gamma_1 < u^{1-\lambda}(t)(\ln_k t)^\sigma < \gamma_2$ .

Известно [4, 5], что уравнение (1) с функцией  $p(t)$ , неограниченно возрастающей на множестве  $T_p(a, +\infty)$  или его части и не удовлетворяющей условию (3) ни в какой окрестности  $+\infty$ , может иметь правильные решения вида (2). В этом случае уже не действуют оценка (4) и теорема 3, но остаются эффективными теоремы 1 и 2. Их следствием является содержащая естественное обобщение интеграла (3)

**Теорема 4.** Если уравнение (1) имеет правильные решения (2) и существует неубывающая функция  $f(t) > 0$ , при больших  $t$  удовлетворяющая условию

$$p(t)t^n \leq cf(t)J_f(a, t), \quad J_f(s, t) \equiv \int_s^t \frac{p(x)x^{n-1}}{f(x)} dx, \quad (21)$$

то должно выполняться неравенство

$$J_f(a, +\infty) < +\infty, \quad (22)$$

при всех  $\mu \in (0, 1/n_1)$  имеют место равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f^\mu(t)J_f(t, +\infty) = 0 \quad (23)$$

и асимптотическая оценка

$$v_{n-1}^{1-\lambda}(t) > \gamma f(t)J_f^{1/\mu}(t, +\infty). \quad (24)$$

Если вместо (23) выполнено условие

$$p(t)t^n \leq cf(t)J_f(t, +\infty), \quad (25)$$

то справедливы равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)J_f(t, +\infty) = 0 \quad (26)$$

и асимптотическая оценка

$$v_{n-1}(t) > \gamma(f(t)J_f(t, +\infty))^{1/(1-\lambda)}. \quad (27)$$

Доказательство. Предположим, что уравнение (1) имеет правильные решения (2) и есть неубывающая функция  $f(t)$ , связанная с его коэффициентом  $p(t)$  неравенством (21). Тогда в силу теоремы 2 должно выполняться равенство (11) с удовлетворяющей ее условиям функцией  $\varphi(t) = J_f(a, t)$ . Отсюда на основании оценки

$$G_{\mu, \sigma}(\varphi)(t) = J_f^\sigma(a, t) \int_t^{+\infty} \frac{p(x)x^{n-1}}{J_f^{1-\mu+\sigma}(a, x)} dx \geq cJ_f^\sigma(a, t)f^\mu(t) \int_t^{+\infty} \frac{J_f'(a, x)}{J_f^{1-\mu+\sigma}(a, x)} dx$$

следует, что в случае  $J_f(a, +\infty) < +\infty$  справедливы оценка  $G_{\mu, \sigma}(\varphi)(t) \geq \gamma f^\mu(t)J_f(t, +\infty)$ , равенство (23) и оценка (24), а случай  $J_f(a, +\infty) = +\infty$  невозможен, так как в противном случае при  $\sigma > \mu$  имело бы место неравенство  $G_{\mu, \sigma}(\varphi)(t) \geq \gamma f^\mu(t)J_f^\mu(a, t)$ , вступающее в противоречие с требованием (11).

Предположим теперь, что выполнены условия (22) и (25). Тогда неубывающая неограниченная пробная функция  $\varphi(t) = 1/J_f(t, +\infty)$  удовлетворяет условиям теоремы 2 и, следовательно, с ее помощью для любого правильного решения задачи (1), (2) может быть получено неравенство

$$\begin{aligned} v_{n-1}^{(1-\lambda)\mu}(t) &\geq \gamma J_f^{-\sigma}(t, +\infty) \int_t^{+\infty} \frac{(p(x)x^{n-1})^\mu}{J_f^{\sigma}(x, +\infty)} \left( \frac{p(x)x^{n-1}}{f(x)J_f(x, +\infty)} \right)^{1-\mu} dx = \\ &= \frac{\gamma f^\mu(t)}{J_f^\sigma(t, +\infty)} \int_t^{+\infty} \frac{p(x)x^{n-1}}{f(x)J_f^{1-\mu-\sigma}(x, +\infty)} dx = \frac{\gamma f^\mu(t)}{J_f^\sigma(t, +\infty)} \int_t^{+\infty} \frac{-J_f'(x, +\infty)}{J_f^{1-\mu-\sigma}(x, +\infty)} dx = \gamma [f(t)J_f(t, +\infty)]^\mu \end{aligned}$$

с универсальной постоянной  $\gamma$ , зависящей от  $n$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ . Отсюда непосредственно вытекают равенство (26) и оценка (27). Теорема доказана.

Уместно сразу же рассмотреть случай, когда наряду с (22) выполнено условие

$$p(t)t^n > cf(t)J_f(a, t) \operatorname{sgn} p(t) \quad \forall t > t_c > a. \quad (28)$$

Следствие 4. Если задача (1), (2) разрешима и неубывающая функция  $f(t)$  связана с  $p(t)$  соотношениями (22) и (28), то при всех  $\nu \in [0, 1)$  и  $\mu \in [(1-\nu)/n, (1-\nu)/n_1[$ : 1) сходится интеграл  $\int_t^{+\infty} p^\mu(\tau)\tau^{n\mu-1}d\tau$  и справедлива оценка  $v_{n-1}^{(1-\lambda)\mu}(t) > \gamma \int_t^{+\infty} p^\mu(\tau)\tau^{n\mu-1}d\tau$ ,  $t > t_\gamma$ ; 2) выполнено равенство  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f^\mu(t)J_f^{-\nu}(t, +\infty) \int_t^{+\infty} x^{-1} \operatorname{sgn} p(x)dx = 0$ , и имеет место оценка  $v_{n-1}^{(1-\lambda)\mu}(t) > \gamma f^\mu(t)J_f^{-\nu}(t, +\infty) \int_t^{+\infty} x^{-1} \operatorname{sgn} p(x)dx$ ,  $t > t_\gamma$ , где  $\gamma$  — положительная константа, зависящая от  $n$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ .

Доказательство этого утверждения заключается в применении теоремы 1 с ограниченной функцией  $\varphi(t) = J_f(a, t)$  в первой его части и неограниченной функцией  $\varphi(t) = 1/J_f(t, +\infty)$  во второй, поскольку в обоих случаях при достаточно больших значениях аргумента будет выполнено неравенство  $\dot{\varphi}(t)/\varphi(t) > c/t$ , влекущее за собой равенство  $\varphi_c(t) = 1/t$ .

Отметим, что первое утверждение следствия 4 вытекает из второго при  $\nu = 0$  и приведено здесь еще и с целью обратить внимание на зависимость результата применения основных

теорем 1 и 2 от свойств выбранной пробной функции  $\varphi(t)$  — в данном случае неограниченная оказалась предпочтительнее. Поэтому всякий раз, когда функция  $\varphi$  оказывается ограниченной, полезно в качестве пробной рассмотреть и неограниченную функцию  $1/\text{var}\{\varphi(x) : x \in T_p(t, +\infty)\}$ .

Следует заметить, что в случае одновременного выполнения неравенств (21) и (28) функция  $p(t)$  удовлетворяет неравенству

$$c_1 f(t) J_f(a, t) \text{sgn } p(t) < p(t) t^n < c_2 f(t) J_f(a, t) \quad \forall t > t_c > a, \quad (29)$$

в силу которого интегралы  $\int_t^{+\infty} x^{-1} \text{sgn } p(x) dx$  и  $J_f(t, +\infty)$  асимптотически эквивалентны и имеет место

Следствие 5. Если задача (1), (2) разрешима и неубывающая функция  $f(t)$  связана с  $p(t)$  неравенством (29), то при всех  $\nu \in [0, 1)$  и  $\mu \in ](1 - \nu)/n, (1 - \nu)/n_1[$  выполнено равенство  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f^\mu(t) J_f^{1-\nu}(t, +\infty) = 0$  и имеет место оценка  $v_{n-1}^{1-\lambda}(t) > \gamma f(t) J_f^{(1-\nu)/\mu}(t, +\infty)$ ,  $t > t_\gamma$ , где  $\gamma$  — положительная константа, зависящая от  $n, \lambda, \mu$ .

Теперь становится ясно, что совершенно реальной является ситуация, когда выполнено неравенство (28) в совокупности с условием

$$J_f(a, +\infty) = +\infty. \quad (30)$$

Этот случай рассматривает

Следствие 6. Если уравнение (1) имеет правильное решение (2) и его коэффициент  $p(t)$  удовлетворяет условию (28) с неубывающей функцией  $f(t) > 0$ , то при всех  $\mu \in (0, 1/n_1)$  выполнено равенство  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f^\mu(t) J_f^\mu(a, t) \int_t^{+\infty} x^{-1} \text{sgn } p(x) dx = 0$  и в некоторой окрестности  $+\infty$

имеет место оценка  $v_{n-1}^{1-\lambda}(t) > \gamma f(t) J_f(a, t) \left( \int_t^{+\infty} x^{-1} \text{sgn } p(x) dx \right)^{1/\mu}$ , где  $\gamma$  — положительная константа, зависящая от  $n, \lambda, \mu$ .

Доказательство. Пусть задача (1), (2) разрешима и есть удовлетворяющая условию (28) неубывающая функция  $f(t) > 0$ . Зададим функцию  $\varphi(t)$  равенством  $\varphi(t) = J_f(a, t)$ . Она обладает свойством  $\dot{\varphi}(t)/\varphi(t) = p(t)t^{n-1}/(f(t)J_f(a, t)) > c/t$  при  $t > t_c$ . На основании получаемой при  $\mu = \sigma$  оценки

$$\begin{aligned} F_{\nu, \mu, \sigma, c}(\varphi)(t) &= J_f^\sigma(a, t) \int_t^{+\infty} \frac{(p(\tau)\tau^{n-1})^\mu}{J_f^\sigma(a, \tau)} \left( \frac{p(\tau)\tau^{n-1}}{f(\tau)J_f(a, \tau)} \right)^\nu \left( \frac{1}{\tau} \right)^{1-\mu-\nu} d\tau = \\ &= J_f^\sigma(a, t) \int_t^{+\infty} \left( \frac{p(\tau)\tau^{n-1}}{f(\tau)J_f(a, \tau)} \right)^{\mu+\nu} \frac{(f(\tau)J_f(a, \tau))^\mu}{J_f^\sigma(a, \tau)} \left( \frac{1}{\tau} \right)^{1-\mu-\nu} d\tau > \\ &> J_f^\sigma(a, t) \int_t^{+\infty} \frac{f^\mu(\tau) \text{sgn } p(\tau)}{\tau J_f^{\sigma-\mu}(a, \tau)} d\tau > f^\mu(t) J_f^\mu(a, t) \int_t^{+\infty} x^{-1} \text{sgn } p(x) dx \end{aligned}$$

из теоремы 1 вытекает доказываемое утверждение.

Теоремой 4 и следствиями 4 — 6 можно воспользоваться и в том случае, когда лежащие в их основе условия (21), (25) и (28) выполняются не на всем множестве  $T_p$ , а лишь на его части  $T_1$ . Для этого нужно лишь положить  $\dot{\varphi}(t) = 0$  во всех точках плотности множества  $T_p \setminus T_1$ , но это может привести к значительному сужению промежутка интегрирования и огрублению получаемых оценок и условий. Поэтому в самом общем случае полезно ввести в рассмотрение функции  $p_{f^*}(t) = \min\{p(t), f(t)t^{-n}\} \geq 0$ ,  $p_f^*(t) = p(t) - p_{f^*}(t) \geq 0$  и интегралы

$$J_{f^*}(s, t) = \int_s^t \frac{p_{f^*}(x) x^{n-1}}{f(x)} dx, \quad J_f^*(s, t) = \int_s^t \frac{p_f^*(x) x^{n-1}}{f(x)} dx.$$

Основные свойства этих объектов описывает следующая

**Теорема 5.** Пусть задача (1), (2) разрешима. Тогда для любой неубывающей функции  $f(t) > 0$  при всех  $\mu \in (0, 1/n_1)$  выполнены соотношения

$$J_{f_*}(a, +\infty) < +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f^\mu(t) J_{f_*}(t, +\infty) = 0 \quad (31)$$

и справедлива асимптотическая оценка

$$v_{n-1}^{1-\lambda}(t) > \gamma f(t) J_{f_*}^{1/\mu}(t, +\infty). \quad (32)$$

Если дополнительно выполнено условие (30), то имеют место равенства

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} p_{f_*}^*(t) t^{n-1} / f(t) = +\infty, \quad J_{f_*}^*(a, +\infty) = +\infty. \quad (33)$$

**Доказательство.** Предположим, что задача (1), (2) разрешима и функция  $f(t) > 0$  не убывает. Так как по построению функция  $\varphi(t) = J_{f_*}(a, t)$  удовлетворяет неравенству  $\dot{\varphi}(t)/\varphi(t) = p_{f_*}(t) t^{n-1} / (f(t) J_{f_*}(a, t)) \leq c/t$  при  $t > t_c > a$ , то в силу оценки

$$\begin{aligned} G_{\mu, \sigma}(\varphi)(t) &= J_{f_*}^\sigma(a, t) \int_t^{+\infty} \frac{(p(x) x^{n-1})^\mu}{J_{f_*}^\sigma(a, x)} \left( \frac{p_{f_*}(x) x^{n-1}}{f(x) J_{f_*}(a, x)} \right)^{1-\mu} dx \geq \\ &\geq f^\mu(t) J_{f_*}^\sigma(a, t) \int_t^{+\infty} \frac{p_{f_*}(x) x^{n-1}}{f(x) J_{f_*}^{1-\mu+\sigma}(a, x)} dx = f^\mu(t) J_{f_*}^\sigma(a, t) \int_t^{+\infty} \frac{J_{f_*}'(a, x)}{J_{f_*}^{1-\mu+\sigma}(a, x)} dx \end{aligned}$$

из теоремы 1 следует, что должен сходиться интеграл  $J_{f_*}(a, +\infty)$  и, следовательно, в силу этой же оценки имеют место равенство (31) и оценка (32).

На основании неравенства (31) из предположения (30) вытекают равенства (33). Теорема 5 доказана.

**Теорема 6.** Пусть задача (1), (2) разрешима. Тогда для любой удовлетворяющей условию

$$p_{f_*}(t) t^n / f(t) < c J_{f_*}(t, +\infty), \quad t > t_c, \quad (34)$$

неубывающей функции  $f(t) > 0$  при всех  $\mu \in ]0, 1/n_1[$  выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) J_{f_*}(t, +\infty) = 0 \quad (35)$$

и все решения рассматриваемой задачи допускают оценку

$$v_{n-1}^{1-\lambda}(t) > \gamma f(t) J_{f_*}(t, +\infty), \quad t > t_\gamma. \quad (36)$$

**Доказательство.** В силу предположения (34) функция  $\varphi(t) = 1/J_{f_*}(t, +\infty)$  монотонна, не ограничена и удовлетворяет условию  $\dot{\varphi}(t)/\varphi(t) < c/t$  при больших  $t$ . Поэтому если задача (1), (2) разрешима, то на основании оценок

$$\begin{aligned} G_{\mu, \sigma, c}(\varphi)(t) &= J_{f_*}^{-\sigma}(t, +\infty) \int_t^{+\infty} \frac{(p(x) x^{n-1})^\mu}{J_{f_*}^{-\sigma}(x, +\infty)} \left( \frac{p_{f_*}(x) x^{n-1}}{f(x) J_{f_*}(x, +\infty)} \right)^{1-\mu} \geq \\ &\geq \frac{f^\mu(t)}{J_{f_*}^\sigma(t, +\infty)} \int_t^{+\infty} \frac{p_{f_*}(x) x^{n-1}}{f(x) J_{f_*}^{1-\mu-\sigma}(x, +\infty)} dx = \frac{f^\mu(t)}{J_{f_*}^\sigma(t, +\infty)} \int_t^{+\infty} \frac{-J_{f_*}'(x, +\infty)}{J_{f_*}^{1-\mu-\sigma}(x, +\infty)} dx = \gamma (f(t) J_{f_*}(t, +\infty))^\mu \end{aligned}$$

из теоремы 2 вытекают равенство (35) и оценка (36). Теорема доказана.

**Теорема 7.** Если задача (1), (2) разрешима и неубывающая функция  $f(t) > 0$  связана с функцией  $p(t)$  неравенством

$$p_{f_*}(t) t^n / f(t) > c J_{f_*}(t, +\infty), \quad t > t_c, \quad (37)$$

то при всех  $\nu \in [0, 1)$ ,  $\mu \in ](1 - \nu)/n, (1 - \nu)/n_1[$  выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f^\mu(t) J_{f^*}^{1-\nu}(t, +\infty) = 0 \quad (38)$$

и справедлива асимптотическая оценка

$$v_{n-1}^{1-\lambda}(t) > \gamma f(t) J_{f^*}^{(1-\nu)/\mu}(t, +\infty), \quad t > t_\gamma. \quad (39)$$

**Доказательство.** Предположим теперь, что наряду с доказанным выше неравенством (31) выполнено дополнительное условие (37). Тогда функция  $\varphi(t) = 1/J_{f^*}(t, +\infty)$  монотонно неограниченно возрастает и удовлетворяет условию  $t\dot{\varphi}(t)/\varphi(t) \geq c$  в некоторой окрестности  $+\infty$ . Из оценки

$$\begin{aligned} F_{\nu, \mu, \sigma, c}(\varphi)(t) &= J_{f^*}^{-\sigma}(t, +\infty) \int_t^{+\infty} \frac{(p(x)x^{n-1})^\mu}{J_{f^*}^{-\sigma}(x, +\infty)} \left( \frac{p_{f^*}(x)x^{n-1}}{f(x)J_{f^*}(x, +\infty)} \right)^\nu \left( \frac{1}{x} \right)^{1-\mu-\nu} dx \geq \\ &\geq \frac{f^\mu(t)}{J_{f^*}^\sigma(t, +\infty)} \int_t^{+\infty} \frac{p_{f^*}(x)x^{n-1}}{f(x)J_{f^*}^{\nu-\sigma}(x, +\infty)} dx = \frac{f^\mu(t)}{J_{f^*}^\sigma(t, +\infty)} \int_t^{+\infty} \frac{-J'_{f^*}(x, +\infty)}{J_{f^*}^{\nu-\sigma}(x, +\infty)} dx = \gamma f^\mu(t) J_{f^*}^{1-\nu}(t, +\infty) \end{aligned}$$

в силу теоремы 1 вытекают равенство (38) и оценка (39). Теорема 7 доказана.

Таким образом, при одновременном выполнении неравенств (34) и (37) доминирующую роль играет второе из них, а вместе с ним равенство (38) и оценка (39).

Если уравнение (1) с удовлетворяющей условию (30) функцией  $p(t)$  имеет решения (2), то в силу теоремы 5 на всем множестве  $T_{p^*}$  или на значительной его части выполнено неравенство

$$p_f^*(t)t^n > cf(t)J_f^*(a, t) \operatorname{sgn} p_f^*(t). \quad (40)$$

**Теорема 8.** Пусть задача (1), (2) разрешима и при больших  $t$  выполнено условие (40) с неубывающей функцией  $f(t) > 0$ . Тогда при всех  $\mu \in ]0, 1/n_1[$  выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t)J_f^*(a, t))^\mu \int_t^{+\infty} x^{-1} \operatorname{sgn} p_f^*(x) dx = 0 \quad (41)$$

и справедлива асимптотическая оценка

$$v_{n-1}^{1-\lambda}(t) > \gamma f(t) J_f^*(a, t) \left( \int_t^{+\infty} x^{-1} \operatorname{sgn} p_f^*(x) dx \right)^{1/\mu}, \quad t > t_\gamma. \quad (42)$$

**Доказательство.** Пусть задача (1), (2) разрешима. Предположим, что выполнено условие (37) на всем множестве  $T_{p^*}$ . Тогда функция  $\varphi(t) = J_f^*(a, t)$  монотонна и удовлетворяет условию  $\dot{\varphi}(t)/\varphi(t) > c/t$  на этом множестве. В силу теоремы 1 и справедливой при  $\mu \geq \sigma$  оценки

$$\begin{aligned} F_{\nu, \mu, \sigma, c}(\varphi)(t) &= (J_f^*(a, t))^\sigma \int_t^{+\infty} \frac{(p(x)x^{n-1})^\mu}{(J_f^*(a, x))^\sigma} \left( \frac{p_f^*(x)x^{n-1}}{f(x)J_f^*(a, x)} \right)^\nu \left( \frac{1}{x} \right)^{1-\mu-\nu} dx \geq \\ &\geq (J_f^*(a, t))^\sigma \int_t^{+\infty} x^{-1} f^\mu(x) (J_f^*(a, x))^{\mu-\sigma} dx \geq \gamma (f(t)J_f^*(a, t))^\mu \int_t^{+\infty} x^{-1} \operatorname{sgn} p_f^*(x) dx \end{aligned}$$

из сделанных предположений вытекают равенство (41) и оценка (42). Теорема 7 доказана.

При практическом применении теоремы 1 как с целью установления неразрешимости задачи (1), (2), так и с целью получения асимптотических оценок ее решений при подборе пробных функций  $\varphi$  следует иметь в виду, что, согласно теореме 5, функция  $p(t)$  и множество  $T_p$  могут быть устроены достаточно сложно. Так, неограниченное и, вообще говоря, несвязное

множество  $T_p(a, +\infty)$  и неограниченно возрастающая функция  $\varphi(t) > 0$  могут оказаться таковыми, что полная вариация этой функции по указанному множеству ограничена, в то время как для экспоненты рассматриваемой функции этот факт не имеет места. Например, если  $T_p = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [k^k, (k+1)^k]$ , то  $\text{var}\{\ln_3 t : t \in T_p(e_3, +\infty)\} = \sum_{k_0}^{+\infty} 1/(k \ln^2 k) < +\infty$ , в то время как  $\text{var}\{\ln_2 t : t \in T_p(e_2, +\infty)\} = +\infty$ . Таким образом, можно строить бесконечные в обе стороны шкалы пробных функций  $\dots, \text{var}_{T_p(a,t)} \ln_k \varphi(t), \dots, \text{var}_{T_p(a,t)} \varphi(t), \dots, \text{var}_{T_p(a,t)} \exp_k \varphi(t), \dots, k \geq 1$ , где  $\ln_0 \varphi(t) = \exp_0 \varphi(t) = \varphi(t)$ ,  $\exp_{k+1} \varphi(t) = \exp(\exp_k \varphi(t))$ ,  $\ln_{k+1} \varphi(t) = \ln(\ln_k \varphi(t))$ , надеясь, что при удачном выборе исходной функции  $\varphi$  один из элементов шкалы разделит ее на две части, одна из которых состоит из ограниченных функций, а другая — из неограниченных. Можно также воспользоваться и более простой шкалой  $\dots, \ln_k \varphi(t), \dots, \varphi(t), \dots, \exp_k \varphi(t), \dots, k \geq 1$ , выбор исходной функции  $\varphi(t)$  для которой можно осуществить одним из рассматривавшихся выше или каким-то иным способом. На этом пути могут быть получены утверждения следующего типа.

**Следствие 7.** Если задача (1), (2) разрешима, то при всех  $\sigma \in [0, 1)$ ,  $\mu \in ]0, 1/n_1[$  и  $k > 0$  выполнено равенство  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln_k t)^\sigma \int_t^{+\infty} (p(x)x^{n-1})^\mu (\ln_k t)^{-\sigma} (l_k(x))^{\mu-1} dx = 0$  и имеет место оценка  $v_{n-1}^{(1-\lambda)\mu}(t) > \gamma (\ln_k t)^\sigma \int_t^{+\infty} (p(x)x^{n-1})^\mu (\ln_k t)^{-\sigma} (l_k(x))^{\mu-1} dx$ ,  $t > t_\gamma$ , где  $\gamma$  — положительная константа, зависящая от  $n, \lambda, \mu$ .

### Литература

1. Кизурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1990.
2. Изобов Н. А., Рабцевич В. А. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 1999. Т. 2. С. 73 — 91.
3. Квиникадзе Г. Г. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 10. С. 1775 — 1783.
4. Изобов Н. А. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 4. С. 581 — 588.
5. Изобов Н. А., Рабцевич В. А. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 4. С. 578 — 585.
6. Богданова М. Ю., Кизурадзе И. Т. // Докл. расш. засед. сем. Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа. 1990. Т. 5, № 3. С. 21 — 25.
7. Рабцевич В. А. // Док. АН Беларуси. 1993. Т. 37, № 6. С. 18 — 20.

Институт математики НАН Беларуси

Поступила в редакцию  
1 декабря 1999 г.