А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов, А. А. Лемперт, О построении тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности в симметричном случае, *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*, 2015, том 11, 39–53

Серия «Математика»
2015. Т. 11. С. 39—53

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.95

О построении тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности в симметричном случае *

А. Л. Казаков
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова

П. А. Кузнецов
Иркутский государственный университет

А. А. Лемперт
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова

Аннотация. Рассматривается нелинейное параболическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными, которое при некоторых дополнительных предположениях может быть интерпретировано как нелинейное уравнение теплопроводности (фильтрации) в случае, когда искомая функция зависит от двух независимых переменных: времени и расстояния до начала координат. Данное уравнение имеет многочисленные приложения в механике сплошной среды, из которых одним из наиболее интересных, помимо, собственно, моделирования распространения тепла, является математическое описание фильтрации идеального политропного газа в пористой среде (в англоязычной литературе за ним закрепилось название «the porous medium equation»). Авторы исследуют специальный класс решений, которые в литературе обычно именуются «тепловыми волнами». Их особенностью является то, что они «сшиты», из двух решений, непрерывно состыкованных между собой, одно из них является тривиальным, а второе - неотрицательным. На линии стыковки, именуемой тепловым фронтом (или фронтом фильтрации), возможен разрыв производных, т.е. гладкость решения, вообще говоря, нарушается. Наиболее естественной задачей, для которой характерны подобного рода решения, является, так называемая «задача А. Д. Сахарова об инициировании тепловой волны». Для указанной задачи в статье построены новые решения в виде кратных рядов по степеням физических переменных, коэффициенты которых определяются при решении трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений. При этом элементы матриц систем зависят от их порядка, и не выполняется условие диагонального преобладания. Для коэффициентов рядов получены рекуррентные формулы.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производным, нелинейная теплопроводность, тепловая волна, степенной ряд.

1. Введение

В статье рассматривается нелинейное параболическое [12] уравнение второго порядка, с двумя независимыми переменными

$$u_\tau = uu_{\rho\rho} + \frac{1}{\sigma}u_\rho^2 + \frac{\nu}{\rho}uu_\rho. \tag{1.1}$$

Здесь $u(t,\rho)$— искомая функция; t,ρ— независимые переменные, $\rho > 0$; $\sigma > 0$, $\nu \in \mathbb{R}$— константы.

Данное уравнение может рассматриваться и как самостоятельный математический объект, однако в данном случае имеется также тесная связь с приложениями: в частности, когда ν принимает целые неотрицательные значения, оно представляет собой одну из форм записи нелинейного уравнения теплопроводности в случае, когда искомая функция зависит только от времени t и расстояния ρ до начала координат в пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+1}$. Тогда $\rho = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{\nu+1}^2)^{1/2}$. В частности, наиболее содержательными являются случаи $\nu = 0$ (плоскосимметричный), $\nu = 1$ (цилиндрически симметричный) и $\nu = 2$ (сферически симметричный). Для уравнения (1.1) рассматривается специальный класс решений ("тепловые волны"), интересный как с теоретической точки зрения, так и для приложений (см. следующий раздел).

Нелинейное уравнение теплопроводности (the porous medium equation), которое часто рассматривается в виде [19]

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2, \tag{1.2}$$

является дифференциальной записью одновременно двух фундаментальных законов физики: закона Фурье для теплопроводности [18] и закона Дарси для фильтрации [1; 13] в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры и коэффициента фильтрации от плотности газа соответственно. Отметим, что физически содержательные задачи существуют и для отрицательных σ [16], однако такая возможность нами здесь не рассматривается.

* Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 14-01-31175 мол_а, программы фундаментальных научных исследований УрО РАН, проект № 15-7-1-17 и гранта ИМЭИ ИГУ при поддержке "Программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «ИГУ» на 2012–2016 годы."

2. О тепловой волне

Одним из интересных классов решений уравнения теплопроводности являются тепловые волны, распространяющиеся по холодному (нулевому) фону с конечной скоростью. С геометрической точки зрения решение типа тепловой волны представляет собой две поверхности (возмущенное решение $u(t,\bar{x}) > 0$ и холодный фон $u \equiv 0$), непрерывно состыкованные вдоль некоторой достаточно гладкой линии $x = b(t)$, называемой фронтом.

В линейном случае такие решения известны, по-видимому, еще со времен Фурье (см. [18], гл. III, § 4). Простым примером тепловой волны для линейного уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ является следующий:

$$u(t,x) = \begin{cases} \exp\left(-x/\sqrt{2}\right)\sin\left(t - x/\sqrt{2}\right), & 0 \le x < t\sqrt{2}, \\ 0, & x \ge t\sqrt{2}, \end{cases}$$

где $0 \le t \le \pi/2$. Как легко видеть, фронтом здесь является прямая $x = t\sqrt{2}$.

А.Н. Тихонов и А.А. Самарский (см. [18], гл. III, Приложение I) оперируют понятием «температурная волна». Однако под построением последней там понимается решение задачи без начальных условий, описывающей периодические температурные колебания в почве. Отметим, что о единственности в данном случае говорить не приходится: для однозначной разрешимости нужно задать дополнительное условие (например, определить производную по пространственной координате при $x = 0$, т. е. рассмотреть задачу Коши).

Термины «тепловая волна» и «аналитическая тепловая волна» применительно к уравнению (1.2) также ранее использовались. Например, в работах С.П. Баутина [2] под тепловой волной понималось составное решение вида

$$u_*(t,\bar{x}) = \begin{cases} u(t,\bar{x}) > 0, & a(t,x_2,\ldots,x_n) > x_1, \\ 0, & x_1 \ge a(t,x_2,\ldots,x_n), \end{cases}$$

где $a_t(0,x_2,\ldots,x_n) > 0$. Для задач, рассмотренных в статье, такое определение не совсем удобно, поскольку предполагает задание фронта в виде достаточно гладкой функции, которая разрешена относительно одной из пространственных переменных. В этой связи, тепловая волна нами определяется следующим (более общим) образом.

Определение 1. *Пусть $u(t,\bar{x})$ — непрерывная, неотрицательная функция, определенная при $t \in [t_*, t^*)$, $\bar{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, с компактным односвязным носителем* $\operatorname{supp} u = \overline{D}$, *где* $D = \{(t,\bar{x}) |\ u(t,\bar{x}) > 0\}$.

Будем называть функцию $u(t,\bar{x})$ тепловой волной, если она

1) дважды непрерывно дифференцируема в D по пространственным переменным $\bar{x}$ и непрерывно дифференцируема по времени t;

2) удовлетворяет в D уравнению (1.2);

3) область D обладает свойством: если $t_* \leq t_1 < t_2 < t^*$, то $D(t_1) \subset D(t_2)$, где $D(t_i)$— проекция сечения D гиперплоскостью $t = t_i$, $i = 1, 2$ на $\mathbb{R}^n$.

В случае, когда функция $u(t, \bar{x})$ является аналитической в D, будем говорить об аналитической тепловой волне. Границу $\Gamma = \overline{D} \setminus D$ области D будем называть фронтом тепловой волны или просто тепловым фронтом.

Поскольку функция $u \equiv 0$, очевидно, удовлетворяет уравнению (1.2), то тепловая волна является классическим (гладким) решением уравнения (1.2) всюду в области определения, за исключением, быть может, множества Γ, где допускается разрыв производных (но не искомой функции).

Простейшим примером решения уравнения (1.2) типа тепловой волны в случае одной пространственной переменной x может служить кусочно-линейная функция вида

$$u(t, x) = \begin{cases} \alpha_1 t - \sqrt{\sigma\alpha_1}x, & x < b(t) = \alpha_1 t/\sqrt{\sigma\alpha_1}, \\ 0, & x \geq \alpha_1 t/\sqrt{\sigma\alpha_1}, \ \alpha_1 = const > 0. \end{cases}$$

Впервые решения уравнения (1.2), имеющие вид тепловой волны, по-видимому, были получены Я. Б. Зельдовичем и А. С. Компанейцем при исследовании задач нелинейной теплопроводности [4]. Несколько позднее появились работы Г. И. Баренблатта [1], в которых близкие результаты были получены для задач фильтрации. В статье О.А. Олейник с соавторами [14] краевые задачи, в которых предполагается конечная скорость распространения фронта фильтрации, исследованы в абстрактных функциональных пространствах. Аналитические тепловые волны первым рассмотрел А. Ф. Сидоров [17]. В дальнейшем его исследования были продолжены в работах учеников [2].

В данной статье рассматриваются решения типа тепловой волны для уравнения (1.2) в классе аналитических функций (аналитическая тепловая волна) в виде рядов с рекуррентно определяемыми коэффициентами [3]. При этом в отличие от ранее опубликованных работ представителей научной школы А. Ф. Сидорова [2; 5; 6; 7; 10; 11; 17; 20], решение выписано в явном виде (а не только описана процедура построения коэффициентов ряда). До сих пор подобные результаты для уравнения (1.1) имелись только в случае $\nu = 0$ [8; 9].

3. Граничное условие и теорема существования

Наиболее естественной задачей, для которой характерны решения, описанные в предыдущем разделе, является «задача А. Д. Сахарова об инициировании тепловой волны»,(см. [17], с. 10), которая для уравнения (1.1) имеет вид

$$u(t,\rho)|_{\rho=\nu R} = f(t),\ f(0)=0,\ f'(0)>0. \tag{3.1}$$

Обращает на себя внимание то, что (3.1) содержит одно граничное условие для уравнения второго порядка. Тем не менее, поскольку из-за наличия вырождения (связанного с обращением в нуль множителя перед старшей производной) уравнение (1.1) в данном случае приобретает специфические свойства, характерные для уравнений первого порядка, то для задачи (1.1), (3.1) справедлива следующая теорема существования и единственности решения.

Теорема 1. *Пусть функция $f=f(t)$ является аналитической в некоторой окрестности $t=0$. Тогда задача* (1.1), (3.1) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой полной окрестности $t=0$, $\rho=\nu R$, если выбран знак $u_\rho|_{t=0,\ \rho=\nu R}$.*

Данная теорема для случая $\nu=0$ доказана С.П. Баутиным в работе [2], при $\nu>0$ — авторами [5] (в [5] указано, что рассматриваются значения $\nu=1,2$, однако доказательство справедливо при всех положительных значениях параметра). Заметим, что при $\nu\in\mathbb{N}$ имеется альтернативное доказательство теоремы 1, состоящее в сведении к теореме 7.1 из [2], однако оно неконструктивно и нами не используется, поскольку предполагает переход в пространство большей размерности и построение покрытия $(\nu+1)$-мерной сферы.

4. Построение тепловой волны

Решение задачи (1.1), (3.1) строится в виде кратного степенного ряда

$$u=\sum_{l,m=0}^{\infty} u_{l,m}\frac{t^l}{l!}\frac{(\rho-\nu R)^m}{m!},\ u_{l,m}=\frac{\partial^{l+m}u(t,\rho)}{\partial t^l\partial\rho^m}\Big|_{t=0,\ \rho=\nu R}. \tag{4.1}$$

Из условия (3.1) можно определить коэффициенты $u_{l,0}$, $l=0,1,2,\ldots$. Действительно, по условию теоремы 1, для функции $f(t)$ в некоторой окрестности $t=0$ справедливо разложение

$$f(t)=\sum_{l=0}^{\infty} f_l\frac{t^l}{l!},$$

в котором $f_l = f^{(l)}(0)$. Из (3.1) и (4.1) следует равенство

$$u(t,\rho)|_{\rho=\nu R} = \sum_{l=0}^{\infty} u_{l,0}\frac{t^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} f_l \frac{t^l}{l!},$$

из которого видно, что $u_{l,0} = f_l$, в частности, $u_{0,0} = u(0,\nu R) = f_0 = 0$, $u_{1,0} = f_1 = f'(0) > 0$. Остальные коэффициенты ряда (4.1) определяются индукцией по суммарному порядку дифференцирования $l + m$.

Положим в уравнении (1.1) $t = 0, \rho = \nu R$. С учетом того, что значения $u_{0,0} = 0$, $u_{1,0} > 0$ уже найдены, получим для $u_{0,1}$ квадратное уравнение $u_{1,0} = u_{0,1}^2/\sigma$, из которого видно, что $u_{0,1}$ определяется двояко по формуле $u_{0,1} = \pm\sqrt{\sigma f_1}$. Итак, база индукции установлена.

Предположим теперь, что найдены все коэффициенты до порядка n включительно, т. е. при $m + l = 1, \ldots, n$. Тогда коэффициенты порядка $n + 1$ определяются при решении системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей, в которой на главной диагонали стоят элементы $a_i = -(i + 2/\sigma)\, u_{0,1}$, $i = 0, \ldots, n$, на наддиагонали находятся $b_j = -j u_{1,0} < 0$, $j = n, \ldots, 1$, на поддиагонали — единицы (см. [5; 6]). Очевидно, что для такой матрицы условие диагонального преобладания, вообще говоря, не выполняется.

Решение СЛАУ будет приведено ниже. Однако прежде необходимо ввести некоторые вспомогательные величины

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = a_n, \quad \lambda_{k+1} = a_{n-k}\lambda_k - b_k\lambda_{k-1};$$

$$\eta_0 = 1, \quad \eta_1 = a_0, \quad \eta_{k+1} = a_k\eta_k - b_{n+1-k}\eta_{k-1}; \quad k = 1, \ldots, n.$$

Индукцией по k можно показать, что (независимо от знака $u_{0,1}$), все $\lambda_k \neq 0, \eta_k \neq 0$.

Пусть $|A|$ — определитель матрицы СЛАУ. Тогда $|A| = \eta_{n+1} = \lambda_{n+1}$.

С учетом введенных обозначений коэффициенты ряда (4.1) порядка $n + 1$ определяются как

$$u_{n,1} = \frac{1}{|A|}\lambda_n(L_{n,0} - f_{n+1}) + \frac{1}{|A|}\sum_{j=2}^{n+1}\eta_0\lambda_{n+1-j}\prod_{l=j-1}^{1}(-b_{n+1-l})L_{n+1-j,j-1},$$

$$u_{n-1,2} = -\frac{1}{|A|}\eta_0\lambda_{n-1}(L_{n,0} - f_{n+1}) + \frac{1}{|A|}\eta_1\lambda_{n-1}L_{n-1,1} +$$

$$+\frac{1}{|A|}\sum_{j=3}^{n+1}\eta_1\lambda_{n+1-j}\prod_{l=j-1}^{2}(-b_{n+1-l})L_{n+1-j,j-1}.$$

$$u_{n+1-k,k} = \frac{1}{|A|}\eta_0\lambda_{n+1-k}(-1)^{k-1}(L_{n,0} - f_{n+1}) + \tag{4.2}$$

$$+\frac{1}{|A|}\sum_{j=2}^{k}\eta_{j-1}\lambda_{n+1-k}(-1)^{k-j}L_{n+1-j,j-1}+$$

$$+\frac{1}{|A|}\sum_{j=k+1}^{n+1}\eta_{k-1}\lambda_{n+1-j}\prod_{l=j-1}^{k}(-b_{n+1-l})L_{n+1-j,j-1},\ k=3,\ldots,n-1,$$

$$u_{1,n}=\frac{1}{|A|}\eta_0\lambda_1(-1)^{n-1}(L_{n,0}-f_{n+1})+$$

$$+\frac{1}{|A|}\sum_{j=2}^{n}\eta_{j-1}\lambda_1(-1)^{n-j}L_{n+1-j,j-1}-\frac{1}{|A|}\eta_{n-1}\lambda_0 b_1 L_{0,n},$$

$$u_{0,n+1}=\frac{1}{|A|}\eta_0\lambda_0(-1)^n(L_{n,0}-f_{n+1})+\frac{1}{|A|}\sum_{j=2}^{n+1}\eta_{j-1}\lambda_0(-1)^{n+1-j}L_{n+1-j,j-1}.$$

Здесь величины $L_{n-k,k}$ известны в силу предположения индукции (так как зависят от коэффициентов рядов порядка не выше n) и вычисляются по формулам

$$L_{n-k,k}=\sum_{\substack{i=0\\ i+j\neq 0}}^{n-k}\ \sum_{\substack{j=0\\ i+j\neq 1}}^{k}C_{n-k}^{i}C_k^{j}u_{i,j}u_{n-k-i,k-j+2}+$$

$$+\frac{1}{\sigma}\sum_{\substack{i=0\\ i+j\neq 0}}^{n-k}\ \sum_{\substack{j=0\\ i+j\neq n}}^{k}C_{n-k}^{i}C_k^{j}u_{i,j+1}u_{n-k-i,k-j+1}+$$

$$+\nu\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{k}C_{n-k}^{i}C_k^{j}\left[\sum_{l=0}^{j}C_j^{l}u_{i,l}\frac{(-1)^{j-l}(j-l)!}{R^{j-l+1}}\right]u_{n-k-i,k-j+1}.$$

Таким образом, ряд (4.1) построен. Его сходимость следует из теоремы 1 (а именно — из существования и единственности аналитического решения задачи (1.1), (3.1) при выборе знака $u_{0,1}$).

Проведенное построение позволяет обосновать нижеследующее утверждение. Но прежде чем его формулировать, сделаем сдвижку пространственной координаты так, чтобы граничное условие было задано при нулевом значении новой координаты r. Пусть $r=\rho-\nu R$.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *у задачи*

$$(r+\nu R)^2u_t=u\Big[\nu(r+\nu R)u_r+(r+\nu R)^2u_{rr}\Big]+\frac{1}{\sigma}(r+\nu R)^2u_r^2,$$

$$u(t,r)|_{r=0}=f(t),\ u(t,r)|_{t=0}=0, \tag{4.3}$$

имеется кусочно-аналитическое решение, которое при $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ *является в окрестности* $t = 0$, $r = 0$ *аналитической тепловой волной, причем выбор направления движения последней (к особой точке* $r = \nu R$ *или от нее) обеспечивает единственность.*

Доказательство. Из теоремы 1 и результатов данного раздела следует существование двух кусочно-аналитических решений краевой задачи (1.1), (3.1) (при этом выбор знака $u_{0,1}$ обеспечивает единственность). Докажем, что из этого следует справедливость сформулированного выше утверждения.

Как показано в начале данного раздела, $u_{1,0} = f_1 > 0$, $u_{0,1} = \pm\sqrt{\sigma f_1}$. Отсюда имеем, что для решения $u = u_+(t, r)$, соответствующего положительному значению $u_{0,1}$, найдется в плоскости переменных t, r линия $r = b_+(t)$, $b_+(0) = 0$, $b'_+(0) < 0$, на которой при $t > 0$ в некоторой окрестности точки $t = 0$, $r = 0$ выполнено условие $u_+|_{r=b_+(t)} = 0$; для решения $u = u_-(t, r)$, соответствующего отрицательному значению $u_{0,1}$, найдется в плоскости переменных t, r линия $r = b_-(t)$, $b_-(0) = 0$, $b'_-(0) > 0$, на которой при $t > 0$ в некоторой окрестности точки $t = 0, r = 0$ выполнено аналогичное условие $u_-|_{r=b_-(t)} = 0$.

Поскольку $b'_+(0) < 0$, $u_{1,0} > 0$ решение $u = u_+(t, r)$ позволяет определить тепловую волну

$$u(t, x) = \begin{cases} u_+ > 0, & b_+(t) < r \le 0, \\ 0, & r \le b_+(t), \end{cases}$$

движущуюся во внутреннюю область, в сторону особой точки $r = \nu R$.

Поскольку $b'_-(0) > 0$, $u_{1,0} > 0$ решение $u = u_-(t, r)$ позволяет определить тепловую волну

$$u(t, x) = \begin{cases} u_- > 0, & b_-(t) > r \ge 0, \\ 0, & r \ge b_-(t), \end{cases}$$

которая движется во внешнюю область.

Легко убедиться, что, так как $b_\pm(0) = 0$, то в обоих случаях выполнено условие $u|_{t=0} = 0$; на тепловом фронте в обоих случаях имеется разрыв производных. Значение t^* (см. определение тепловой волны) определяется радиусом сходимости ряда (4.1). Итак, построенные составные решения, действительно, подпадают под действие определения аналитической тепловой волны. При этом выбор знака у $u_{0,1}$ (который, напомним, обеспечивает единственность) равнозначен выбору направления движения фронта тепловой волны.

Теорема доказана. □

5. Построение отрезка ряда

Как уже отмечалось, одним из главных результатов данного исследования является то, что впервые построены решения задачи об инициировании тепловой волны заданным граничным режимом в конструктивном виде. В данном разделе выписывается отрезок ряда (до слагаемых третьего порядка) и сравнивается с точным решением. Будем далее предполагать, что $\nu \neq 0$, поскольку случай $\nu = 0$ рассмотрен ранее [8; 9].

Получим сначала коэффициенты рядов. Уже найдены в предыдущем разделе

$$u_{0,0} = 0,\ u_{l,0} = f_l,\ l = 1, 2, 3, ...$$

$$u_{0,1} = \pm\sqrt{\sigma f_1},$$

Используя (4.2), можно показать, что

$$u_{1,1} = \frac{\pm(1+2/\sigma)R\sqrt{\sigma f_1}f_2 - 2f_1^2}{(3+4/\sigma)Rf_1}, u_{0,2} = \frac{Rf_2 \mp 3f_1\sqrt{\sigma f_1}}{(3+4/\sigma)Rf_1}. \tag{5.1}$$

Нижний знак здесь и далее соответствует тепловой волне, которая движется от $\rho = R\nu$ в сторону возрастания координаты ρ, а верхний — в сторону убывания (к особой точке $\rho = 0$).

Ниже приводятся формулы для коэффициентов 3-го порядка. Выражения в фигурных скобках сгруппированы относительно слагаемых, зависящих от одинаковых комбинаций f_1, f_2, f_3. Коэффициент $u_{2,1}$ определяется по формуле

$$u_{2,1} = \frac{\mp 1}{(8+8/\sigma^2+18/\sigma)\sqrt{\sigma f_1}}\Bigg\{\frac{1}{(3+4/\sigma)f_1}\Bigg[(4+7\sigma+2\sigma^2)\frac{f_2^2}{\sigma} -$$

$$-4(1+\sigma)\frac{1}{R}f_1f_2 \pm 12(1+\sigma)\frac{1}{R^2}f_1^2\sqrt{\sigma f_1} - (16+12\sigma+10\sigma^2)\frac{1}{R^2}\frac{f_1^3}{\sigma} \pm$$

$$\pm(16+8\sigma-17\sigma^2-10\sigma^3)\frac{1}{R}\frac{f_1f_2}{\sigma}\sqrt{\sigma f_1}\Bigg] +$$

$$+\frac{1}{(3+4/\sigma)^2f_1^2}\Bigg[(32+72\sigma+48\sigma^2+10\sigma^3)\frac{f_1f_2^2}{\sigma^3} \mp (112+56\sigma)\frac{1}{R}\frac{f_1f_2}{\sigma^2}\sqrt{\sigma f_1} \mp$$

$$\mp(64-32\sigma-88\sigma^2-52\sigma^3-12\sigma^4)\frac{1}{R}\frac{f_1^2f_2}{\sigma^3}\sqrt{\sigma f_1} +$$

$$+(80+56\sigma+88\sigma^2+24\sigma^3)\frac{1}{R^2}\frac{f_1^4}{\sigma^2}\Bigg] +$$

$$+4f_1^2\frac{1}{\nu R^2} \pm (4+7\sigma+2\sigma^2)\frac{1}{R}\frac{f_2}{\sigma}\sqrt{\sigma f_1} - (4+7\sigma+2\sigma^2)\frac{f_3}{\sigma}\Bigg\}.$$

Для коэффициента $u_{1,2}$ имеем

$$u_{1,2} = \frac{\mp 1}{(8+8/\sigma^2+18/\sigma)f_1\sqrt{\sigma f_1}}\Big\{\frac{1}{(3+4/\sigma)f_1}\Big[\pm(2+2\sigma)\frac{f_2^2}{\sigma}\sqrt{\sigma f_1} -$$

$$\pm(4+4\sigma)\frac{1}{R}\frac{f_1 f_2}{\sigma}\sqrt{\sigma f_1} - 6\frac{1}{R}f_1 f_2 + (24+30\sigma+6\sigma^2)\frac{1}{R}f_1^2 f_2 - (4+12\sigma)\frac{1}{R^2}f_1^3 -$$

$$\pm 18\frac{1}{R^2}f_1^2\sqrt{\sigma f_1} \mp (24+24\sigma)\frac{1}{R^2}\frac{f_1^3}{\sigma}\sqrt{\sigma f_1}\Big] +$$

$$+\frac{1}{(3+4/\sigma)^2 f_1^2}\Big[\pm(32+60\sigma+38\sigma^2+8\sigma^3)\frac{f_1 f_2^2}{\sigma^3}\sqrt{\sigma f_1} -$$

$$-(16-20\sigma-8\sigma^2)\frac{1}{R^2}\frac{f_1^4}{\sigma^2} - (48+48\sigma+12\sigma^2)\frac{1}{R}\frac{f_1^3 f_2}{\sigma^2} -$$

$$-(48+96\sigma+60\sigma^2+12\sigma^3)\frac{1}{R}\frac{f_1^2 f_2}{\sigma^2} \pm (48+72\sigma+24\sigma^2)\frac{1}{R^2}\frac{f_1^3}{\sigma^2}\sqrt{\sigma f_1}\Big] +$$

$$+(2+2\sigma)\frac{1}{R}f_1 f_2 \mp (2+2\sigma)\frac{f_3}{\sigma}\sqrt{\sigma f_1} \mp 4\frac{1}{\nu R^2}\frac{f_1^2}{\sigma}\sqrt{\sigma f_1}\Big\}.$$

И, наконец, для $u_{0,3}$ получаем формулу

$$u_{0,3} = \frac{\mp 1}{(8+8/\sigma^2+18/\sigma)f_1\sqrt{\sigma f_1}}\Big\{\frac{1}{(3+4/\sigma)f_1}\Big[f_2^2 + 2\frac{1}{R}f_1 f_2 \pm$$

$$\pm(24+15\sigma)\frac{1}{R}\frac{f_1 f_2}{\sigma}\sqrt{\sigma f_1} \mp 6\frac{1}{R^2}f_1^2\sqrt{\sigma f_1} - (48+36\sigma)\frac{1}{R^2}f_1^3\Big] +$$

$$+\frac{1}{(3+4/\sigma)^2 f_1^2}\Big[(8+8\sigma+2\sigma^2)\frac{f_1 f_2}{\sigma^2} \mp (8+4\sigma)\frac{1}{R}\frac{f_1^2 f_2^2}{\sigma^2}\sqrt{\sigma f_1} +$$

$$+(16+20\sigma+6\sigma^2)\frac{f_1 f_2^2}{\sigma^2} + (104+120\sigma+36\sigma^2)\frac{1}{R^2}\frac{f_1^4}{\sigma} \mp$$

$$\mp(88+104\sigma+30\sigma^2)\frac{1}{R}\frac{f_1^2 f_2}{\sigma^2}\sqrt{\sigma f_1}\Big] -$$

$$-f_3 \pm \frac{1}{R}f_2\sqrt{\sigma f_1} - (10+8\sigma)\frac{1}{\nu R^2}f_1^2\Big\}.$$

Построенный отрезок ряда (4.1) сравним с точным решением уравнения (1.1) вида

$$u = \pm\frac{\rho^2}{C \mp \alpha t} \mp \frac{C^{\beta-1}(\nu R)^2}{(C \mp \alpha t)^\beta}, \tag{5.2}$$

где $\alpha = 2 + 2\nu + 4/\sigma$, $\beta = (2 + 2\nu)/\alpha$; $C > 0$ — произвольная константа. Решение (5.2) является аналогом известного [15] плоскосимметричного ($\nu = 0$) и было получено авторами с использованием метода неопределенных коэффициентов.

Прямым дифференцированием точного решения получим его тейлоровские коэффициенты (для определенности примем $C = 1, \nu = R = 1$ и рассмотрим движение тепловой волны во внешнюю область)

$$u_{1,0} = f_1 = \alpha(1-\beta) = 4/\sigma,\ u_{0,1} = -2,$$

$$u_{2,0} = f_2 = -\frac{16(3\sigma+2)}{\sigma^2},\ u_{1,1} = \frac{8(\sigma+1)}{\sigma},\ u_{0,2} = -2. \tag{5.3}$$

Можно убедиться, что формулы (5.1) при подстановке конкретных значений f_1, f_2 примут вид (5.3).

Формулы для коэффициентов третьего порядка для (5.2) имеют вид

$$u_{3,0} = f_3 = \frac{64(11\sigma^2+16\sigma+6)}{\sigma^3},\ u_{2,1} = -\frac{64(\sigma+1)^2}{\sigma^2},$$

$$u_{1,2} = \frac{8(\sigma+1)}{\sigma},\ u_{0,3} = 0.$$

В данном случае авторами также установлено соответствие коэффициентов построенного ряда и разложения точного решения в ряд Тейлора.

Самостоятельное значение метода степенных рядов как способа численных расчетов не столь уж велико из-за ограниченности радиуса сходимости, однако этот подход зачастую позволяет (как в данном случае) раскрыть особенность, чтобы далее использовать стандартные приемы (например, разностные схемы). Кроме того, ряды можно использовать для верификации численных расчетов, выполненных с помощью других подходов, например, конечноэлементного или граничноэлементного [7; 10; 20].

6. Заключение

Подводя итог проведенного исследования отметим, что в статье рассмотрена задача с вырождением специального вида для нелинейного параболического уравнения, которое при выполнении дополнительного условия (параметр ν — целое неотрицательное число) становится уравнением теплопроводности в случае, когда искомая функция зависит от двух переменных: времени и расстояния до начала координат (в частности, в полярных и сферических координатах), и тогда она может быть интерпретирована как задача об инициировании тепловой волны краевым режимом, заданном на сфере в пространстве $\mathbb{R}^{\nu+1}$.

Для рассмотренной задачи построены решения в виде кратных рядов по степеням физических переменных, коэффициенты которых определяются при решении трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений. При этом элементы матриц систем зависят от их порядка, и не выполняется условие диагонального преобладания. Для коэффициентов рядов получены рекуррентные формулы. Проведена проверка правильности полученных формул путем сравнения с точным решением.

Авторы признательны А.А. Косову за полезные замечания и обсуждения.

Список литературы

1. Баренблатт Г. И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. – М. : Недра, 1972. – 288 с.
2. Баутин С. П. Аналитическая тепловая волна / С. П. Баутин. – М. : Физматлит, 2003. – 88 с.
3. Баутин С. П. Обобщенная задача Коши и ее приложения / С. П. Баутин, А. Л. Казаков. – Новосибирск, 2006. – 397 с.
4. Зельдович Я. Б. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры / Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец // Сборник, посвященный 70-летию А.Ф. Иоффе. – 1950. – С. 61–71.
5. Казаков А. Л. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае цилиндрической и сферической симметрии / А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов // Вестник УрГУПС. – 2013. – № 4. – С. 4–10.
6. Казаков А. Л. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных / А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов // Сиб. журн. индустр. математики. – 2014. – С. 46–54.
7. Казаков А. Л. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах / А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов, Л. Ф. Спевак // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 119–129.
8. Казаков А. Л. Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт // Вычисл. технологии. – 2012. – Т. 17, № 1. – С. 57–68.
9. Казаков А. Л. О существовании и единственности решения краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт // Прикл. механика и техн. физика. – 2013. – Т. 54, № 2(318). – С. 97–105.
10. Казаков А. Л. Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации / А. Л. Казаков, Л. Ф. Спевак // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 2–17.
11. Кузнецов П. А. О краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности с данными на замкнутой поверхности / П. А. Кузнецов // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2014. – Т. 9. – С. 61–74.
12. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – М. : Наука, 1967. – 736 с.
13. Лейбензон Л. С. Собрание трудов. Т. 2. Подземная газогидродинамика / Л. С. Лейбензон. – М. : Изд-во АН СССР, 1953. – 544 с.
14. Олейник О. А. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации / О. А. Олейник, А. С. Калашников, Юй-линь Чжоу // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1958. – Т. 22, вып. 5. – С. 667–704.

15. Полянин А. Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. – М. : Физматлит, 2002. – 432 с.
16. Рудых Г. А. Неавтомодельные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии / Г. А. Рудых, Э. И. Семенов // Мат. заметки. – 2000. – Т. 67, № 2. – С. 250–256.
17. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика / А. Ф. Сидоров. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с.
18. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.
19. Vazquez J. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory / J. Vazquez // Oxford: Clarendon Press, 2007. 648 p.
20. Kazakov A. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form / A. Kazakov, L. Spevak // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, N 10-11. – P. 6918–6928.

Казаков Александр Леонидович, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)453033 (e-mail: kazakov@icc.ru)

Кузнецов Павел Александрович, аспирант, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)242214
(e-mail: pav_ku@mail.ru)

Лемперт Анна Ананьевна, кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)453030 (e-mail: lempert@icc.ru)

A. L. Kazakov, P. A. Kuznetsov, A. A. Lempert

On Construction of Heat Wave for Nonlinear Heat Equation in Symmetrical Case

Abstract. The nonlinear second-order parabolic equation with two variables is considered in the article. Under the additional conditions, this equation can be interpreted as the nonlinear heat equation (the porous medium equation) in case of dependence of the unknown function on two variables (time and origin distance). The equation has many applications in continuum mechanics, in particular, it is used for mathematical modeling of filtration of ideal polytropic gas in porous media. The authors research a special class of solutions which are usually called a "heat wave"in literature. The special feature of these solutions is that they are "sewn"together of two continuously butt-joined solutions (trivial and nonnegative). The solution of heat wave's type can has derivative discontinuity on the line of joint which is called as the heat wave's front (the front of filtration), i.e. smoothness of the solution, generally speaking, is broken. The most natural problem which has the solutions of this kind is so-called "the Sakharov problem of the initiation of a heat wave". New solutions of this problem in kind of multiple power series in physical variables were constructed in the article. The coefficients of the series are determined from tridiagonal systems of linear algebraic equations. Herewith, the elements of matrixes of systems depend on the order of the matrixes and the condition of the diagonal dominance is not executed. The recurrent formulas of the coefficients were obtained.

Keywords: partial differential equations, porous medium equation, heat wave, power series.

References

1. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhyk V.M. The Theory of Unsteady Filtration of Liquid and Gas. Fort Belvoir, Defense Technical Information Center, 1977. 476 p.
2. Bautin S.P. Analytic Heat Wave (in Russian). Moscow, Fizmatlit, 2003. 88 p.
3. Bautin S.P., Kazakov A.L. Generalized Cauchy Problem with Applications (in Russian). Novosibirsk, Nauka, 2006. 397 p.
4. Zel'dovich Ya.B., Kompaneets A.S. Towards a Theory of Heat Propagation with Heat Conductivity Depending on Temperature (in Russian). *Sbornik, posv. 70-letiyu Ioffe*, 1950, pp. 61–71.
5. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On One Boundary Value Problem for a Nonlinear Heat Equation in Case of cylindrical and spherical symmetry (in Russian). *Vestnik UrGUPS* 2013, no 4, pp. 4–10.
6. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On One Boundary Value Problem for a Nonlinear Heat Equation in the Case of Two Space Variables. *J. Appl. Ind. Math.*, 2014, vol. 8, no 2, pp. 227–236.
7. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. On a Degenerate Boundary Value Problem for the Porous Medium Equation in Spherical Coordinates (in Russian). *Trudy IMM UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 119–129.
8. Kazakov A.L., Lempert A.A. Analytical and Numerical Studies of the Boundary Value Problem of a Nonlinear Filtration with Degeneration (in Russian). *Vych. tehnologii*, 2012, vol. 17, no 1, pp. 57–68.
9. Kazakov A.L., Lempert A.A. Existence and Uniqueness of the Solution of the Boundary-Value Problem for a Parabolic Equation of Unsteady Filtration. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no 2, pp. 251—258.
10. Kazakov A.L., Spevak L.F. Boundary Elements Method and Power Series Method for One-dimensional Non-linear Filtration Problems (in Russian). *Izvestiya IGU. Ser.: Mat.*, 2012, vol. 5, no 2, pp. 2–17.
11. Kuznetsov P.A. On Boundary Value Problem with Degeneration for a Nonlinear Heat Equation with Data on Closed Surface (in Russian). *Izvestiya IGU. Ser.: Mat.*, 2014, vol. 9, pp. 61–74.
12. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Transl. Math. Monographs, Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, 1968.
13. Leybenzon L.S. Collected Works. Vol. 2. Underground Gas- and Hydrodynamics (in Russian). Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1953. 544 p.
14. Oleynik O.A., Kalashnikov A.S., Chzou Yu.-L. The Cauchy Problem and Boundary Value Problems for Equations of the Type of Unsteady Filtration (in Russian). *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem.*, 1958, vol. 22, no 5, pp. 667–704.
15. Polyanin A.D., Zaytsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential. Boca Raton–London, Chapman & Hall/CRC Press, 2012. 803 p.
16. Rudykh G.A., Semenov E.I. Non-self-similar Solutions of Multidimensional Nonlinear Diffusion Equations. *Math. Notes*, 2000, vol. 67, no 2, pp. 200–206.

17. Sidorov A.F. Selected Works: Mathematics. Mechanics (in Russian). Moscow, Fizmatlit, 2001, 576 p.
18. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Equations of Mathematical Physics (in Russian). Moscow, Izd-vo MGU, 1999. 798 p.
19. Vazquez J.L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford, Clarendon Press, 2007. 648 p.
20. Kazakov A.L., Spevak L.F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, no. 10–11, pp. 6918–6928.

Kazakov Alexandr Leonidovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Head of laboratory, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: (3952)453033
(e-mail: kazakov@icc.ru)

Kuznetsov Pavel Alexandrovich, Postgraduate, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952)242214
(e-mail: pav_ku@mail.ru)

Lempert Anna Anan'evna, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Head of laboratory, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: (3952)453030
(e-mail: lempert@icc.ru)