С. В. Востоков, И. Б. Жуков, И. Б. Фесенко, К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции, *Алгебра и анализ*, 1990, том 2, выпуск 4, 91–118

С.В.Востоков, И.Б.Жуков, И.Б.Фесенко

К ТЕОРИИ МНОГОМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ. МЕТОДЫ И КОНСТРУКЦИИ

Ряд результатов, известных для обычных локальных полей, обобщается на многомерный случай. Приводится новое доказательство теоремы об описании абелевых расширений показателя p. С помощью явной формулы для обобщенного символа Гильберта дается конструктивное доказательство теоремы существования и осуществляется построение высшей локальной теории полей классов.

Напомним основные определения, связанные с локальными и глобальными полями (см. [1-3]). Дискретное нормирование (показатель) в поле F - это сюръективное отображение $v:F^*\to\mathbb{Z}$ со свойствами:

1. $v(xy) = v(x) + v(y)$ для любых $x,y\in F^*$;
2. $v(x+y) \geq \min (v(x), v(y))$ для любых $x,y\in F^*$ (принято считать $v(0) = \infty$).

С каждым дискретным нормированием связана метрика в поле F, определяемая формулой $\rho(x,y) = \exp(-v(x-y))$. Далее, определено кольцо нормирования $\mathfrak{O}_F = \{x\in F: v(x) \geq 0\}$. Это локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}_F = \{x\in F: v(x) > 0\} = \pi_F\mathfrak{O}_F$, где π_F - любой элемент с $v(\pi_F) = 1$ (так называемый простой или униформизирующий элемент).

Поле вычетов $\mathfrak{O}_F/\mathfrak{m}_F$ обозначается через $\overline{F}$.

Примером поля с дискретным нормированием может служить поле формальных рядов Лорана $F((t))$ над некоторым полем F. Элементами $F((t))$ служат ряды вида $\sum_{i=c}^{\infty} a_i t^i$, где $c\in\mathbb{Z}$, $a_i\in F$. Показатель задается формулой $v(\sum_{i=c}^{\infty} a_i t^i) = \inf\{i: a_i\neq 0\}$. Имеем $\mathfrak{O}_{F((t))}=F[[t]]$, $\mathfrak{m}_{F((t))}=tF[[t]]$, $\overline{F((t))}$ изоморфно F.

Локальное поле представляет собой поле с дискретным нормированием, полное относительно соответствующей метрики и имеющее конечное поле вычетов. Для этих полей существует простая классификация (см., например, [4]). А именно, каждое локальное поле характеристики 0 (числовое локальное поле) с полем вычетов характеристики p является конечным расширением поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Локальные поля характеристики p (функциональные локальные поля) суть поля

Ключевые слова: многомерные локальные поля, абелевы расширения, уравнение Артина-Шрайера, локальная теория полей классов, теорема существования, топологическая группа Милнора, явные формулы, символ Гильберта.

$\mathbb{F}_{p^j}((t))$, где $\mathbb{F}_{p^j}$ - конечное поле из p^j элементов.

Среди полей с дискретным нормированием полные поля во многих отношениях ведут себя наиболее просто. С другой стороны, локальные поля возникают как пополнения глобальных полей - полей алгебраических чисел и полей рациональных функций над конечными полями. Благодаря этому теория локальных полей служит инструментом при решении „глобальных" задач.

Одной из вершин классической алгебраической теории чисел является локальная и глобальная теория полей классов, описывающая абелевы расширения поля в терминах самого поля или группы иделей поля (см. [1,2,4,5]). Такое описание позволяет использовать локальные и глобальные поля в качестве „полигона" для опробования различных гипотез алгебраической геометрии и алгебраической K-теории, а также в качестве „строительного материала" для доказательства различных теорем, относящихся к гораздо более широкому классу полей (см., например, доказательство теоремы о норменном вычете Меркурьева-Суслина [6]).

С середины 70-х годов появились работы А. Паршина и К. Като, в которых изучается еще один „хороший" класс полей - многомерные локальные поля. Полное относительно дискретного нормирования поле называется n-мерным локальным, если его поле вычетов является $(n-1)$-мерным локальным, при этом обычные локальные поля считаются одномерными. Таким образом, с каждым n-мерным локальным полем связана цепочка многомерных полей: $F = k^{(n)}$, $k^{(n-1)},\dots,k^{(1)}$, $k^{(0)}=\mathbb{F}_q$, где $k^{(i)}$ - поле вычетов $k^{(i+1)}$, $\mathbb{F}_q$ - конечное поле из $q = p^f$ элементов.

Подъемом простых элементов полей $k^{(i)}$ в поле F получаем так называемую систему локальных параметров $(t_n, t_{n-1},\dots,t_1)$. Любой элемент многомерного поля можно разложить в ряд по t_n, $t_{n-1},\dots,t_2$ с коэффициентами из подъема элементов поля $\mathbb{F}_q$ в F. Имеются три разных типа многомерных локальных полей (А. Паршин [7]): поля вида $\mathbb{F}_q((t_1))\dots((t_n))$, поля вида $k((t_2))\dots((t_n))$, где k - числовое локальное поле, и, наконец, поля, являющиеся конечными расширениями полей вида $k\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_\ell\}\}((t_{\ell+2}))\dots(t_n))$, и которые одновременно содержатся в полях этого же вида.

Поясним использованное обозначение. Если k - дискретно нормированное поле с нормированием v, то через $k\{\{t\}\}$ обозначается поле рядов $\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} a_i t^i$ с коэффициентами из поля k, удовлетворяющими двум условиям $v(a_i) \longrightarrow +\infty$ при $i \longrightarrow -\infty$ и $v(a_i)\ge c$ для некоторого c и всех i. При этом дискретное нормирование в $k\{\{t\}\}$ переносится из k, а именно $v\left(\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} a_i t^i\right)$ определяется как $\min\limits_i v(a_i)$. Полем вычетов $k\{\{t\}\}$ служит $\bar{k}((t))$, где $\bar{k}$ - поле вычетов k.

Как известно, обычная локальная теория полей классов устанавливает соответствие между абелевыми расширениями локального поля k и подгруппами в группе k^*. Замечательным свойством многомерных локальных полей является существование обобщения такого соответствия на абелевы расширения n-мерного локального поля F. Именно эти расширения соответствуют подгруппам в K-группе Милнора $K_n(F)$ (напомним, что $K_1(F)=F^*$, $K_n(F)=\underbrace{(F^*\otimes\ldots\otimes F^*)}_{n\ \text{раз}}/I^-$, где $\mathbb{Z}$-подмодуль I порожден элементами вида $x_1\otimes\ldots\otimes x_n$, $x_i+x_j=1$ для некоторых $i\neq j$). Заметим, что общая теория полей классов многомерных локальных полей является очень сложной и опирается на использование глубоких методов алгебраической K-теории (К. Като [8-10]). Вместе с тем для многомерных локальных полей ненулевой характеристики (полей первого типа) имеется достаточно простое изложение теории полей классов (А. Паршин [11]), основанное на существовании „хороших" символьных гомоморфизмов. Оказывается, что более точно абелевы расширения таких полей описываются подгруппами в топологической K-группе

$$K_n^{\mathrm{top}}(F) = K_n(F)/\Lambda_n(F),$$

где $\Lambda_n(F)$ есть пересечение всех окрестностей нуля в некоторой топологии группы $K_n(F)$, связанной с топологией F (см. ниже, § 1 и 3).

Метод А. Паршина интересен еще и тем, что построение теории полей классов является естественным и наглядным. Подобная задача - создание более понятного изложения в обычной локальной теории полей классов - являлась целью многих математиков в последнее время. Современное общепринятое изложение этой теории [1,2,5] опирается на вычисление групп когомологий и носит во многом технический характер. В книге А. Вейля [12] развивается другой подход, основанный на использовании аналитических соображений и изучении ζ-функции. Ю. Нойкирх [13] выводит теорию полей классов элементарным теоретико-групповым способом из некоторых первоначальных предположений о строении младших когомологических групп. М. Хазевинкель [14] осуществляет построение теории вообще без использования когомологических групп.

В данной работе наряду с другими рассматривается вопрос о конструктивном построении теории полей классов для разнохарактеристических локальных полей (т.е. полей характеристики 0 с полем вычетов положительной характеристики) на примере двумерных локальных полей. Поля такого вида являются как бы обобщением числовых локальных полей на многомерный случай. Метод А. Паршина на эти поля не переносится, и для развития теории в этом случае используется, в частности, явная формула для символа Гильберта в многомерном поле [15]. Для обычного локального поля k, содержащего первообразный корень N-й степени из единицы, он определяется так: элементам α и β мультипликативной группы k^* поля ставится в соответствие корень N-й степени из единицы по формуле

$$(\alpha,\beta)_H = (\sqrt[N]{\beta})^{\sigma_\alpha} / \sqrt[N]{\beta},$$

где σ_α - автоморфизм максимального абелева расширения k^{ab} над полем k, соответствующий элементу α в силу локальной теории полей классов. Задача нахождения явной формулы для символа Гильберта, т.е. такой формулы, которая позволяет вычислить $(\alpha,\beta)_H$ по разложению элементов α и β в ряд по простому элементу π поля k, связана с решением девятой проблемы Гильберта о нахождении общего закона взаимности и разрабатывалась И. Р. Шафаревичем [16]. Решение этой задачи для числовых локальных полей с полем вычетов характеристики $p>0$ и $N=p^n$ и ее обобщения с помощью формальных групп Любина-Тэйта получено С. Востоковым [17-19] в случае $p>2$ и И. Фесенко [20, 21] в частном случае $p=2$.

Отличительной особенностью этой формулы для символа Гильберта является ее переносимость на разнохарактеристические многомерные локальные поля. Эта формула была указана С. Востоковым [15] и может быть использована для решения многих вопросов в теории локальных полей.

В данной работе рассмотрены несколько методов и конструкций в многомерных локальных полях. В § 1 даются определение и изучение топологических свойств многомерных локальных полей. С помощью формальной группы Любина-Тэйта $G_0(X,Y)$ (см., например, [1]) над кольцом целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ с эндоморфизмом $[p]_0(X)=pX+X^p$ можно определить структуру $\mathbb{Z}_p$-модуля $G_0(\mathfrak{m})$ на максимальном идеале $\mathfrak{m}$ n-мерного локального поля F, положив

$$x +_{G_0} y = G_0(x,y), \qquad x,y \in \mathfrak{m};$$
$$ax = [a]_0 x, \qquad a \in \mathbb{Z}_p, \quad x \in \mathfrak{m}.$$

В § 1 содержится описание арифметики $\mathbb{Z}_p$-модуля $G_0(\mathfrak{m})$. § 2 посвящен изучению расширений Артина-Шрайера многомерных локальных полей.

Для обычных локальных полей известно описание абелевых расширений показателя p с помощью уравнений Артина-Шрайера. Здесь такое описание обобщается на многомерные локальные поля. Результаты, покрывающие приведенные здесь, иным способом были получены Маккензи и Уэплсом [22].

Расширения Артина-Шрайера суть расширения $F(x)/F$, где x - корень уравнения $X^p-X=a$ с определенными ограничениями на элемент a, p - характеристика последнего поля вычетов n-мерного локального поля F. Такие расширения являются циклическими (предложение 2) и описывают почти все расширения показателя p поля F. Именно если F - поле нулевой характеристики и первообразный корень ζ_p содержится в F, то его максимальное абелево расширение показателя p получается присоединением p-х корней из простых параметров поля F и корней всех уравнений Артина-Шрайера (предложение 5). Еще одна конструкция, которая позволяет получить некоторый класс абелевых расширений многомерных локальных полей, описывается в [23].

В § 3 рассматривается вопрос о конструктивном построении теории полей классов для разнохарактеристических локальных полей (на примере двумерного локального поля). Для развития теории полей классов в этом случае используются, во-первых, существование гомоморфизма h_F из некоторой когомологической группы в группу $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, построенного К. Като [8], и, во-вторых, явная формула для символа Гильберта в многомерном локальном поле [15].

Гомоморфизм $h_F\colon \varinjlim H^3(F,\mu_m\otimes\mu_m) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ позволяет определить каноническое спаривание

$$K_2(F) \times X(F) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

где $X(F)$ - группа непрерывных характеров Gal (F^{ab}/F), а описание топологии группы $K_2(F)$ (И. Фесенко [24]) показывает, что в каноническом спаривании группу $K_2(F)$ можно заменить на $k_2^{top}(F)$. С каноническим спариванием в силу теории двойственности связано отображение взаимности

$$\Psi_F : K_2^{top}(F) \longrightarrow \mathrm{Gal}\ (F^{ab}/F).$$

Структура группы $K_2^{top}(F)$ [24], явные формулы для ручного символа [25] и символа Гильберта позволяют в конечном счете доказать невырожденность справа канонического спаривания, откуда следует, что образ гомоморфизма взаимности всюду плотен в Gal (F^{ab}/F). Из доказываемой также инъективности Ψ_F следует основная теорема теории полей классов - теорема существования: каждая открытая подгруппа конечного индекса в $K_2^{top}(F)$ является норменной, т.е. имеет вид $N_{L/F}K_2^{top}(L)$ для некоторого конечного расширения L/F; теорема об изоморфизме: если L/F - абелево расширение, то отображение взаимности индуцирует изоморфизм групп

$$K_2^{top}(F)/N_{L/F}\ K_2^{top}(L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}\ (L/F);$$

теорема единственности: если L_1, L_2 - абелевы расширения поля F, то L_1 совпадает с L_2 тогда и только тогда, когда

$$N_{L_1/F}\ K_2^{top}(L_1) = N_{L_2/F}\ K_2^{top}(L_2).$$

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $F=k^{(n)}$, $k^{(n-1)},\dots,k^{(1)}$, $k^{(0)}=\mathbb{F}_q$ - цепочка полей, причем $k^{(i)}$ при $1\le i\le n$ является полным дискретно нормированным полем с полем вычетов $k^{(i-1)}$. Тогда F называется n-мерным локальным полем. Пусть t_n - простой элемент относительно дискретного нормирования в поле F; t_{n-1} - единица в поле F, которая в поле $k^{(n-1)}$ является простым элементом относительно дискретного нормирования $k^{(n-1)};\dots;$ t_1 - единица в F, $k^{(n-1)},\dots,k^{(2)}$, которая при переходе к предпоследнему полю вычетов $k^{(1)}$ становится простым элементом относительно дискеретного нормирования $k^{(1)}$. Набор $t_n,\dots,t_1$ называется системой локальных параметров поля F. Эта система определяет в F нормирование ранга n

$$\bar{v}_F = \bar{v} = (v_1,\dots,v_n) : F^* \longrightarrow \mathbb{Z}^n,$$

где

$$v_i(a) = v_{k^{(i)}}\left(a/\overline{\left(t_n^{v_n(a)}\dots t_{i-1}^{v_{i+1}(a)}\right)}\right) \text{ для } 1\le i<n;$$

$$v_n(a) = v_{k^{(n)}}(a)$$

(группу $\mathbb{Z}^n$ считаем лексикографически упорядоченной: $(i_1,\dots,i_n)<(j_1,\dots,j_n)$, если для наибольшего индекса ℓ, для которого $i_\ell \ne j_\ell$, выполняется $i_\ell<j_\ell$).

Нормирование $\bar{v}'$ ранга n, соответствующее другой системе локальных параметров, связано с нормированием $\bar{v}$ формулой

$$\bar v'(a) = \bar v(a)H \text{ для всех } a \in F^*,$$

где $H\in GL_n(\mathbb{Z})$ - нижнетреугольная матрица с единицами по главной диагонали.

Совокупность элементов $a\in F^*$, удовлетворяющих условию $\bar v(a)\geq 0$, образует независящее от выбора системы локальных параметров кольцо нормирования $\mathfrak{O}_F=\mathfrak{O}$. Единственным максимальным идеалом этого кольца является

$$\mathfrak{m}_F = \mathfrak{m} = \{a \in \mathfrak{O}_F : \bar v(a) > 0\}.$$

Через $\mathfrak{p}_F(r_\ell,\dots,r_n) = \mathfrak{p}(r_\ell,\dots,r_n)$, где $1\leq\ell\leq n$, обозначаем множество элементов a поля F, для которых $(v_\ell(a),\dots,v_n(a)) \geq (r_\ell,\dots,r_n)$. Если $(r_\ell,\dots,r_n)$ лексикографически больше набора из $n-\ell+1$ нулей, это множество является идеалом в $\mathfrak{O}_F$, и все идеалы $\mathfrak{O}_F$ имеют такой вид. Подробное обсуждение нормирований в многомерных полях содержится в [26].

Если поле $k^{(0)}$ содержит $q = p^f$ элементов, то группа корней $(q-1)$-й степени из единицы $\mathcal{R}$ в поле F содержит $q-1$ элемент.

Структура n-мерного локального поля на F однозначно определяет подобную структуру на конечном расширении L/F. Из классификационной теоремы А. Паршина [25] следует, что n-мерное локальное поле F при $n\geq 2$ либо является полем $\mathbb{F}_q((t_1))\dots(t_n))$, либо содержится в поле $k\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{j-1}\}\}((t_{j+1}))\dots((t_n))$, $1\leq j\leq n$, где k - числовое локальное поле.

Определим топологию аддитивных групп этих полей, соответствующую нормированию ранга n. На одномерных полях вводится обычная топология дискретного нормирования. В поле $F((t))$ в качестве базы окрестностей нуля берутся подгруппы вида

$$U = \left\{\sum a_j t^j,\ a_j \in U_j\right\},$$

где $(U_j)_{j=-\infty}^{+\infty}$ - система открытых подгрупп F такая, что $U_{j-1}\subseteq U_j$ для всех j, и $U_j=F$, начиная с некоторого j. В поле $L=F\{\{t\}\}$, где $F=k\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{i-1}\}\}$, в качестве базы окрестностей нуля берутся подгруппы вида

$$U = \left\{\sum a_j t_i^j,\ a_j \in U_j \right\},$$

где $(U_j)_{j=-\infty}^{+\infty}$ - система множеств поля L, являющихся подъемом в L открытых подгрупп $\bar U_j$ поля вычетов $\bar L=\mathbb{F}_q((t_1))\dots((t_{i-1}))((t))$, $\bar U_{j-1}\subseteq \bar U_j$ для всех j, $\bar U_j=\bar L$, начиная с некоторого j (при подъеме элементы поля $\mathbb{F}_q$ переходят в элементы множества $\mathcal{R}\cup\{0\}$). Эквивалентная топология получится, и если в качестве базы окрестностей нуля брать подгруппы $U=\left\{\sum a_j t^j, a_j\in U_j\right\}$, где $(U_j)_{j=-\infty}^{+\infty}$ - открытые подгруппы в F такие, что $U_{j-1}\subseteq U_j$ для всех j, при некотором i_0 множество $\mathfrak{p}_F(i_0)$ лежит во всех U_j, любое $\mathfrak{p}_F(i)$ лежит во всех U_j, начиная с некоторого $j(i)$.

Наконец, в случае, когда n-мерное локальное поле F содержится в поле $k\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}$, на аддитивной группе F вводится индуцированная топология. Известно, что она не зависит от вложения и выбора локальных параметров [11]. При этом аддитивная группа поля F является полной отделимой группой в этой топологии и умножение секвенциально непрерывно: если $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow y$, то $x_n y_n \longrightarrow xy$.

Через $\mathbb{Z}_p[[X]]_0$ будем обозначать совокупность рядов из $\mathbb{Z}_p[[X]]$ без свободного члена.

Л е м м а 1. *Пусть F – многомерное локальное поле.*

1. *Если $f\in\mathbb{Z}_p[[X]]_0$, $s\in\mathfrak{m}$, то ряд $f(s)$ сходится в $\mathfrak{m}$.*
2. *Если $f,g\in\mathbb{Z}_p[[X]]_0$, $s\in\mathfrak{m}$, то $(f\circ g)(s)=f(g(s))$.*

З а м е ч а н и е. Аналогичные утверждения верны и для рядов от нескольких переменных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $f(X) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n$, $c_n\in\mathbb{Z}_p$. Так как для $s\in\mathfrak{m}$ имеем $s^n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow +\infty$, то и $c_n s^n \longrightarrow 0$. Ввиду полноты F ряд $f(s)$ сходится, а ввиду замкнутости $\mathfrak{m}$ в F получаем, что $f(s)\in\mathfrak{m}$.

2. Если h – некоторый ряд, то через h_n обозначим многочлен, составленный из членов степени $\le n$ ряда h. Имеем

$$A_1 = (f\circ g)(s) = \lim (f\circ g)_n(s);$$

$$A_2 = f(g(s)) = \lim f_n(g(s)) = \lim f_n(\lim g_m(s)) =$$

$$= \lim \lim f_n(g_m(s)) = \lim \lim (f_n\circ g_m)(s).$$

Предпоследнее равенство следует из секвенциальной непрерывности умножения в F.

Пусть U – открытая подгруппа в F. Выберем N такое, что при $n\ge N$

$$s^n \in U,\ (f\circ g)_n(s) \in A_1+U,\ \lim_{m\longrightarrow\infty} (f_n\circ g_m)(s) \in A_2 + U.$$

Возьмем $M\ge N$ такое, что при $m\ge M$

$$(f_n\circ g_m)\ (s) \in A_2 + U.$$

Тогда из соотношения

$$(f_n\circ g_m)\ (s) - (f\circ g)_n(s) = \sum_{i=N}^{nm} d_i s^i, \text{ где } d_i \in \mathbb{Z}_p,$$

следует, что

$$(f_n\circ g_m)\ (s) - (f\circ g)_n(s) \in U.$$

Отсюда $A_1=A_2$. Лемма доказана.

Набор мультииндексов $I\subset\mathbb{Z}^n$ будем называть допустимым, если для любых $i_n,\dots,i_{\ell+1}$ $(1\le\ell\le n)$ найдется целое число i такое, что из $r_n=i_n,\dots,r_{\ell+1}=i_{\ell+1}$, $\bar r\in I$, следует $r_\ell\ge i$.

Л е м м а 2. *Пусть B – произвольная система представителей $\mathbb{F}_q$ в F. Любой элемент $s\in F$ можно однозначно представить в виде суммы ряда*

$$s = \sum_{\bar r\in I} \alpha_{\bar r} t_n^{r_n} \dots t_1^{r_1}\ , \qquad (1)$$

где I – допустимый набор, $\alpha_{\bar r}\in B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводится индукцией по размерности поля F с использованием непрерывности отображения вычета $F = k^{(n)} \longrightarrow \bar F = k^{(n-1)}$. Отметим, что для любой окрестности нуля U и любого допустимого набора I найдется лишь конечное число $\bar{r}\in I$ таких, что $\alpha_{\bar{r}}\, t_n^{r_n}\dots t_1^{r_1}\notin U$. Поэтому любой ряд вида (1) сходится.

Введем обозначение $\mathbb{Z}_+^n=\{\bar{r}\in\mathbb{Z}^n:\bar{r}>0\}$. Допустимые наборы обладают следующими свойствами.

1. Если $I\subset\mathbb{Z}_+^n$ - допустимый набор, то любой элемент $\mathbb{Z}_+^n$ можно лишь конечным числом способов представить в виде конечной суммы элементов I.

2. Если $I\subset\mathbb{Z}_n^+$ - допустимый набор, то

$$\hat{I}=\left\{\sum_{j=1}^{m}\bar{r}_j,\ \bar{r}_j\in I,\ m\ge 1\right\}$$

- также допустимый набор.

Через $G_0(X,Y)$ обозначим формальную группу Любина-Тэйта над $\mathbb{Z}_p$ с эндоморфизмом $[p]_0(X)=pX+X^p$, через $G_m(X,Y)$ - мультипликативную формальную группу Любина-Тэйта - $G_m(X,Y)=X+Y+XY$. Пусть $f_G(X)=X+\dots$ - изоморфизм формальных групп $G_m\xrightarrow{\sim}G_0$ (см., например, [1],[4]). Формальная группа G_0 индуцирует структуру $\mathbb{Z}_p$-модуля $G_0(\mathfrak{m})$ на максимальном идеале $\mathfrak{m}$:

$$\alpha\underset{G_0}{+}\beta=G_0(\alpha,\beta),\qquad \alpha,\beta\in\mathfrak{m};$$

$$a\alpha=[a]_0(\alpha),\qquad a\in\mathbb{Z}_p,\ \ \alpha\in\mathfrak{m},$$

где $[a]_0$ - эндоморфизм формальной группы, соответствующий элементу a.

Предположим, что $\mathbb{F}_q=A_1\oplus\dots\oplus A_d$ как аддитивная группа. Обозначим через $\mathcal{R}_i\,(1\le i\le d)$ подмножество в $\mathcal{R}$, состоящее из тех элементов, вычеты которых лежат в A_i.

П р е д л о ж е н и е 1. *$s\in\mathfrak{m}$ можно представить в виде*

$$s=\sum_{\substack{\bar{r}\in I\\ 1\le i\le d}}{}_{G_0}\ \theta_{\bar{r},i}\,t_n^{r_n}\dots t_1^{r_1},\tag{2}$$

где $I\subset\mathbb{Z}_+^n$ - допустимый набор, $\theta_{\bar{r},i}\in\mathcal{R}_i\cup\{0\}$, $\sum_{G_0}$ означает суммирование с помощью формальной группы G_0.

2. *Любой ряд вида* (2) *сходится в $\mathfrak{m}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим сначала второе утверждение. Для упрощения записи будем считать, что $d=1$. Пусть

$$\sum_{\bar{r}\in I}{}_{G_0}X_{\bar{r}}=\sum_{\substack{\bar{r}^{(1)},\dots,\bar{r}^{(u)}\\ u\ge1}}c_{\bar{r}^{(1)},\dots,\bar{r}^{(u)}}\,X_{\bar{r}^{(1)}}\dots X_{\bar{r}^{(u)}},$$

где $c_{\bar{r}^{(1)},\dots,\bar{r}^{(u)}}\in\mathbb{Z}_p$. Тогда

$$\sum_{\bar{r}\in I}{}_{G_0}\theta_{\bar{r}}t_n^{r_n}\dots t_1^{r_1}=\sum_{\substack{\bar{r}^{(1)},\dots,\bar{r}^{(u)}\\ u\ge1}}c_{\bar{r}^{(1)},\dots,\bar{r}^{(u)}}\,t_n^{r_n^{(1)}+\dots+r_n^{(u)}}\dots t_1^{r_1^{(1)}+\dots+r_1^{(u)}}=$$

$$= \sum_{\bar r\in\hat I} \left(\sum_{\bar r^{(1)}+\ldots+\bar r^{(u)}=\bar r} c_{\bar r^{(1)},\ldots,\bar r^{(u)}}\, \theta_{\bar r^{(1)}}\ldots\theta_{\bar r^{(u)}}\right) t_n^{r_n}\ldots t_1^{r_1} =$$

$$= \sum_{\bar r\in\hat I} c_{\bar r} t_n^{r_n}\ldots t_1^{r_1},$$

где $c_{\bar r}\in\mathbb{Z}_p[\mathcal{R}]$ (внутренняя сумма по свойству 1 допустимых наборов конечна).

Первое утверждение докажем индукцией по размерности поля. Пусть в поле $k^{(n-1)}$

$$\bar s = \sum_{\substack{\bar r\in I_0\\ 1\le i\le d}} {}_{\mathrm{G}_0}\, \tilde\theta_{\bar r,i}\, \bar t_{n-1}^{\,r_{n-1}}\ldots \bar t_1^{\,r_1},$$

где $I_0\subset\mathbb{Z}^{n-1}$ – допустимый набор, $\tilde\theta_{\bar r,i}\in\mathcal{R}_i\cup\{0\}$ либо $\tilde\theta_{\bar r,i}\in A_i$ в зависимости от характеристики поля $k^{(n-1)}$. Возьмем $\theta_{(r_1,\ldots,r_{n-1},0)}\in\mathcal{R}_i$ так, чтобы

$$\bar\theta_{(r_1,\ldots,r_{n-1},0)} = \tilde\theta_{\bar r,i}.$$

Пусть

$$s_0 = \sum_{\substack{(r_1,\ldots,r_{n-1})\in I_0\\ 1\le i\le d}} {}_{\mathrm{G}_0}\, \theta_{(r_1,\ldots,r_{n-1},0)}\, t_{n-1}^{r_{n-1}}\ldots t_1^{r_1},$$

тогда $I_0\times\{0\}$ – допустимый набор в $\mathbb{Z}^n$, поэтому ряд s_0 сходится. В силу непрерывности отображения вычета имеем $\bar s_0=\bar s$, поэтому $s=s_0+_{\mathrm{G}_0}s^{(1)}$, где $v_n(s^{(1)}\ge 1$. Применим лемму 2 к элементу $\overline{s^{(1)}t_n^{-1}}\in k^{(n-1)}$ и системе представителей $B=\left\{\sum_{i=1}^{m}\tilde\theta_i,\ \tilde\theta_i\in\mathcal{R}_i\cup\{0\}\text{ или } A_i\right\}$. Получаем некоторое разложение (в обычную сумму)

$$\overline{s^{(1)}t_n^{-1}} = \sum_{\substack{\bar r\in I_1\\ 1\le i\le d}} \tilde\theta_{\bar r,i}\, t_n^{r_n}\ldots t_1^{r_1}.$$

Возьмем $\theta_{(r_1,\ldots,r_{n-1},1),i}\in\mathcal{R}_i$ так, чтобы

$$\bar\theta_{(r_1,\ldots,r_{n-1},1),i} = \tilde\theta_{(r_1,\ldots,r_{n-1}),i}.$$

Пусть

$$s_1 = \sum_{\substack{(r_1,\ldots,r_{n-1})\in I_1\\ 1\le i\le d}} {}_{\mathrm{G}_0}\, \theta_{(r_1,\ldots,r_{n-1},1),i}\, t_n t_{n-1}^{r_{n-1}}\ldots t_1^{r_1}.$$

Ряд s_1 сходится, поскольку $I_1\times\{1\}$ – допустимый набор. Ясно, что

$$s_1 \equiv \sum_{\substack{(r_1,\dots,r_{n-1})\in I_1\\ 1\le i\le d}} \theta_{(r_1,\dots,r_{n-1},1),i}\; t_n t_{n-1}^{r_{n-1}}\dots t_1^{r_1} \equiv s^{(1)} \mod \mathfrak{p}(2).$$

Поэтому $s=s_0+_{G_0}s^{(1)}=s+_{G_0}s_1+_{G_0}S^{(2)}$, где $v_n(s^{(2)})\ \ge 1$. Повторяя последний шаг, получаем сходящийся ряд

$$\sum_{\substack{\bar r\in I\\ 1\le i\le d}} \theta_{\bar r,i}\, t_n^{r_n}\dots t_1^{r_1},$$

где $I=I_0\times\{0\}\cup I_1\times\{1\}\cup I_2\times\{2\}\cup\dots$ – допустимый набор в $\mathbb{Z}^n$. Сумма этого ряда равна s. Предложение доказано.

З а м е ч а н и е. Из доказательства видно, что для $s\in\mathfrak{m}$ $\bar v(s)=\min\{\bar r\in I:\theta_{\bar r,i}\ne 0$ хотя бы при одном $1\le i\le d\}$. Вместо G_0 можно брать любую другую формальную группу Любина-Тэйта, в частности G_m.

Обозначим через $\bar e_F=\bar v(p)$ - абсолютный индекс ветвления поля F в случае, когда его характеристика равна нулю. Тогда если $s\in G_0(\mathfrak{m})$ и $\bar v(s) > \frac{p}{p-1}\bar e_F$, то легко проверяется, что $s\in[p]_0G_0(\mathfrak{m})$.

Л е м м а 3. *Для каждого набора* $\bar r>0$, $1\le i\le d$ *выделим подмножество* $\mathcal{R}_i^{\bar r}\subset\mathcal{R}_i$ *так, чтобы*

$$\theta\in\mathcal{R}_i^{\bar r} \iff \theta\in\mathcal{R}_i^{p\bar r}.$$

Пусть M – *подмножество в* $G_0(\mathfrak{m})$, *состоящее из рядов вида* (2) *таких, что* $\theta_{\bar r,i}\in\mathcal{R}_i^{\bar r}\cup\{0\}$ *для всех* $\bar r>0$, $1\le i\le d$. *Предположим, что* M – $\mathbb{Z}_p$-*подмодуль в* $G_0(\mathfrak{m})$ *и* $G_0(\mathfrak{m})=M\oplus M'$. *Тогда для любого* $s\in M$ *найдется* $s'\in M$ *такой, что* $s\equiv s' \bmod [p]_0M$ *и либо* $s'=0$, *либо* $\bar v(s')$ *не делится на* p *и* $\bar v(s') < \dfrac{p}{p-1}\bar e_F$, *либо* $\bar v(s') = \dfrac{p}{p-1}\bar e_F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $\bar v(s') > \dfrac{p}{p-1}\bar e_F$ имеем

$$s'\in[p]_0G_0(\mathfrak{m}) = [p]_0M \oplus [p]_0M',$$

следовательно, $s'\in[p]_0M$.

Пусть $\bar v(s) = \bar r^{(0)} < \dfrac{p}{p-1}\bar e_F$,

$$s = \sum_{\substack{\bar r\ge\bar r^{(0)}\\ 1\le i\le d}}{}_{G_0}\ \theta_{\bar r,i}\, t_n^{r_n}\dots t_1^{r_1}, \qquad \theta_{\bar r,i}\in\mathcal{R}_i^{\bar r}.$$

Из $\theta_{p\bar r,i}\in\mathcal{R}_i^{p\bar r}$ следует $\theta_{p\bar r,i}^{p^{-1}}\in\mathcal{R}_i^{\bar r}$. Положим

$$s_0 = \sum{}_{G_0}\ \theta_{p\bar r,i}^{p^{-1}}\, t_n^{r_n}\dots t_1^{r_1}\in M,$$

где суммирование происходит по всем наборам $\bar r$, удовлетворяющим условию $\frac{1}{p}\,\bar r^{(0)}\le \bar r < \frac{1}{p}\,(\frac{1}{p}\,\bar r^{(0)}+\bar e_F)$.

Тогда

$$[p]_0(s_0) = \sum{}_{G_0}(\theta_{p\bar{r},i}\, t_n^{pr_n}\ldots t_1^{pr_1} + p\theta_{p\bar{r},i}^{p-1}\, t_n^{r_n}\ldots t_1^{r_1}) \equiv$$

$$\equiv \sum{}_{G_0}\, \theta_{p\bar{r},i}\, t_n^{pr_n}\ldots t_1^{pr_1} \bmod \mathfrak{p}(\tfrac{1}{p}\, \bar{r}^{(0)}+\bar{e}_F).$$

Положим $s_1 = s -_{G_0} [p]_0(s_0)$, $\bar{r}^{(1)}=\bar{v}(s_1)$. Имеем

$$s_1 \equiv \sum{}_{G_0}\, \theta_{\bar{r},i}\, t_n^{r_n}\ldots t_1^{r_1} \bmod \mathfrak{p}(\tfrac{1}{p}\, \bar{r}^{(0)}+\bar{e}_F),$$

где суммирование проходит по всем наборам $\bar{r}$, удовлетворяющим условию $\frac{1}{p}\, \bar{r}^{(0)} \le \bar{r} < \frac{1}{p}\, (\frac{1}{p}\, \bar{r}^{(0)}+\bar{e}_F)$, не делящимся на p.

Предположим, что s_1 не является искомым s', т.е. $\bar{r}^{(1)} < \frac{p}{p-1}\, \bar{e}_F$ и $\bar{r}^{(1)}$ делится на p. Тогда из сравнения для s_1 видно, что $s_1 \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}(\frac{1}{p}\, \bar{r}^{(0)} + \bar{e}_F)$, т.е. $\bar{r}^{(1)} \ge \frac{1}{p}\, \bar{r}^{(0)}+\bar{e}_F$. Применяя данное рассуждение к s_1, находим s_2, сравнимое с s_1 по $\bmod [p]_0 M$ такое, что либо s_2 можно взять в качестве s', либо $\bar{r}^{(2)} \ge \bar{v}(s_2) \ge \frac{1}{p}\, \bar{r}^{(1)} + \bar{e}_F$. Продолжая этот процесс, получаем последовательность элементов $s_1, s_2, s_3, \ldots \in M$. Если ни один из них не подходит в качестве s', то при каждом j имеем $\bar{r}^{(j)} = \bar{v}(s_j) \ge \frac{1}{p}\, \bar{r}^{(j-1)}+\bar{e}_F$ и $\bar{r}^{(j)} < \frac{p}{p-1}\, \bar{e}_F$.

Эти неравенства противоречат друг другу. В самом деле, если $r_n^{(j-1)} < \frac{p}{p-1}\, e_{n,F}$, то $r_n^{(j)} > r_n^{(j-1)}$, значит, при некотором j_1 для $j \ge j_1$ $r_n^{(j)} = \frac{p}{p-1}\, e_{n,F}$. Аналогично при $j \ge j_2$ $r_{n-1}^{(j)} = \frac{p}{p-1}\, e_{n-1,F}$ и т.д.

§ 2. Расширения Артина-Шрайера

Уравнением Артина-Шрайера будем называть уравнение вида $X^p - X = a$, в котором элемент a принадлежит n-мерному локальному полю F и в случае нулевой характеристики поля F удовлетворяет условию

$$-\frac{p}{p-1}\, \bar{e}_F < \bar{v}(a) \le 0,$$

причем если $\bar{v}(a)<0$, то $\bar{v}(a)$ не делится на p.

Заметим, что когда $\bar{v}_F(a)>0$, то уравнение $X^p - X = a$ разрешимо в поле F, так как его корнем является значение ряда из кольца $\mathbb{Z}_p[[X]]_0$, обратного в смысле композиции к многочлену $-X+X^p$, в точке a.

Пусть $\operatorname{char} F=0$. Поле F назовем регулярным, если оно не содержит нетривиальных корней p-й степени из единицы. Пусть $F_1 = F(\xi)$, где ξ - первообразный корень степени p из 1. Тогда $\operatorname{Gal}\,(F_1/F)$ - циклическая группа порядка m, делящего $p-1$. Обозначим через σ образующий элемент этой группы, через $g \in \mathbb{Z}_p$ - такой первообразный корень степени m из единицы в $\mathcal{R}$, для которого $\xi^\sigma = \xi^g$. Максимальный идеал поля F_1 обозначим через $\mathfrak{m}_1$. Для элементов $s_1, s_2 \in \mathfrak{m}_1$ будем писать

$$s_1 \equiv s_2 \bmod [p]_0 G_0(\mathfrak{m}_1),$$

если $s_1 = s_2 +_{G_0} [p]_0(s)$ при некотором $s \in \mathfrak{m}_1$.

Лемма 4. 1. *Пусть k – произвольное регулярное поле нулевой характеристики, $k_1 = k(\xi)$, $l_1 = k_1(\sqrt[p]{a})$ при некотором $a \in k_1^*$. Расширение l_1/k является абелевым расширением тогда и только тогда, когда $a^{\sigma} \equiv a^g \bmod (k_1^*)^p$.*

2. *Пусть $L_1 = F_1([p]_0^{-1}(a))$ при некотором $a \in \mathfrak{m}_1$. Расширение L_1/F является абелевым расширением тогда и только тогда, когда $a^{\sigma} \equiv [g]_0(a) \bmod [p]_0 G_0(\mathfrak{m}_1)$.*

Доказательство. Положим $w = f_G(\xi - 1)$, где f_G – ряд из $\mathbb{Z}_p[[X]]$, задающий изоморфизм формальных групп G_m и G_0. Тогда

$$w^p + pw = [p]_0(w) = [p]_0(f_G(\xi-1)) = ([p]_0 \circ f_G)(\xi-1) =$$

$$= (f_G \circ [p]_m)(\xi - 1) = f_G(\xi^p - 1) = f_G(0) = 0.$$

Следовательно, корень изогении $[p]_0$ содержится в поле F_1.

Первая часть леммы представляет собой легкое упражнение из теории Галуа полей, вторая часть следует из первой.

Следствие. *Если $F_1(\sqrt[p]{a})/F_1$ – абелево расширение, то $a \in (1+\mathfrak{m}_1)F_1^{*p}$.*

Доказательство. Пусть $a = t_n^{r_n} \ldots t_1^{r_1} \theta u$, где $\theta \in \mathcal{R}_{F_1}$, $u \in 1 + \mathfrak{m}_1$. Тогда по лемме 4 имеем $r_i \equiv g r_i \bmod p$, откуда r_i делятся на p.

Предложение 2. *Если x – корень уравнения Артина-Шрайера, то расширение $F(x)/F$ – циклическое.*

Доказательство. Требует рассмотрения только случай $\operatorname{char} F = 0$. Пусть поле F – иррегулярное, т.е. $\xi \in F$. Тогда, как отмечено в доказательстве леммы 4, корень w изогении $[p]_0$ содержится в F. Из равенства $x^p - x = a$ следует, что $y^p + py = w^p a$, где $y = wx$, причем из условий на a заключаем, что $w^p a \in \mathfrak{m}$. Наконец,

$$f_G^{-1}(w^p a) = f_G^{-1}(y^p + py) = f_G^{-1}([p]_0(y)) = [p]_m(f_G^{-1}(y)),$$

т.е.

$$(1 + (f_G^{-1}(y))^p = 1 + f_G^{-1}(w^p a).$$

Таким образом, поле $F(x) = F(1 + f_G^{-1}(y))$ является циклическим расширением поля F в силу теории Куммера.

Пусть теперь поле F - регулярное. Положим $L = F(x)$ и будем считать, что $L \neq F$. Имеем из равенства

$$[p]_0(gX) = g[p]_0(X)$$

соотношение $[g]_0(X) = gX$. Поэтому

$$(w^p a)^{\sigma} = (-pwa)^{\sigma} = -pw^{\sigma} a = -pa[g]_0(w) = -pagw = [g]_0(w^p a).$$

Из второй части леммы 4 теперь следует, что $F_1 L/F$ является абелевым расширением, поэтому L/F - циклическое расширение. Предложение доказано.

Предложение 3. *Если $\operatorname{char} F = 0$ и поле F иррегулярно, то его максимальное абелево расширение показателя p получается присоединением $\sqrt[p]{t_n}, \ldots, \sqrt[p]{t_1}$ и корней всех уравнений Артина-Шрайера.*

Доказательство. Так как группа $\mathcal{R}$ является p-делимой, то по теории Куммера максимальное абелево расширение показателя p получается присоединением $\sqrt[p]{t_n},\dots,\sqrt[p]{t_1}$ и корней степени p из главных единиц: $\sqrt[p]{1+s}$, $s\in\mathfrak{m}$.

Присоединение $\sqrt[p]{1+s}$ равносильно присоединению корня уравнения $[p]_0(X)=f_G(s)$. Лемма 3, примененная к $\mathbb{Z}_p$-модулю $M=G_0(\mathfrak{m})$, позволяет оставить только такие уравнения, для которых $\bar{v}(s) = \bar{v}(f_G(s))$ не делится на p, причем $\bar{v}(s) < \frac{p}{p-1}\bar{e}_F$, а также $\bar{v}(s) = \frac{p}{p-1}\bar{e}_F$. Однако присоединение корня уравнения $[p]_0(X) = f_G(s)$ эквивалентно присоединению корня уравнения Артина-Шрайера с $a=f_G(s)/w^p$, что и доказывает предложение.

Для регулярного поля F построим разложение $\mathbb{Z}_p$-модуля $G_0(\mathfrak{m}_1)$ в прямую сумму собственных подмодулей относительно действия оператора σ. Для этого понадобится следующая лемма о конечных полях.

Л е м м а 5. 1. *Пусть σ – образующая группы Галуа расширения конечных полей $\mathbb{F}_{q^f}/\mathbb{F}_q$, где f делит $q-1$. Тогда $\mathbb{F}_{q^f}$ раскладывается относительно действия σ в прямую сумму собственных $\mathbb{F}_q$-подпространств $A_1,\dots,A_f$ с собственными числами $\eta,\eta^2,\dots,\eta^f=1$, где η – первообразный корень степени f из единицы.*

2. *Предположим, что число e делит $\frac{q-1}{f}$. Тогда для любого $\tilde{\theta}\in\mathbb{F}_{q^f}$ найдется элемент $\theta\in\mathbb{F}_{q^f}$ такой, что $\tilde{\theta}\theta^e$ лежит в одном из A_i.*

П р е д л о ж е н и е 4. *Имеет место разложение $\mathbb{Z}_p$-модуля*

$$G_0(\mathfrak{m}_1) \approx M_0 \oplus \dots \oplus M_{m-1}.$$

Если $s\in M_j$, то $s^\sigma= [g^j]_0(s)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $fe_{(1)}\dots e_{(i)}$ – степень расширения $k_1^{(i)}/k^{(i)}$, f – степень расширения $k_1^{(0)}/k^{(0)}$, где $F_1=(k_1^{(n)},k_1^{(n-1)},\dots,k_1^{(0)})$, тогда $m = fe_1\dots e_n$. Пусть $t_n,\dots,t_1$ – локальные параметры поля F. Построим такую систему локальных параметров $T_n,\dots,T_1$ в F_1, что

$$(T_l^\sigma/T_l)^{fe_{(1)}\dots e_{(l)}}= 1 \qquad \text{для всех } 1 \le l \le n.$$

В самом деле, пусть $T_1,\dots,T_{l-1}$ уже построены. Выберем в поле F_1 произвольный элемент $\tilde{T}_l$ с

$$v_{n,F_1}(\tilde{T}_l) = \dots = v_{l+1,F_1}(\tilde{T}_l) = 0, \qquad v_{l,F_1}(\tilde{T}_l) = 1.$$

Тогда имеем

$$\tilde{T}_\ell^{\,e(\ell)} = t_\ell\, T_{\ell-1}^{r_{\ell-1}}\dots T_1^{r_1}\,\tilde{\theta}\, u,$$

где $\tilde{\theta}\in\mathcal{R}_{F_1}$, и $u\in 1+\mathfrak{m}_1$. Ввиду $(q-1)$-делимости группы $1+\mathfrak{m}_1$ можно считать, что $u=1$. Далее, по лемме 5 можно подобрать $\theta\in\mathcal{R}_{F_1}$ так, что

$$(\tilde{\theta}\theta^{e(\ell)})^\sigma = \eta^i\tilde{\theta}\theta^{e_\ell}, \qquad \text{где } \eta^f = 1.$$

Тогда $T_\ell=\tilde{T}_\ell\theta$ обладает нужным свойством. По первой части леммы 5 имеем

$$k_1^{(0)} = A_1 \oplus \ldots \oplus A_f.$$

Обозначим через $\mathcal{R}_{F_1,i}$ соответствующие подмножества $\mathcal{R}_{F_1}$. Тогда для любых $r_1,\ldots,r_n$, $\theta\in\mathcal{R}_{F_1,i}$, $1\le i\le f$

$$(\theta T_1^{r_1} \ldots T_n^{r_n})^\sigma = g^j\theta T_1^{r_1} \ldots T_n^{r_n} = [g^j]_0(\theta T_1^{r_1} \ldots T_n^{r_n}).$$

Возьмем теперь любой элемент $s\in G_0(\mathfrak{m}_1)$. Согласно предложению 1,

$$s = \sum_{\substack{\bar r\in I\\ 1\le i\le f}}{}_{G_0} \theta_{\bar r,i} T_n^{r_n} \ldots T_1^{r_1}, \text{ где } \theta_{\bar r,i} \in \mathcal{R}_{F_1,i}.$$

Для каждого $\bar r$ и i имеем

$$(\theta_{\bar r,i} T_n^{r_n} \ldots T_1^{r_1})^\sigma = [g^j]_0(\theta T_n^{r_n} \ldots T_1^{r_1}).$$

Группируя слагаемые с одинаковыми j, получаем

$$s = s_0 +_{G_0} \ldots +_{G_0} s_{m-1}, \text{ где } s_j^\sigma = [g^j](s_j).$$

Это дает разложение $G_0(\mathfrak{m}_1) \approx M_0 \oplus \ldots \oplus M_{m-1}$.

С л е д с т в и е. *Если* $s\in G_0(\mathfrak{m}_1)$ *– такой элемент, что* $s^\sigma\equiv [g]_0(s)\cdot$ $\cdot \bmod [p]_0G_0(\mathfrak{m}_1)$, *то существует элемент* $b\in G_0(\mathfrak{m}_1)$ *такой, что* $s\equiv b \bmod [p]_0G_0(\mathfrak{m}_1)$, $b^\sigma = [g]_0(b)$, *причем либо* $b=0$, *либо* $\bar v(b) < \frac{p}{p-1}\bar e_{F_1}$ *и* $\bar v(b)$ *не делится на* p, *либо* $\bar v(b) = \frac{p}{p-1}\bar e_{F_1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s = s_0 +_{G_0} s_1 +_{G_0} \ldots +_{G_0} s_{m-1}$, $s_i\in M_i$. Из сравнения $s^\sigma\equiv [g]_0(s) \bmod [p]_0G_0(\mathfrak{m}_1)$ следуют $s_i\in[p]_0G_0(\mathfrak{m}_1)$, если $i\ne1$, и $s_1^\sigma =$ $= [g]_0(s_1)$. Из леммы 3, примененной к подмодулю M_1, находим элемент $s'=b$. Следствие доказано.

П р е д л о ж е н и е 5. *Пусть* F *– n-мерное локальное поле произвольной характеристики, причем в случае* $\operatorname{char} F = 0$ *поле* F *– регулярное. Тогда любое циклическое расширение* L/F *степени* p *задается уравнением Артина-Шрайера.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим поле F с $\operatorname{char} F=0$. Пусть $L_1= LF_1$. Тогда L_1/F_1 – циклическое расширение степени p. Поскольку L_1/F – абелево, то по следствию из леммы 4 имеем $L_1=F_1(\sqrt[p]{a})$, где $a\in1+\mathfrak{m}_1$. Отсюда $L_1=F_1([p]_0^{-1}(s))$, где $s =$ $=f_G(a-1)\in\mathfrak{m}_1$. Из леммы 4 следует, что $s^\sigma\equiv[g]_0(s) \bmod [p]_0G_0(\mathfrak{m}_1)$. Тогда по следствию из предложения 4 имеем $L_1=F_1([p]_0^{-1}(b))$, $b^\sigma=[g]_0(b)$, причем либо $\bar v(b)<\frac{p}{p-1}\bar e_{F_1}$ и $\bar v(b)$ не делится на p, либо $\bar v(b)=\frac{p}{p-1}\bar e_{F_1}$.

Пусть $x^p+px=b$. Разделив обе части на w^p, получим $y^p-y=\alpha$, где $u=x/w$, $\alpha=b/w^p$. Имеем

$$\alpha^{\sigma} = \frac{b^{\sigma}}{(w^{p})^{\sigma}} = \frac{b^{\sigma}}{(w^{\sigma})^{p}} = \frac{[g]_0(b)}{([g]_0(w))^{p}} = \frac{gb}{g^{p}w^{p}} = \alpha.$$

Следовательно, $\alpha\in F$ и по предложению 2 $F(y)/F$ - циклическое расширение. Далее

$$L_1 = LF_1 = F_1([p]_0^{-1}(b)) = F_1(y) = F(y)F_1,$$

откуда вытекает, что $L=F(y)$, так как подгруппа индекса p в $\mathrm{Gal}\ (L_1/F) \approx \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ определена однозначно. Предложение доказано.

Из теории Куммера для F_1 и последнего доказательства можно получить

Предложение 6. *Пусть* char $F=0$ *и поле* F *- регулярное. Тогда*

1) *если* L/F *- конечное абелево расширение показателя* p, $(L:F)=p^{\ell}$, *то* L *получается присоединением корней уравнений Артина-Шрайера* $X^{p}-X=a_j$, $1\le j\le\ell$; *при этом* $a_1,\dots,a_{\ell}$ *можно выбрать так, что*

$$\bar v(a_1) = \dots = \bar v(a_{\ell_1}) = \bar r^{(1)},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\bar v(a_{\ell_{m-1}+1}) = \dots = \bar v(a_{\ell_m}) = \bar r^{(m)},$$

причем $\bar r^{(i)}\neq \bar r^{(j)}$ *при* $i\neq j$ *и* $a_{\ell_{i-1}+1},\dots,a_{\ell_i}$ *линейно независимы по* $\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}(r_1^{(i)}+1, r_2^{(i)},\dots,r_n^{(i)})$ *(считая* $\ell_0=0$, $\ell_m=\ell$*)*;

2) *предположим, что в этой ситуации уравнение Артина-Шрайера* $X^{p}-X=a$, *где* $a\in F$, *разрешимо в поле* L; *тогда* $\bar v(a)=\bar r^{(j)}$ *при некотором* j *и* a *является линейной комбинацией* $a_{\ell_{j-1}+1},\dots,a_{\ell_j}$ *по модулю* $\mathfrak{p}(r_1^{(j)}+1,\dots,r_n^{(j)})$.

Опишем ветвление в расширениях Артина-Шрайера. Группы ветвления расширений многомерных локальных полей определены в [26]. Именно пусть L/F - расширение n-мерных локальных полей, $G=\mathrm{Gal}(L/F)$. Если $\bar i\in\mathbb{Z}^{n}$, $\bar i>0$, то $G_{\bar i}$ определяется как подгруппа в G, состоящая из всех σ таких, что $y^{\sigma}y^{-1}\in 1+\mathfrak{p}_L(\bar i)$ для любого $y\in L^{*}$.

Пусть теперь F - n-мерное локальное поле нулевой характеристики, L/F - расширение, получаемое присоединением корня x уравнения Артина-Шрайера $X^{p}-X=a$; $\bar v_F(a)=-\bar r$, $\bar v_L(x)=-\bar R$. Если $\bar r=0$, то расширение L/F неразветвлено, т.е. его степень совпадает со степенью расширения последних полей вычетов. Если $\bar r>0$, то по определению уравнения Артина-Шрайера $\bar r$ не делится на p. Предположим, что $r_n,\dots,r_{j+1}$ делятся на p, но r_j не делится на $p(1\le j\le n)$. Тогда

$$e_{(n)L/F} = \dots = e_{(j+1),L/F} = e_{(j-1),L/F} = \dots = e_{(1),L/F} = 0,\ e_{(j),L/F} = p.$$

Группы ветвления расширения Артина-Шрайера таковы:

$$G_{\bar i} = \begin{cases} \mathrm{Gal}\ (L/F), & \bar i \le \bar R,\\ \{1\}, & \bar i > \bar R.\end{cases}$$

§ 3. Теория полей классов двумерного разнохарактеристического локального поля

Пусть F - двумерное разнохарактеристическое локальное поле, т.е. поле характеристики 0 с полем вычетов $\bar{F}$ характеристики $p>0$. Топология аддитивной группы здесь имеет более простое описание. Если $F=k\{\{t\}\}$, то окрестности нуля в кольце целых $\mathfrak{O}$ относительно нормирования $\mathfrak{O}$ ранга 2 - это подгруппы вида $t^i\mathfrak{O}_k[[t]]+\pi^j\mathfrak{O}_k\{\{t\}\}$, где $\mathfrak{O}_k$ - кольцо целых поля k, π - простой элемент поля k. На мультипликативной группе F^* вводится топология произведения дискретных на $\{t_2\}\times\{t_1\}\times\mathcal{R}$ и индуцированной с F топологии на $U=1+\mathfrak{m}$.

Пусть $K_m(F)$ - m-я группа Милнора поля F. Возьмем на группе $K_m(F)$ сильнейшую топологию, в которой, если $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow y$, то $x_n+y_n \longrightarrow x+y$, $-x_n \longrightarrow -x$ в $K_m(F)$, и отображение

$$F^{*m} \longrightarrow K_m(F)$$

секвенциально непрерывно по каждому аргументу. Пусть $\Lambda_m(F)$ - подгруппа в $K_m(F)$, являющаяся пересечением всех окрестностей 0 в $K_m(F)$, тогда топологическая K-группа

$$K_m^{top}(F) = K_m(F)/\Lambda_m(F)$$

(см. [11]).

В работе [24] показано, что для двумерного разнохарактеристического локального поля

$$\Lambda_2(F) = \bigcap_{m\geq 1} mK_2(F), \qquad (3)$$

а фактор-группа $k_2^{top}(F)/pK_2^{top}(F)$ имеет следующий топологический базис: $\{t_1, t_2\}$; $\{1-\theta t_2^{i_2}t_1^{i_1}, t_1\}$, i_2 взаимно просто с p, $(1,0) \leq (i_1,i_2)< \frac{p}{p-1}\,\bar{e}_F$; $\{1-\theta t_2^{i_2}t_1^{i_1}, t_2\}$, i_1 взаимно просто с p, i_2 делится на p, $(1,0) \leq (i_1,i_2)<\frac{p}{p-1}\,\bar{e}_F$, θ пробегает в $\mathcal{R}\cup\{0\}$ элементы, вычеты которых в $\mathbb{F}_q$ образуют базис над $\mathbb{F}_p$. Если F - иррегулярное поле, то в топологический базис еще включаются элементы ($\bar{e}_F=(e_1,e_2)$)

$$\{1 - \eta t_2^{\frac{pe_2}{p-1}}\, t_1^{\frac{pe_1}{p-1}},\ t_1\} \quad \text{и} \quad \{1 - \eta t_2^{\frac{pe_2}{p-1}}\, t_1^{\frac{pe_1}{p-1}},\ t_2\},$$

где $\eta\in\mathcal{R}$ такой, что $1 - \eta t_2^{\frac{pe_2}{p-1}}\, t_1^{\frac{pe_1}{p-1}} \notin F^{*p}$.

Обозначим через U_i подгруппу в F^* элементов вида $1+x$, где $xt_2^{-i}\in\mathfrak{p}(0)$, и положим $U_0=U_F=\{x\in F^*: x\in\mathfrak{p}(0)$ и $x^{-1}\in\mathfrak{p}(0)\}$. Подгруппу в $K_2(F)$, порожденную элементами вида $\{u,v\}$, где $u\in U_i$, $v\in F^*$, обозначим через $U_iK_2(F)$.

1°. Свойства норменного отображения для K-групп двумерного разнохарактеристического локального поля. Из (3) следует, что отображение нормы $N_{L/F}: K_2(L)\longrightarrow K_2(F)$ (L/F - конечное расширение полей) переносится на топологические K-группы $N_{L/F}: K_2^{top}(L) \longrightarrow K_2^{top}(F)$.

Л е м м а 6. *Пусть L/F - конечное расширение двумерных разно-*

характеристических локальных полей, тогда отображение $N_{L/F}: K_2^{top}(L) \longrightarrow K_2^{top}(F)$ *является непрерывным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поле F^{sep} является композитом линейно разделенных расширений $F^{sep}(\text{не } p)/F$ и $F^{sep}(p)/F$ - максимального сепарабельного расширения степени взаимно простой с p и p-расширения, а расширение $F^{sep}(\text{не } p)$ является композитом расширений $F(\sqrt[m]{t_2})$, $F(\sqrt[m]{t_1})$, $F(\sqrt[q^m]{\theta})$, где m взаимно просто с p, $\theta\in\mathcal{R}$. Поэтому каждое расширение Галуа поля F разрешимо [11]. Ввиду непрерывности отображения j_* : $K_2^{top}(L_1) \longrightarrow K_2^{top}(L_2)$ для расширения полей L_2/L_1 достаточно проверить утверждение леммы для простого циклического расширения L/F степени h. Если h взаимно просто с p, то можно так выбрать параметры T_2, T_1 в L и t_2, t_1 в F, что либо $T_1=t_1$, $T_2^h=t_2$, либо $T_2=t_2$, $T_1^h=t_1$, либо $T_2=t_2$, $T_1=t_1$. Тогда, например, в первом случае имеем

$$hN_{L/F}\{1-\theta T_2^{i_2}T_1^{i_1}, T_2\} = \{N_{L/F}(1-\theta T_2^{i_2}T_1^{i_1}),\ t_2\},$$

$$N_{L/F}\{1-\theta T_2^{i_2}T_1^{i_1}, T_1\} = \{N_{L/F}(1-\theta T_2^{i_2}T_1^{i_1}),\ t_1\}.$$

Ввиду непрерывности нормы для полей получаем требуемое. Если же $h=p$, то тогда либо $T_1=t_1, T_2^p=t_2(1+a)$, где $a\in L$ и $aT_2^{-1}\in\mathfrak{O}_L$, либо $T_2=t_2$, $T_1^p=t_1(1+b)$, $b\in L$ и $bT_2^{-1}\in\mathfrak{O}_L$, либо $T_2=t_2$ и $T_1=t_1$. В первом случае, например, имеем

$$N_{L/F}\{1-\theta T_2^{i_2}T_1^{i_1}, T_2\} = -i_2^{-1}\{N_{L/F}(1-\theta T_2^{i_2}T_1^{i_1}),\ \theta T_1^{i_1}\},$$

если i_2 взаимно просто с p и

$$N_{L/F}\{1-\theta T_2^{pi_2}T_1^{i_1}, T_2\} = \{N_{L/F}(1-\theta t_2^{i_2}(1+a)^{i_2}T_1^{i_1},\ T_2\} =$$

$$= \{1-\theta t_2^{i_2}t_1^{i_1}, N_{L/F}\ T_2\} + N_{L/F}\{1-\theta T_2^{pi_2+1}xT_1^{i_1},\ T_2\},$$

где $x\in U_L$. Раскладывая элемент $1-\theta T_2^{pi_2+1}xT_1^{i_1}$ в произведение элементов вида $1-\theta T_2^{j_2}T_1^{j_1}$ и проделывая вновь указанные преобразования, и здесь делаем вывод о непрерывности отображения нормы.

Л е м м а 7. *Пусть L/F - конечное расширение Галуа, тогда индекс норменной подгруппы $N_{L/F}: K_2^{top}(L)$ в $K_2^{top}(F)$ не превосходит степени расширения L/F.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду разрешимости группы Gal (L/F) достаточно доказать утверждение леммы для циклического расширения L/F простой степени h. Основная идея следующих рассуждений принадлежит К. Като [23].

Используем коммутативную диаграмму (см. [9], § 3):

$$\begin{array}{ccc} K_2^{top}(L) & \xrightarrow{\partial_{\pi_L}} & K_2^{top}(\bar{L}) \oplus \bar{L}^* \\ \downarrow N & & \downarrow N_{F,L} \\ K_2^{top}(F) & \xrightarrow{\partial_{\pi_F}} & K_2^{top}(\bar{F}) \oplus \bar{F}^* \end{array}$$

где ∂_{π_F} $(\{x_1,x_2\} + \{y,\pi_F\}) = (\{\bar{x}_1,\bar{x}_2\},\bar{y})$, x_i, $y\in U_F$,

$$N_{F,L}(x,y) = (e_{L/F}Nx - N\{y,\bar{u}\},\ Ny),$$

где $\pi_F=u\pi_L^{e_{L/F}}$, π_F и π_L - простые элементы F и L, $e_{L/F}=e_{(2),L/F}$.

Рассмотрим несколько случаев.

а) Расширение L/F π-неразветвлено, тогда из диаграммы (4)

$$K_2^{top}(F)/N_{L/F}\ K_2^{top}(L) \xrightarrow{\sim} K_2^{top}(\bar{F})/N_{\bar{L}/\bar{F}}\ K_2^{top}(\bar{L}) \oplus \bar{F}^*/N_{\bar{L}/\bar{F}}\ \bar{L}^*,$$

так как $e_{L/F}=1$, $u=1$, $U_1K_2^{top}(F)=N_{L/F}\ K_2^{top}(L)$.

Но отображение нормы для K_2-групп одномерных локальных полей сюръективно ([27], приложение 1), и порядок группы $\bar{F}^*N_{\bar{L}/\bar{F}}\ \bar{L}^*$ в силу теории полей классов равен h.

б) Расширение L/F вполне разветвлено и $h\neq p$, тогда $e_{L/F}=h$ и можно считать $u=1$, поэтому из диаграммы (4)

$$K_2^{top}(F)/N_{L/F}\ K_2^{top}(L) \xrightarrow{\sim} K_2^{top}(\bar{F})/h\ K_2^{top}(\bar{F}),$$

но по теореме К. Мура $K_2(\bar{F}) \approx \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\oplus mK_2(\bar{F})$, где m - число корней из единицы в поле $\bar{F}$, $mK_2(\bar{F})$ - делимая подгруппа ([27], приложение 1), поэтому порядок группы $K_2^{top}(\bar{F})/hK_2^{top}(\bar{F})$ не превосходит h.

в) Расширение L/F вполне разветвлено и $h=p$. Из теоремы К. Мура следует, что $K_2^{top}(\bar{F})$ - p-делимая группа, поэтому из диаграммы (4) имеем

$$K_2^{top}(F) \subset U_1K_2^{top}(F) + N_{L/F}K_2^{top}(L).$$

Кроме того, очевидно $pK_2^{top}(F) \subset N_{L/F}K_2^{top}(L)$. Положим $t_2=\pi_F=N_{L/F}\pi_L$, тогда $\{1+\theta t_2^{i_2}t_1^{i_1},t_2\} \in N_{L/F}K_2^{top}(L)$ и из базиса группы $K_2^{top}(F)/pK_2^{top}(F)$ остаются еще элементы вида $\{1+\theta t_2^{i_2}t_1^{pi_1},t_1\}$. Пусть σ - образующая $\mathrm{Gal}(L/F)$, $a=\pi_L^{\sigma}\pi_L^{-1}-1$, тогда ([2], гл. 5) если $r=v_{2,F}(b)$, где $b=N_{L/F}a$, то $U_{r+1}=N_{L/F}L^*$ и при $v_{2,F}(x)\geq 0$ выполняется

$$1 + x^p\pi_F^i \equiv N_{L/F}(1+x\pi_L^i) \bmod U_{i+1}, \quad \text{если} \quad 0<i<r;$$

$$1 + (x^p-x)b \equiv N_{L/F}(1+xa) \bmod U_{r+1};$$

следовательно, из элементов указанного вида не принадлежат подгруппе $N_{L/F}K_2^{top}(L)$, только, быть может, элементы $\{1+\theta b,t_1\}$ в случае, когда $\bar{\theta}\notin\{y^p-y\colon y\in\bar{F}\}$. Значит, индекс норменной подгруппы не превосходит h.

г) Расширение $\bar{L}/\bar{F}$ чисто несепарабельное. Возьмем в L систему параметров T_2,T_1, а в F - систему параметров $t_2=T_2$, $t_1=N_{L/F}T_1$. Так же, как в случае в), проверяется, что $K_2^{top}(F)/N_{L/F}K_2^{top}(L)$ порождается элементами вида $\{1+\theta t_2^{pi_2}t_1^{i_1},t_2\}$.

Пусть σ - образующая группы Gal (L/F), $a=T_1^{\sigma}\,T_1^{-1}-1$, $b=N_{L/F}a$, $r=v_{2,F}(b)$. Тогда ([14], § 1)

$$1 + x^p t_2^{pi_2}\, t_1^{i_1} \equiv N_{L/F}(1 + xt_2^{i_2}\, t_1^{i_1}) \bmod U_{pi_2+1},$$

если $0 < pi_2<r$, $U_{r+1}\subset N_{L/F}L^*$, и

$$1 + (x^p - x)b \equiv N_{L/F}(1 + xa) \bmod U_{r+1},$$

$$1 + x^p\, t_1^i b \equiv N_{L/F}(1 + xT_1^i a) \bmod U_{r+1} \text{ при } i\neq 0,\ v(x) \geq 0.$$

Поэтому и в данном случае выполняется утверждение леммы.

Л е м м а 8. *Если* L/F *- расширение конечной степени, то* $N_{L/F}K_2^{top}(L)$ *является открытой подгруппой в* $K_2^{top}(F)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если степень расширения L/F взаимно проста с p, то $N_{L/F}K_2^{top}(L)\supset U_1K_2^{top}(F)$. Если степень расширения L/F равна p, то $N_{L/F}K_2^{top}(L)\supset pK_2^{top}(F)$. Согласно лемме 7, норменная подгруппа конечного расширения L/F имеет конечный индекс в $K_2^{top}(F)$. Используем описание фактор-фильтрации группы $K_2^{top}(F)/pK_2^{top}(F)$ (см. [24]) и открытость подгрупп конечного индекса в $\bar{F}$ и $\bar{F}/\bar{F}^p$. Единственный случай, который нуждается в особом рассмотрении, изображен на диаграмме

$$\begin{array}{ccc} K_2^{top}(L)/(pK_2^{top}(L) + U_1K_2^{top}(L)) & \xrightarrow{\sim} & \bar{L}^*/\bar{L}^{*p} \\ \downarrow N & & \downarrow N_{\bar{L}/\bar{F}} \\ K_2^{top}(F)/(pK_2^{top}(F) + U_1K_2^{top}(F)) & \xrightarrow{\sim} & \bar{F}^*/\bar{F}^{*p} \end{array}$$

Диаграмма коммутативна ввиду p-делимости группы $K_2(\bar{F})$ (см. доказательство леммы 7). Но подгруппа конечного индекса в $\bar{F}^*/\bar{F}^{*p}$, являющаяся образом открытой подгруппы в $\bar{L}^*/\bar{L}^{*p}$ при норменном отображении, открыта. Поэтому утверждение леммы справедливо для расширения L/F степени p^m.

2°. **Каноническое спаривание.** Пусть μ_m - группа корней степени m из единицы в поле F^{sep}, где F - двумерное разнохарактеристическое локальное поле. $X(k)=X(\mathrm{Gal}\,(k^{sep}/k))=H^1(k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ - группа характеров абсолютной группы Галуа поля k. В работе К. Като [8] построен гомоморфизм

$$h_F : \varinjlim H^3(F, \mu_m\otimes\mu_m) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

удовлетворяющий естественным функториальным свойствам.

Определим отображение

$$\varphi : F^*/F^{*m} \times F^*/F^{*m} \times H^1(F,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \longrightarrow H^3(F,\mu_m\otimes\mu_m)$$

с помощью изоморфизма $F^*/F^{*m} \xrightarrow{\sim} H^1(F,\mu_m)$. Композиция φ и h_F дает каноническое спаривание $(\,,\,)_F$

$$K_2(F) \times X(F) \xrightarrow{(,)_F} \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

а поскольку $\Lambda_2(F)=\bigcap_{m\geq 1} mK_2(F)$ и $X(F)$ - периодическая группа, то определено и каноническое спаривание групп $K_2^{top}(F)$ и $X(F)$. Из свойств гомоморфизма h_F вытекает, что

$$(x,\ \chi_L)_L = (N_{L/F}x,\ \chi)_F, \tag{5}$$

где χ_L - характер $\chi\in X(F)$, рассматриваемый на группе Gal (L^{sep}/L), x принадлежит $K_2^{top}(L)$;

$$(\{t_1,\ t_2\},\ \chi)_F = \chi_0(\Delta), \tag{6}$$

если характер $\chi\in X(F)$ является подъемом характера χ_0 из группы $X(\mathbb{F}_q)$, Δ - автоморфизм Фробениуса из группы Gal $(\mathbb{F}_q^{sep}/\mathbb{F}_q)$.

Пусть поле F содержит первообразный корень m-й степени из единицы ξ_m. Определим $\lambda:\mu_m \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ формулой $\lambda(\xi_m)\equiv 1 \bmod m\mathbb{Z}$ и гомоморфизм $\tau: F^*/F^{*m} \longrightarrow {}_mX(F)$ формулой

$$\tau\ :\ F^*/F^{*m} \xrightarrow{\sim} H^1(F,\mu_m) \xrightarrow[\sim]{\lambda} H^1(F,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = {}_mX(F).$$

Символ Гильберта в двумерном локальном поле F, содержащем μ_m,

$$(\quad)_H\ :\ F^* \times F^* \times F^* \longrightarrow \mu_m$$

определяется формулой $(x,y,z)_H=\lambda^{-1}(\{x,y\},\ \tau(z))_F$. Тогда $(x,1-y,y)_H=1$, если $y\neq 0,1$, так как $1-y$ является нормой в расширении $F(\sqrt[m]{y})/F$.

В работе [15] введено вспомогательное спаривание

$$<\quad>_T\ :\ F^* \times F^* \times F^* \longrightarrow \mu_{p^r}.$$

Элементам α_1, α_2, α_3 группы F^* ставится в соответствие

$$<\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3>_T = \xi_{p^r}^{\mathrm{tr\ res}\ \Phi/s},$$

где tr - оператор следа в поле $\mathbb{Q}_p$ из подполя инерции максимального числового локального подполя F, ряд Φ определяется с помощью разложения элементов α_1, α_2, α_3 в ряды по системе параметров t_2, t_1 с коэффициентами из кольца целых подполя инерции, s зависит от разложения корня ξ_{p^r} в ряд по t_2, t_1 (см. подробнее [15]). Там же доказывается, что введенное вспомогательное спаривание $<\ >_T$ определено корректно, является мультипликативным, удовлетворяет соотношению Стейнберга и невырождено.

Если $E(\varphi)=\exp\ (\varphi + \frac{\varphi^{\Delta}}{p} + \frac{\varphi^{\Delta^2}}{p^2} +\dots)$ для ряда $\varphi(X)$ без свободного члена, то непосредственным вычислением показывается, что

$$<t_1,\ t_2,\ E(as(X))\ |_{X=T}>_T = \xi_{p^r}^{\mathrm{tr}\ a},$$

где a - элемент кольца целых подполя инерции;

$$\langle t_1, t_2, 1 - \theta t_2^{i_2} t_1^{i_1} \rangle_T = 1, \text{ если } (i_1, i_2) \text{ не делится на } p, \tag{7}$$

$$\langle t_i, 1 - \theta t_2^{i_2} t_1^{i_1}, 1 - \eta t_2^{j_2} t_1^{j_1} \rangle_T = 1, \quad i=1 \text{ или } i=2, \tag{8}$$

если $(i_1+j_1,\ i_2+j_2) > \frac{p}{p-1} \bar{e}_F$, $r=1$ и

$$\langle t_i,\ 1-\theta t_2^{i_2} t_1^{i_1},\ 1-\eta t_2^{j_2} t_1^{j_1} \rangle_T = \xi_p^{\mathrm{tr}\ \theta\eta a^{-1} i_k}, \tag{9}$$

если $r=1$, $(i_1+j_1,\ i_2+j_2) = \frac{p}{p-1} \bar{e}_F$, a – коэффициент при $X_1^{\frac{pe_1}{p-1}} X_2^{\frac{pe_2}{p-1}}$ у ряда $s(X_1, X_2)$, i_k – одно из чисел i_2, i_1, не делящееся на p.

П р е д л о ж е н и е 7. *Каноническое спаривание* $(\,,\,)_F$ *является непрерывным гомоморфизмом* $K_2^{\mathrm{top}}(F) \times X(F)$ *в* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проверить, что ядро отображения $\rho: x \longmapsto (x, \chi)_F$ есть открытая подгруппа в $K_2^{\mathrm{top}}(F)$ для любого $\chi \in X(F)$. По свойству (5) $\mathrm{Ker}\ \rho$ содержит подгруппу $N_{L/F} K_2^{\mathrm{top}}(L)$, где L/F – расширение, соответствующее характеру χ. Тогда из леммы 3 получаем, что эта норменная подгруппа открыта, следовательно, и $\mathrm{Ker}\ \rho$ является открытой.

П р е д л о ж е н и е 8. (*Невырожденность справа канонического спаривания*). *Если* $(x, \chi)_F = 0$ *для всех* $x \in K_2^{\mathrm{top}}(F)$, *то* $\chi = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\chi \in X(F)$ имеет порядок m и поле F содержит первообразный корень m-й степени из единицы ξ_m. Из предложения 7 следует, что символ Гильберта $(\ )_H: F^* \times F^* \times F^* \longrightarrow \mu_m$ является непрерывным по каждому аргументу и доопределяется до

$$(\ )_H:\ K_3^{\mathrm{top}}(F) \longrightarrow \mu_m,$$

а из свойства (6) канонического спаривания следует, что

$$(t_1, t_2, x)_H = \sqrt[m]{x}^{\,\Delta} / \sqrt[m]{x},$$

где Δ – поднятие автоморфизма Фробениуса в $\mathrm{Gal}\ (F^{\mathrm{sep}}/F)$.

Если m взаимно просто с $p = \mathrm{char}\ \mathbb{F}_q$, то

$$(t_1, t_2, \theta)_H = \theta^{\frac{q-1}{m}}, \quad \text{где } \theta \in \mathcal{R},$$

следовательно, символ Гильберта является в этом случае $\frac{q-1}{m}$-й степенью ручного символа, который невырожден [28].

Если $m = p^r$, то символ Гильберта определяется своими значениями на $(t_1, t_2, \omega(a))$, где $\omega(a) = E(as(X))|_{X=T}$, и поэтому совпадает со вспомогательным спариванием $\langle\ \rangle_T$, так как

$$(t_1, t_2, \omega(a))_H = \langle t_1, t_2, \omega(a)\rangle_T = \xi^{\mathrm{tr}\ a}.$$

Невырожденность вспомогательного спаривания дает в этом случае невырожденность символа Гильберта.

Если же $\xi_m \notin F$ и $\chi \in X(F)$ соответствует расширению L/F степени m, то по свойству (5) канонического спаривания

$$0 = (N_{F(\xi_m)/F}x,\ \chi)_F = (x,\ \chi_{F(\xi_m)})_{F(\xi_m)}$$

для всех $x \in K_2^{\mathrm{top}}(F(\xi_m))$, поэтому $\chi_{F(\xi_m)}=1$, значит, $L \subset F(\xi_m)$, следовательно, $\chi=1$.

С л е д с т в и е. *Пусть L/F - циклическое расширение степени m, $\chi \in X(F)$ - характер, соответствующий L/F. Тогда* $\mathrm{Ker}(x \longmapsto (x,\chi)_F) = N_{L/F}K_2^{\mathrm{top}}(L)$, *следовательно* $K_2^{\mathrm{top}}(F)/N_{L/F}K_2^{\mathrm{top}}(L)$ *- циклическая группа порядка m.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечено в доказательстве предложения 7, $N = \mathrm{Ker}\ (x \longmapsto (x,\chi)_F) \supset N_{L/F}K_2^{\mathrm{top}}(L)$. Из предложения 8 следует, что для простого делителя m_1 числа m найдется $x \in K_2^{\mathrm{top}}(F)$ такой, что $(x, \chi^{m/m_1})_F \neq 0$, значит, индекс N в $K_2^{\mathrm{top}}(F)$ не меньше m. Теперь из леммы 7 следует доказываемое утверждение.

3°. Отображение взаимности. Для всякого $x \in K_2^{\mathrm{top}}(F)$ отображение $\chi \longmapsto (x,\chi)_F$ является характером на $X(F)$, в силу теории двойственности этот характер можно однозначно записать в виде $\chi \longmapsto \chi(\sigma)$, где $\sigma \in \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$. Определенный таким образом гомоморфизм

$$\Psi_F\colon\ K_2^{\mathrm{top}}(F) \underset{x \longrightarrow \sigma}{\longrightarrow} \mathrm{Gal}\ (F^{\mathrm{ab}}/F)$$

называется отображением взаимности. Тогда

$$(x,\chi)_F = \chi(\Psi_F(x)), \qquad x \in K_2^{\mathrm{top}}(F), \qquad \chi \in X(F).$$

Непрерывность Ψ_F следует из непрерывности канонического спаривания $(\ \ )_F$ (предложение 7).

Можно также определить двойственное отображение $\tilde{\Psi}_F\colon\ X(F) \longrightarrow X(K_2^{\mathrm{top}}(F))$ формулой

$$\tilde{\Psi}_F(\chi) = \chi \circ \Psi_F.$$

Тогда

$$\tilde{\Psi}_F(\chi)(x) = (x,\chi)_F.$$

Из функториальных свойств отображения h_F следует коммутативность диаграмм для конечного расширения полей L/F:

$$\begin{array}{ccc} K_2^{\mathrm{top}}(L) & \xrightarrow{\Psi_L} & \mathrm{Gal}\ (L^{\mathrm{ab}}/L) \\ \downarrow N_{L/F} & & \downarrow i \\ K_2^{\mathrm{top}}(F) & \xrightarrow{\Psi_F} & \mathrm{Gal}\ (F^{\mathrm{ab}}/F) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K_2^{\mathrm{top}}(L) & \xrightarrow{\Psi_L} & \mathrm{Gal}\ (L^{\mathrm{ab}}/L) \\ \uparrow j_* & & \uparrow \mathrm{tr}_{L/F} \\ K_2^{\mathrm{top}}(F) & \xrightarrow{\Psi_F} & \mathrm{Gal}\ (F^{\mathrm{ab}}/F) \end{array} \qquad (10)$$

где правое вертикальное отображение в первой диаграмме является ограничением

$\sigma \in \mathrm{Gal}\,(L^{ab}/L)$ на $\mathrm{Gal}\,(F^{ab}/F)$, правое вертикальное отображение во второй диаграмме $\mathrm{tr}_{L/F}$ является перемещением ([4], гл.5), левое вертикальное отображение индуцировано включением $j: F \hookrightarrow L$.

Невырожденность справа канонического спаривания $(\ \ )_F$ эквивалентна инъективности отображения $\tilde{\Psi}_F$ и эквивалентна, согласно теории характеров, следующему свойству: группа $\tilde{\Psi}_F(K_2^{top}(F))$ всюду плотна в $\mathrm{Gal}\,(F^{ab}/F)$.

Предложение 9. („*Теорема существования*"). *Гомоморфизм* $\tilde{\Psi}_F$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Отображения i, $N_{L/F}$, $\mathrm{tr}_{L/F}$, j_* индуцируют отображения $\tilde{j}_*: X(K_2^{top}(L)) \longrightarrow X(K_2^{top}(F))$, $\tilde{\mathrm{tr}}_{L/F}: X(L) \longrightarrow X(F)$, $\tilde{N}_{L/F}: X(K_2^{top}(F)) \longrightarrow X(K_2^{top}(L))$, $\tilde{i}: X(F) \longrightarrow X(L)$. Ввиду инъективности $\tilde{\Psi}$ и коммутативности диаграмм (10) являются коммутативными диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X(L) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_L} & X(K_2^{top}(L)) \\ \uparrow \tilde{i} & & \uparrow \tilde{N}_{L/F} \\ X(F) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_F} & X(K_2^{top}(F)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X(L) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_L} & X(K_2^{top}(L)) \\ \downarrow \tilde{\mathrm{tr}}_{L/F} & & \downarrow \tilde{j}_* \\ X(F) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_F} & X(K_2^{top}(F)) \end{array}$$

причем $\mathrm{tr}_{L/F}\circ\, \tilde{i} = [L:F]$, $\tilde{N}_{L/F}\circ\, \tilde{j}_* = [L:F]$. Заметим также, что $\tilde{i}(\chi) = \chi_L$.

Доказательство предложения состоит из четырех частей: в а) проверяется, что каждый непрерывный характер на $K_2^{top}(F)$ имеет конечный порядок; в б) проверяется, что если $\xi_\ell \in F$ и ψ - характер порядка ℓ на $K_2^{top}(F)$, ℓ - простое число, то $\psi \in \mathrm{Im}\,\tilde{\Psi}_F$; в в) показывается, что предположение $\xi_\ell \in F$ можно опустить; наконец, в г) доказательство проводится в общем случае.

а) Каждый непрерывный характер на $K_2^{top}(F)$ имеет конечный порядок. Действительно, $K_2^{top}(F)$ порождается элементами вида $\{t_i; x\}$, $i=1,2$, $x \in F^*$, поэтому для непрерывного характера $\psi \in X(K_2^{top}(F))$ найдется число m такое, что $\psi(U_m K_2^{top}(F)) = 0$, значит, для подходящей степени p^s имеем $p^s\psi(U_1 K_2^{top}(F)) = 0$, а так как непрерывные характеры на $\bar{F}^*$ имеют конечный порядок, то и ψ - конечного порядка.

б) Пусть ℓ - простое число, и первообразный корень ξ_ℓ содержится в поле F, ψ - характер порядка ℓ из $X(K_2^{top}(F))$. Докажем, что найдется $y \in F^*$ такой, что для всех $x \in K_2^{top}(F)$

$$\lambda(x, y)_H = \psi(x). \tag{11}$$

Тогда благодаря инъективности $\tilde{\Psi}_F$ получим $\psi = \tilde{\Psi}_F(\tau(y))$.

Обозначим через K ядро характера ψ. Если ℓ взаимно просто с p, то K содержит подгруппу в $K_2^{top}(F)$, порожденную элементами $\{x, y\}$, где $x \in 1+\mathfrak{m}$, $y \in F^*$, поэтому либо $\{t_1, t_2\}$, либо $\{\theta, t_1\}$, либо $\{\theta, t_2\}$ не содержится в K при некотором $\theta \in \mathcal{R}$. Так как $(\ \ )_H$ в этом случае является степенью ручного символа, то в качестве y в (11) нужно взять подходящее $\theta \in \mathcal{R}$ либо t_2, либо t_1.

Пусть теперь $\ell = p$. Будем использовать топологический базис группы $K_2^{top}(F)/pK_2^{top}(F)$ [23] и формулы (7)-(9) для вспомогательного спаривания $<\ \ >_T$. Для элемента $x = \{1-\theta t_2^{i_2} t_1^{i_1}, t_k\}$ системы образующих группы $K_2^{\rm top}(F)$ $(k=1,2)$ через x' обозначим элемент $1-\theta' t_2^{\frac{pe_2}{p-1}-i_2} t_1^{\frac{pe_1}{p-1}-i_1}$ при подходящем $\theta'\in\mathcal{R}$, чтобы

$$\langle x, x'\rangle_T = \xi_p.$$

Отметим, что из двух элементов $\{1-\theta t_2^{i_2} t_1^{i_1}, t_1\}$ и $\{1-\theta t_2^{i_2} t_1^{i_1}, t_2\}$ при $(i_1, i_2) < (\frac{pe_1}{p-1}, \frac{pe_2}{p-1})$ только один входит в систему образующих.

Можно считать, что K не содержит подгруппу в $K_2^{\rm top}(F)$, порожденную элементами $\{a,b\}$, где $a\in U_1$, $b\in F^*$, иначе положим в (11)

$$y = \delta = 1 - \eta t_2^{\frac{pe_2}{p-1}} t_1^{\frac{pe_1}{p-1}}.$$

Если $\{\delta, t_1\}$ или $\{\delta, t_2\}$ не содержится в K (обозначим тогда этот элемент через x_0), то положим $y_0=t_1$ или $y_0=t_2$ так, чтобы

$$\langle x_0, y_0\rangle_T = \xi_p.$$

Если же $\{\delta, t_1\}$ и $\{\delta, t_2\}$ содержатся в K, то пусть (i_0, j_0) - наибольший индекс в $\mathbb{Z}^2$, для которого элемент топологического базиса $K_2^{\rm top}(F)/pK_2^{\rm top}(F)$ $\{1-\theta t_2^{j_0} t_1^{i_0}, t_2\}$ или $\{1-\theta t_2^{j_0} t_1^{i_0}, t_1\}$ не содержится в K ((i_0, j_0) существует благодаря открытости K). Обозначим этот элемент через x_0 и положим $y_0=x_0'$, тогда

$$\langle 1-\theta t_2^{i_2} t_1^{i_1}, t_k, y_0\rangle_T = 1 \qquad k = 1,2,$$

если $(i_1, i_2) > (i_0, j_0)$.

Так как K - подгруппа индекса p, то для элемента $\{1-\eta t_2^{j_0} t_1^{i_0-m}, t_k,\}$ из системы образующих найдется целое число c_m такое, что $x_m = \{1-\eta t_2^{j_0} t_1^{i_0-m}, t_k\}+c_m x_0\in K$. Для x_m положим $y_m = \{1-\eta t_2^{j_0} t_1^{i_0-m}, t_k\}'$, тогда

$$\langle x_{m_1}, y_{m_2}\rangle_T = \xi_p^{\delta_{m_1,m_2}}$$

при $m_1\le m_2$, и $\overline{v}(y_m-1)$ возрастает с ростом m.

Подбирая подходящие a_m, получим, что $y_{10} = y_0 y_1^{a_1} y_2^{a_2}\ldots$ обладает свойством

$$\langle x_m, y_{10}\rangle_T = 1, \qquad m \ne 0,$$
$$\langle x_0,\ y_{10}\rangle_T = \xi_p.$$

Следующий шаг. Пусть i_1 - наименьшее целое число, для которого $\{1-\theta t_2^{j_0-1} t_1^{i}, t_k\}$ из топологического базиса при $i\ge i_1$ содержится в K и

$$\langle 1-\theta t_2^{j_0-1} t_1^{i}, t_k, y_{10}\rangle_T = 1.$$

Подберем целые d_m, чтобы $x_{1m} = \{1-\theta t_2^{j_0-1} t_1^{i_1-m}, t_k\}+d_m x_0$ содержались в K, и положим $y_{1m} = \{1 - \theta\, t_2^{j_0-1} t_1^{i_1-m}, t_k\}'$. Тогда аналогично подбору a_m выберем b_m, чтобы $y_{20} = y_{10} y_{11}^{b_1} y_{12}^{b_2}\ldots$ удовлетворял соотношению

$$\langle x_{1m}, y_{20}\rangle_T = 1, \qquad m\ge 1.$$

Продолжая этот процесс, строим $y\in F^*$, для которого

$$<x_0, y>_T = \xi_p,$$

и, если для $\{1-\theta t_2^{i_2} t_1^{i_1}, t_k\}$ из топологического базиса $x = \{1-\theta t_2^{i_2} t_1^{i_1}, t_k\} + cx_0 \in K$, то $<x, y>_T = 1$. Теперь возьмем для элемента $z \in K$ его разложение по топологическому базису z_m:

$$z = \sum e_m z_m = \sum e_m (z_m + c_m x_0) - (\sum e_m c_m) x_0,$$

где c_m - такие целые числа, что $z_m + c_m x_0 \in K$. Тогда в сумме $\sum e_m c_m$ имеется лишь конечное число ненулевых слагаемых, и, так как $z \in K$, то $\sum e_m c_m \in p\mathbb{Z}$, поэтому

$$<z, y>_T = 1.$$

Итак, построен элемент $y \in F^*$, который ортогонален относительно $< \ >_T$ группе $K \subset K_2^{top}(F)$ и $<x_0, y>_T = \xi_p$. Следовательно, при подходящем r получим

$$\lambda(x, y^r)_H = \psi(x) \quad \text{для всех} \quad x \in K_2^{top}(F).$$

в) Если $\xi_\ell \notin F$, то пусть $L = F(\xi_\ell)$, тогда для характера порядка ℓ группы $K_2^{top}(F)$ $\psi \circ N_{L/F}$ принадлежит $X(K_2^{top}(L))$ благодаря лемме 6. Согласно пункту б), имеем $\tilde{N}_{L/F}\psi = \Psi_L(\chi)$ для некоторого $\chi \in X(L)$. Тогда $[L:F]_\psi = \tilde{J}\tilde{N}_{L/F}(\psi) = \tilde{\Psi}_F(\tilde{t}r_{L/F}\psi)$, поэтому $\psi \in \operatorname{Im} \tilde{\Psi}_F$.

г) Для доказательства предложения достаточно проверить сюръективность $\tilde{\Psi}_F$ для характеров из $X(K_2^{top}(F))$ порядка ℓ^n, где ℓ - простое число. Покажем это индукцией по n. Пусть $\psi \in X(K_2^{top}(F))$ - характер порядка ℓ^n, тогда найдется $\chi \in X(F)$, что $\tilde{\Psi}_F(\chi) = \ell^{n-1}\psi$, отсюда $\tilde{\Psi}_F(\ell\chi) = 0$ и $\ell\chi = 0$ ввиду инъективности $\tilde{\Psi}_F$.

Пусть L/F - циклическое расширение степени ℓ, соответствующее характеру χ, тогда из леммы 6 следует, что

$$\psi \circ N_{L/F} \in X(K_2^{top}(L))$$

и

$$\ell^{n-1}\psi \circ N_{L/F} = \tilde{\Psi}_L(\chi_L) = 0.$$

Следовательно, по индукционному предположению имеем $N_{L/F}\psi = \tilde{\Psi}_L(\chi_1)$ для некоторого $\chi_1 \in X(L)$ и соответственно

$$(x, \chi_1)_L = \psi(N_{L/F}x), \quad x \in K_2^{top}(F).$$

Отсюда вытекает, что для $\sigma\delta \in \operatorname{Gal}(L/F) = G$

$$0 = (\sigma x - x, \chi_1)_L = (x, \chi_1^{\sigma^{-1}-1})_L,$$

значит, $\chi_1 \in X(L)^G$, но отображение

$$X(F) \longrightarrow X(L)^G, \qquad \chi \longmapsto \chi_L,$$

сюръективно ([12], гл. 12, § 1), поэтому $\chi_1 = (\chi_2)_L$ для $\chi_2 \in X(F)$ и $\tilde{N}_{L/F}\psi = \tilde{N}_{L/F}\tilde{\Psi}_F(\chi_2)$, т.е. $\tilde{\Psi} = \Psi_F(\chi_2)$ обращается в 0 на $N_{L/F}K_2^{top}(F)$, поэтому, согласно следствию из предложения 8, $\ell(\psi - \tilde{\Psi}_F(\chi_2)) = 0$. Теперь применяем индукционное предположение и убеждаемся в справедливости предложения.

С л е д с т в и е. *Отображение взаимности Ψ_F инъективно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\Psi_F(x) = 0$, то x содержится в пересечении ядер всех непрерывных характеров на $K_2^{top}(F)$. Согласно доказанному предложению, это пересечение совпадает с пересечением всех открытых подгрупп конечного индекса в $K_2^{top}(F)$. Воспользуемся теперь непрерывным сюръективным отображением

$$F^* \times F^* \longrightarrow K_2^{top}(F)/p^r K_2^{top}(F),$$
$$x \times y \longmapsto \{x, t_1\} + \{y, t_2\}$$

(см. [24]).

Но пересечение всех открытых подгрупп конечного индекса в F^* есть единичная подгруппа, следовательно, пересечение всех открытых подгрупп конечного индекса в $K_2^{top}(F)$ равно нулевой подгруппе.

П р е д л о ж е н и е 10. *Пусть E - конечное расширение поля F, $L=E\cap F^{ab}$. Тогда для $x\in K_2^{top}(F)$ автоморфизм $\Psi_F(x)$ тождествен на L тогда и только тогда, когда $x\in N_{E/F}K_2^{top}(F)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $i:\mathrm{Gal}\ (E^{ab}/E) \longrightarrow \mathrm{Gal}\ (F^{ab}/F)$ – гомоморфизм ограничения, то элемент поля F^{ab} инвариантен относительно $i\ (\mathrm{Gal}\ (E^{ab}/E))$ тогда и только тогда, когда он лежит в E, т.е. в L. Поэтому $i\ \mathrm{Gal}\ (E^{ab}/E)$ - подгруппа в $\mathrm{Gal}\ (F^{ab}/F)$, соответствующая L. Из диаграммы (10) имеем

$$N_{E/F}K_2^{top}(E)\subset\Psi_F^{-1}(i\ \mathrm{Gal}\ (E^{ab}/E)).$$

Пусть ψ - характер на $K_2^{top}(F)$, обращающийся в ноль на $N_{E/F}K_2^{top}(E)$. Согласно лемме 7, ψ имеет конечный порядок, поэтому ввиду предложения 9 записывается в виде $\psi = \tilde{\Psi}_F(\chi)$, где $\chi \in X(F)$. Но $\psi\circ N_{L/F}$ обращается в ноль на $K_2^{top}(L)$, значит,

$$0 = \tilde{N}_{L/F}\ \psi = \tilde{N}_{L/F}\ \tilde{\Psi}_F(\chi) = \tilde{\Psi}_L(\tilde{i}\chi).$$

Ввиду инъективности $\tilde{\Psi}_L$ замечаем, что $\tilde{i}\chi = 0$, т.е. $\chi(i\ \mathrm{Gal}\ (E^{ab}/E)) = 0$ и $\psi(\Psi_F^{-1}i(\mathrm{Gal}\ (E^{ab}/E)))= 0$. Итак, любой непрерывный характер на $K_2^{top}(F)$, обращающийся в ноль на $N_{E/F}K_2^{top}(F)$, обращается в ноль на $\Psi_F^{-1}(i\ \mathrm{Gal}\ (E^{ab}/E))$, следовательно,

$$N_{E/F}\ K_2^{top}(F) = \Psi_F^{-1}(i\ \mathrm{Gal}\ (E^{ab}/E)).$$

Т е о р е м а. *Пусть F – двумерное разнохарактеристическое локальное поле. Для каждого расширения конечной степени L/F, $L\subset F^{ab}$, пусть G_L – подгруппа в $\mathrm{Gal}\ (F^{ab}/F)$, соответствующая L. Тогда*

$$N_{L/F}\ K_2^{top}(L) = \Psi_F^{-1}(G_L),$$

G_L является замыканием $\Psi_F(N_{L/F}K_2^{top}(L))$ в $\mathrm{Gal}\ (F^{ab}/F)$, Ψ_F определяет изоморфизм $K_2^{top}(F)/N_{L/F}K_2^{top}(L)$ на $\mathrm{Gal}\ (L/F)$. Отображение $L \longrightarrow N_{L/F}K_2^{top}(L)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между подполями L конечной степени над F в F^{ab} и открытыми подгруппами конечного индекса в $K_2^{top}(F)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\Psi_F K_2^{top}(F))$ всюду плотно в $\mathrm{Gal}\ (F^{ab}/F)$ и, согласно предложению 4, Ψ_F определяет изоморфизм

$$K_2^{\text{top}}(F)/N_{L/F}K_2^{\text{top}}(L) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}\ (L/F).$$

Пусть N - открытая подгруппа конечного индекса m в $K_2^{\text{top}}(F)$, ψ_i - все различные непрерывные характеры на $K_2^{\text{top}}(F)$, тривиальные на $N (1 \le i \le m)$. Тогда N является пересечением ядер этих характеров. Благодаря предложению 3 отыщутся характеры χ_i из $x(F)$ такие, что $\tilde{\Psi}_F(\chi_i)=\chi_i$.

Характеры χ_i однозначно определены (так как Ψ_F инъективно) и образуют конечную группу порядка m в $X(F)$. Пусть G_1 - пересечение ядер характеров χ_i. Это - открытая подгруппа индекса m в Gal (F^{ab}/F), поэтому подполе L в F^{ab}, соответствующее G_1, имеет степень m над F. Кроме того, $N = \Psi_F^{-1}(G_1)$, следовательно, $N = N_{L/F}K_2^{\text{top}}(L)$.

Список литературы

[1] Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж. Касселса и А. Фрелиха. М.: Мир, 1969. 483 с.

[2] Serre J.-P. Corps locaux. Paris. Hermann, 1962. 244 p.

[3] Weiss E. Algebraic number theory. New York etc., 1963. 275 p.

[4] Ивасава К. Локальная теория полей классов. М.: Мир, 1983. 184 с.

[5] Artin E., Tate J. Class field theory. Harvard, 1961.

[6] Меркурьев А.С., Суслин А.А. К-когомологии многообразий Севери-Брауэра и гомоморфизм норменного вычета // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т.264, N 3. С.1011-1046.

[7] Паршин А.Н. Поля классов и алгебраическая К-теория // Успехи мат. наук. 1975. Т.30, вып.1. С.253-254.

[8] Kato K. A generalization of local class field theory by using K-groups. I // J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect. 1A, 1979. Vol.26, N 2. P.303-376.

[9] Kato K. A generalization of local class field theory by using K-groups. II // J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect. 1A. 1980. Vol.27, N 3. P.603-683.

[10] Kato K. The existence theorem for higher local class field theory // Publ.IHES. 1980. Vol.43. P.1-37.

[11] Паршин А.Н. Локальная теория полей классов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1984. Т.165. С.143-170.

[12] Вейль А. Основы теории чисел. М.: Мир, 1972. 406 с.

[13] Neukirch J. Neubegrundung der Klassenkörpertheorie // Math.Z. 1984. Bd 186, N 4. S.557-574.

[14] Hazewinkel M. Local class field theory is easy // Advances in Math. 1975. Vol.18. P.148-181.

[15] Востоков С.В. Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1985. Т.49, N 2. С.283-308.

[16] Шафаревич И.Р. Общий закон взаимности // Мат. сб. 1950. Т.26(68),

N 1. C.113-146.

[17] Востоков С.В. Явная форма закона взаимности // Изв.АН СССР. Сер.мат. 1978. Т.42, N 6. С.1288-1321.

[18] Востоков С.В. Норменное спаривание в формальных модулях // Изв. АН СССР. Сер.мат. 1979. Т.43, N 4. С.765-794.

[19] Востоков С.В. Символы на формальных группах // Изв.АН СССР. Сер.мат. 1981. Т.45, N 5. С.985-1014.

[20] Фесенко И.Б. Обобщенный символ Гильберта в 2-адическом случае // Вестн.ЛГУ, 1985. Т.22. С.112-114.

[21] Фесенко И.Б. Обобщенный символ Гильберта в многомерных локальных полях // Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. Вып.2. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. С.88-92.

[22] Mac Kenzie R., Whaples G. Artin-Schreier equations in character istic zero // Amer.J. of Math. 1956. N 3. S.473-485.

[23] Востоков С.В., Жуков И.Б. Абелевы полуразветвленные расширения многомерного локального поля // Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. Вып.2. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. С.39-50.

[24] Фесенко И.Б. О К-группах многомерного локального поля // Укр.матем.журн. 1989. Т.41, N 2. С.266-268.

[25] Паршин А.Н. Абелевы накрытия арифметических схем // ДАН СССР. 1978. Т.243, N 4. С.855-858.

[26] Ломадзе В.Г. К теории ветвления двумерных локальных полей // Мат.сб. 1979. Т.109, N 3. С.378-394.

[27] Милнор Дж. Введение в алгебраическую К-теорию. М.: Мир, 1974. 200 с.

[28] Фесенко И.Б. Факторы К-групп Милнора многомерных локальных полей // Тезисы докладов XVIII Всесоюзной алгебраической конференции. Кишинев, 1985.

Ленинградский государственный университет Поступило 14 июня 1989 г.
198904, Ленинград, Ст.Петергоф, Библиотечная пл.,2