

ОТДЕЛ ЗАМЕТОК

УДК 517.54

Н. С. ДАИРБЕКОВ

К УСТОЙЧИВОСТИ КЛАССОВ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ
НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Введение

В основе теории устойчивости конформных отображений в равномерной норме лежат два способа измерения близости квазиконформного отображения к классу конформных отображений.

Первый способ связан с минимизацией по φ для данного $(1 + \varepsilon)$ -квазиконформного отображения f разности $f - \varphi$, φ пробегает весь класс конформных отображений. Однако устойчивость в этом случае доказана только внутри области, т. е. во всякой компактно лежащей под-области [1—4].

Второй способ для данного $(1 + \varepsilon)$ -квазиконформного отображения f минимизирует отклонение композиции $\varphi^{-1} \circ f$ от тождественного отображения. При таком способе измерения близости для областей достаточно общего вида, а именно областей типа Джона, доказана устойчивость порядка $C\varepsilon$ в равномерной норме в замкнутой области [5].

В [4] А. П. Копыловым развита концепция ξ -устойчивости, в которой формализованы понятия локальной и глобальной близости отображения к рассматриваемому достаточно общему классу отображений, восходящей к первому из приведенных выше способов измерения близости. В связи с этой концепцией важны оценки устойчивости класса конформных отображений в замкнутой области при первом из указанных способов измерения близости.

В данной заметке показано, что оценки такого типа могут быть получены из оценок устойчивости, связанных со вторым способом измерения близости.

2. Предварительные сведения

Через \mathbb{R}^n обозначим n -мерное арифметическое пространство (при этом \mathbb{R}^2 будем отождествлять с \mathbb{C} — комплексной плоскостью); $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < r\}$ — шар в \mathbb{R}^n (круг при $n = 2$) с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$ и радиусом $r > 0$.

Если A — ограниченная область в \mathbb{R}^n , то $R(A)$ — радиус наименьшего шара, содержащего A , $D(A)$ — диаметр A . Для неограниченной области $R(A) = D(A) = \infty$.

Через $\bar{\mathbb{R}}^n$ обозначено пространство Мёбиуса — пополнение \mathbb{R}^n одной бесконечно удаленной точкой ∞ .

Область $U \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ называется δ -однородной или принадлежит классу $U(\delta)$, $0 < \delta \leq 1$, если для любых точек $x_0, x_1 \in U$ существует континуум $X \subset U$ такой, что $x_0, x_1 \in X$ и $|x_0 - x_1| |z - y| / |x_i - z| |x_j - z| \geq \delta$, $i \neq j$, для всех $z \in X \setminus \{x_0, x_1\}$, $y \in \bar{\mathbb{R}}^n \setminus U$ [6].

Подобием называется композиция растяжения и движения.

3. Случай плоскости

Нам потребуется следующее утверждение, являющееся следствием хорошо известной теоремы М. А. Лаврентьева — П. П. Белинского.

Утверждение 1. Пусть $f: B(a, r) \rightarrow B(a, r)$ — K -квазиконформное отображение круга $B(a, r)$ на себя, нормированное условиями $f(a) = a$, $f(a+r) = a+r$. Тогда существует конформное отображение $\Phi: B(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ такое, что

$$|f(z) - \Phi(z)| \leq \alpha(K)r$$

для всех $z \in B(a, r)$, где $\alpha(K)$ — универсальная функция, $\alpha(K) \rightarrow \alpha(1) = 0$ при $K \rightarrow 1$.

Теорема 1. Пусть $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ — K -квазиконформное отображение области $\Delta \subset \mathbb{C}$. Тогда существует конформное отображение $\Phi: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ такое, что

$$|f(z) - \Phi(z)| \leq \alpha(K)R(f(\Delta))$$

для всех $z \in \Delta$, где функция α та же, что и в утверждении 1.

Замечание. В аналогичных неравенствах в [4] А. П. Копылов вместо $R(f(\Delta))$ использует величину $D(f(\Delta))$. Однако обе эти величины эквивалентны, т. е. существует оценка одной через другую и наоборот.

Доказательство. Теорема очевидна, если $f(\Delta)$ — неограниченная область, поэтому в дальнейшем считаем $f(\Delta)$ ограниченной областью.

Пусть $B(a, R)$ — наименьший круг, содержащий $f(\Delta)$. Определим в нем измеримую по Лебегу функцию $q: B(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$ следующим образом:

$$q(\zeta) = \begin{cases} -f_z(f^{-1}(\zeta))/(\bar{f}_z(f^{-1}(\zeta))), & \zeta \in f(\Delta), \\ 0, & \zeta \notin f(\Delta). \end{cases}$$

Тем самым q определена почти всюду в $B(a, R)$ и почти для всех $\zeta \in B(a, R)$ $|q(\zeta)| \leq (K-1)/(K+1) < 1$. Согласно известным результатам теории систем Бельтрами [7] существует гомеоморфное решение системы Бельтрами $\varphi_{\bar{z}} = q\varphi_{\zeta}$, отображающее круг $B(a, R)$ на себя и нормированное условиями $\varphi(a) = a$, $\varphi(a+R) = a+R$.

Пусть $\psi = \varphi \circ f$. Тогда отображение $\psi: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ квазиконформно. Элементарное вычисление показывает, что $\psi_{\bar{z}} = 0$, следовательно, ψ — конформное отображение.

Отображение φ^{-1} удовлетворяет условиям утверждения 1. Поэтому существует конформное отображение $h: B(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$ такое, что $|\varphi^{-1}(\zeta) - h(\zeta)| \leq \alpha(K)R$ для всех $\zeta \in B(a, R)$. Подставляя сюда $\zeta = \psi(z)$ и учитывая равенство $\varphi^{-1} \circ \psi = f$, получим заключение теоремы.

4. Случай пространства

Следующее утверждение хорошо известно в теории устойчивости пространственных квазиконформных отображений.

Утверждение 2. Существуют $\varepsilon_1 > 0$ и $C_1 < \infty$, зависящие только от n и такие, что для любого $(1 + \varepsilon)$ -квазиконформного отображения $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ с $\varepsilon < \varepsilon_1$ и любого шара $B(c, r)$ найдется подобие T такое, что

$$|Tf(x) - x| \leq C_1\varepsilon r$$

для всех $x \in B(c, r)$.

Кроме того, будем опираться на теорему о продолжении пространственных отображений, близких к конформным, из области во все пространство [8, 9].

Утверждение 3. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — область класса $U(\delta)$. Тогда существуют $\varepsilon_2 > 0$ и $C_2 < \infty$, зависящие только от δ и n , такие, что всякое

$(1 + \varepsilon)$ -квазиконформное отображение $f: U \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ с $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ допускает $(1 + C_2\varepsilon)$ -квазиконформное продолжение во все пространство.

Теорема 2. Пусть $\Delta \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ — область класса $U(\delta)$. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $C < \infty$, зависящие только от δ и n , такие, что для любого $(1 + \varepsilon)$ -квазиконформного отображения $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ с $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ существует конформное (мёбиусово) отображение $\varphi: \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ такое, что

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq C\varepsilon R(f(\Delta))$$

для всех $x \in \Delta$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2 считаем $f(\Delta)$ ограниченной областью. Выберем ε_0 настолько малым, чтобы в нижеследующих рассуждениях были применимы утверждения 2 и 3.

По утверждению 3 существует $(1 + C_2\varepsilon)$ -квазиконформное продолжение f во все пространство

$$F: \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n, \quad F|_{\Delta} \equiv f.$$

Пусть Ψ — мёбиусово отображение пространства $\bar{\mathbb{R}}^n$, удовлетворяющее условию $F(\Psi(\infty)) = \infty$. Положим $g = F \circ \Psi$. Тогда g — также $(1 + C_2\varepsilon)$ -квазиконформное отображение, причем $g(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим область $G = \Psi^{-1}(\Delta)$. Тогда G — δ -однородная область. А так как $g(G) = f(\Delta)$ — ограниченная область и g отображает \mathbb{R}^n на \mathbb{R}^n , то G — ограниченная область в \mathbb{R}^n . Значит, $D(G) < \infty$. Из определения однородной области можно легко вывести существование шара $B(a, \delta D/4)$, лежащего в G :

$$B(a, \delta D/4) \subset G \subset B(a, D), \quad D = D(G). \quad (1)$$

В силу утверждения 2 существует подобие T такое, что

$$|T^{-1}g(x) - x| \leq C_1 C_2 \varepsilon D \quad (2)$$

для всех $x \in B(a, D)$.

Из (1) и (2) непосредственно следует включение

$$T^{-1}g(G) \supset B(a, (\delta/4 - C_1 C_2 \varepsilon)D).$$

Отсюда $T(B(a, (\delta/4 - C_1 C_2 \varepsilon)D)) \subset g(G) = f(\Delta) \subset B(c, R)$, где $B(c, R)$ — наименьший шар, содержащий $f(\Delta)$.

Поэтому

$$\|T'\| \leq R / ((\delta/4 - C_1 C_2 \varepsilon)D). \quad (3)$$

Здесь $\|T'\|$ — норма производного отображения подобия T .

Используя (2) и (3), для $x \in B(a, D)$ получаем

$$|g(x) - T(x)| \leq \|T'\| |T^{-1}g(x) - x| \leq C_1 C_2 \varepsilon R / (\delta/4 - C_1 C_2 \varepsilon).$$

Подставляя в это неравенство $g = F \circ \Psi$, перепишем его в виде

$$|F(\Psi(x)) - T\Psi^{-1}(\Psi(x))| \leq C_1 C_2 \varepsilon R / (\delta/4 - C_1 C_2 \varepsilon).$$

Учитывая, что $\Psi(G) = \Delta$ и $F|_{\Delta} \equiv f$, для $x \in \Delta$ выводим неравенство

$$|f(x) - T\Psi^{-1}(x)| \leq C_1 C_2 \varepsilon R / (\delta/4 - C_1 C_2 \varepsilon).$$

При малых ε правая часть последнего неравенства допускает линейную по ε оценку, тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А.* Sur une classe de représentations continues.— *Мат. сб.*, 1935, т. 42, с. 407—423.
2. *Лаврентьев М. А.* Об устойчивости в теореме Лиувилля.— *Докл. АН СССР*, 1954, т. 95, № 5, с. 925—926.
3. *Решетняк Ю. Г.* Об устойчивости конформных отображений в многомерных пространствах.— *Сиб. мат. журн.*, 1967, т. 8, № 1, с. 91—114.

4. Копылов А. П. Об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений. I. Концепция устойчивости. Теорема Лиувилля.— Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 2, с. 83—111.
5. Решетняк Ю. Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе.— Новосибирск: Наука, 1982.
6. Martio O. Definitions for uniform domains.— Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, 1980, v. 5, p. 197—205.
7. Берс Л., Джон Ф., Шефтер М. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1966.
8. Копылов А. П. О граничных значениях отображений полупространства, близких к конформным.— Сиб. мат. журн., 1983, т. 24, № 5, с. 76—93.
9. Троценко Д. А. Продолжение из области и аппроксимация пространственных квазиконформных отображений с малым коэффициентом искажения.— Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 6, с. 1331—1333.

г. Новосибирск

Статья поступила
31 мая 1985 г.

УДК 514.17/177.2

И. В. ПОЛИКАНОВА, Г. Я. ПЕРЕЛЬМАН

ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ ХЕЛЛИ

При изучении одного класса m -мерных поверхностей, обобщающих поверхности, которые являются пересечением $n - m$ гладких выпуклых гиперповерхностей в n -мерном евклидовом пространстве E^n , возникла необходимость в метрическом аналоге теоремы Хелли. Классическая теорема Хелли утверждает: если все множества некоторого семейства компактных выпуклых множеств в E^n имеют пустое пересечение, то среди них есть не более $n + 1$ множеств с пустым пересечением [1].

Условимся относительно обозначений: \emptyset — пустое множество; $\mu_n(K)$, $\dim K$ — соответственно n -мерный объем и размерность выпуклого множества K ; если \mathfrak{B} — семейство множеств, то $\cap \mathfrak{B}$ — пересечение всех множеств этого семейства.

Основной результат статьи — следующая

Теорема 1. Пусть \mathfrak{B} — ограниченное семейство компактных выпуклых множеств в E^n такое, что $\mu_n(\cap \mathfrak{B}) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $n + 1$ множеств $F_1, F_2, \dots, F_{n+1} \in \mathfrak{B}$ таких, что $\mu_n\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i\right) < \varepsilon$. Более того, если $\dim \cap \mathfrak{B} = l$, $0 \leq l < n$, то существует $n - l + 1$ выпуклых множеств $F_1, \dots, F_{n-l+1} \in \mathfrak{B}$ таких, что $\mu_n\left(\bigcap_{i=1}^{n-l+1} F_i\right) \leq \varepsilon$.

С помощью теоремы выбора Бляшке [2, с. 81] можно доказать, что для всякого ограниченного семейства \mathfrak{B} компактных выпуклых множеств в E^n объема не меньше чем ε , $\varepsilon > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что любое множество $F \in \mathfrak{B}$ содержит шар радиуса δ . Поэтому теорема 1 допускает и такую формулировку: пусть \mathfrak{B} — ограниченное семейство выпуклых компактных множеств в E^n ,

$$f(n, l) = \begin{cases} n + 1 & \text{при } l = n, \\ n - l + 1 & \text{при } 1 \leq l \leq n - 1. \end{cases}$$

Если для некоторого $\varepsilon > 0$ каждые $f(n, l)$ членов из \mathfrak{B} содержат общий n -мерный шар радиуса ε , то

1) $\dim \cap \mathfrak{B} = n$ при $l = n$,

2) $\dim \cap \mathfrak{B} = n$ либо $\dim \cap \mathfrak{B} < l$ при $1 \leq l \leq n - 1$.

В такой терминологии становится очевидным, что этот результат частично пересекается с результатами Брин и Качальского (случай $l = n$)