Теорема 2. *Множество* $\{S(P, Q)\}$ *всюду плотно в* H_+.

Доказательство. Достаточно показать, что из равенства $(S, \xi)_+ = 0 \ \forall P, Q$ следует $\xi = 0$, где $\xi \in M$.

Используя симметричность оператора A, по формуле Грина имеем $(S, \xi)_+ = (AS, \xi) = (S, A\xi) = 0 \ \forall P, Q$.

В силу положительной определенности оператора A решение задачи (4), (5) единственно, поэтому достаточно показать, что $\eta = A\xi = 0$.

Интегрируя по частям, получим

$$(S, \eta) = (Q, \eta\lambda) + (P, R\eta) = 0 \quad \forall P, Q. \tag{9}$$

Здесь $S = (1+\beta)P + \mu \dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial P}{\partial y}$, где $\alpha = \dfrac{\omega}{D_n\omega + \omega}$, $\mu = \alpha \dfrac{\partial \omega}{\partial x}$, $\nu = \alpha \dfrac{\partial \omega}{\partial y}$, $\lambda = \alpha\omega$, $\lambda \neq 0$ в Ω, $\beta = \alpha h_1$, $R\eta = (1+\beta)\eta + \dfrac{\partial(\nu\eta)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\mu\eta)}{\partial y}$.

Из (9) и теоремы Вейерштрасса о полноте множества многочленов в $C(\overline{\Omega})$ следует, что $\eta = 0$. Теорема 2 доказана.

Автор благодарит А. В. Костерина за помощь и советы, оказанные при выполнении работы.

Литература

1. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах.— Киев: Наукова думка, 1976.—289 с.
2. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.— Дифференц. уравнения, 1973, т. 9, № 4, с. 771—773.
3. Кравченко В. Ф., Слесаренко А. П., Рвачев В. Л.— Дифференц. уравнения, 1970, т. 6, № 10, с. 1851—1858.
4. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике.— М.: Наука, 1970.—512 с.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа.— М.: Наука, 1972.—496 с.
6. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во Ленинград. гос. ун-та, 1950.—255 с.

Институт математики и механики Казанского университета

Поступила в редакцию 24 декабря 1979 г.

УДК 517.925

П. Н. ЗЮКИН

К ТЕОРЕМЕ КУЗНЕЦОВА—МАЛЬГРАНЖА

А. Н. Кузнецов [1] и Б. Мальгранж [2] доказали следующую фундаментальную теорему:

Теорема. *Если система обыкновенных дифференциальных уравнений* $x^k y' + f(x, y) = 0$ *с гладкой (бесконечно дифференцируемой) функцией* $f(x, y)$ *имеет формальное решение, то в окрестности нуля существует гладкое решение, для которого коэффициенты ряда Тейлора совпадают с коэффициентами ряда формального решения.*

Доказательство теоремы опирается на исследование глубоких алгебраических свойств кольца дифференциальных полиномов.

В настоящей заметке эта теорема для случая $k=1$ обобщается на дифференциальное уравнение в банаховом пространстве и доказывается без привлечения алгебраических средств с использованием одного результата В. П. Глушко [3].

В банаховом пространстве E рассматривается дифференциальное уравнение

$$xy' + f(x, y) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant a), \tag{1}$$

где $f(x, y)$ — бесконечно дифференцируемая функция на $[0, a] \times E$ со значениями в E, а $y(x)$ — искомая функция со значениями в E.

Теорема 1. *Предположим, что существуют первые* $k (k \geqslant 1)$ *коэффициентов ряда формального решения уравнения (1):*

$$y(0), \frac{y'(0)}{1!}, \ldots, \frac{y^{(k-1)}(0)}{(k-1)!},$$

и что спектр оператора $f'_y(0, y(0))$ *лежит в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda > -k$.

Тогда на некотором отрезке $[0, a_1] \subset [0, a]$ *существует гладкое решение уравнения (1) такое, что*

$$y(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{y^{(i)}(0)}{i!} x^i + x^k z(x), \tag{2}$$

где $z(x)$ *— гладкая функция.*

Решение вида (2) с непрерывной на $[0, a_1]$ функцией $z(x)$ из некоторого шара пространства $C([0, a_1]; E)$ единственно.

Доказательство. Сделаем в уравнении (1) замену

$$y(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{y^{(i)}(0)}{i!} x^i + y_1(x). \tag{3}$$

Тогда получим уравнение

$$xy_1' + x\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{y^{(i)}(0)}{i!} x^i\right)' + f\left(x, \sum_{i=0}^{k-1} \frac{y^{(i)}(0)}{i!} x^i + y_1\right) = 0,$$

или короче

$$xy_1' + F(x, y_1) = 0. \tag{4}$$

Очевидно, что равенство (3) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между гладкими решениями вида (2) уравнения (1) и гладкими решениями уравнения (4), удовлетворяющими начальным условиям $y_1(0) = y_1'(0) = \ldots = y_1^{(k-1)}(0) = 0$.

Разлагая в уравнении (4) $F(x, y_1)$ по y_1 по формуле Тейлора:

$$F(x, y_1) = F(x, 0) + F_{y_1}'(x, 0)\, y_1 + \tilde{F}(x, y_1),$$

делая замену $y_1(x) = x^k z(x)$ и деля уравнение на x^k, получаем

$$xz' + (F_{y_1}'(x, 0) + kI)\, z + \frac{F(x, 0)}{x^k} + \frac{\tilde{F}(x, x^k z)}{x^k} = 0. \tag{5}$$

Так как

$$F(x, 0) = x\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{y^{(i)}(0)}{i!} x^i\right)' + f\left(x, \sum_{i=0}^{k-1} \frac{y^{(i)}(0)}{i!} x^i\right),$$

то в силу условия теоремы эта функция имеет в точке $x=0$ нуль кратности k и, следовательно, по лемме Адамара (см. [4]) функция $\dfrac{F(x, 0)}{x^k}$ гладкая на $[0, a]$.

Лемма 1. *Если функция* $z(x) \in C^n([0, a]; E)$, *то и функция* $\tilde{F}(x, x^k z(x))/x^{k+1} \in C^n([0, a]; E)$, $n = 0, 1, \ldots$

Доказательство. Пользуясь интегральной формой остаточного члена в формуле Тейлора (см. [5]), получаем $\tilde{F}(x, x^k z) = \int_0^1 (1-t)\, F_{y_1 y_1}''(x, tx^k z)(z, z)\, dt \cdot x^{2k}$, откуда следует утверждение леммы.

Из теоремы 2.6 в [3] вытекает следующий факт: пусть в линейном уравнении $ty' + B(t)\, y + f(t) = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant a)$ $B(t)$ — гладко зависящий от t линейный ограниченный оператор в E, а $f(t)$ — гладкая функция со значениями в E. Если спектр оператора $B(0)$ лежит внутри полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$, то существует единственное гладкое решение этого уравнения и оно представимо в виде

$$y(t) = \int_t^0 U(t, s) \frac{f(s)}{s}\, ds,$$

где $U(t, s)$ — разрешающий оператор соответствующего однородного уравнения.

Из всего предыдущего следует, что гладкие решения уравнения (5) совпадают с гладкими решениями интегрального уравнения

$$z(x) = \int_x^0 U(x, s) \frac{\dfrac{F(s, 0)}{s^k} + \dfrac{\tilde{F}(s, s^k z(s))}{s^k}}{s}\, ds = \Theta z(x), \tag{6}$$

где $U(x, s)$ — разрешающий оператор уравнения

$$xv' + (F_{y_1}'(x, 0) + kI)v = 0. \tag{7}$$

При этом мы воспользовались тем, что $F'_{y_1}(0, 0) = f'_y(0, y(0))$ и, следовательно, спектр оператора $F'_{y_1}(0, 0) + kI$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Покажем, что существует такое число $a_1 \in (0, a]$, что оператор в правой части уравнения (6) является сжимающим оператором в шаре T единичного радиуса в пространстве $C([0, a_1]; E)$ с центром в

$$\varphi(x) = \int_x^0 U(x, s) \frac{F(s, 0)}{s^{k+1}} ds \in C([0, a_1]; E).$$

Заметим, что в силу сформулированной теоремы $\varphi(x) \in C^\infty([0, a_1]; E)$. Имеем

$$\|\tilde{F}(x, y) - \tilde{F}(x, z)\| = \|F(x, y) - F(x, z) - F'_{y_1}(x, z)(y - z) + F'_{y_1}(x, z)(y - z) -$$

$$- F'_{y_1}(x, 0)(y - z)\| \leqslant \|y - z\| \sup_{0<q<1} \|F'_{y_1}(x, z + q(y - z)) - F'_{y_1}(x, z)\| +$$

$$+ \|y - z\| \|F'_{y_1}(x, z) - F'_{y_1}(x, 0)\| \leqslant \|y - z\|^2 \sup_{0<q<1} \|F''_{y_1 y_1}(x, z + q(y - z))\| +$$

$$+ \|y - z\| \|z\| \sup_{0<q<1} \|F''_{y_1 y_1}(x, qz)\|. \tag{8}$$

Пусть $\|F''_{y_1 y_1}(0, 0)\| = M$, тогда найдутся такие числа $a_1 \in (0, a]$ и $\sigma > 0$, что при $x \in [0, a_1]$ и $\|y\| \leqslant \sigma$ выполняется неравенство $\|F''_{y_1 y_1}(x, y)\| \leqslant 2M$.

Отсюда и из (8) вытекает, что

$$\|\tilde{F}(x, y) - \tilde{F}(x, z)\| \leqslant 2M(\|y - z\|^2 + \|z\| \cdot \|y - z\|) \tag{9}$$

при $x \in [0, a_1]$, $\|y\|$, $\|z\| \leqslant \sigma$.

Напомним (см. [3]), что для разрешающего оператора уравнения (7) справедлива оценка $\|U(x, s)\| \leqslant N \frac{s^\nu}{x^\nu}$, $0 < s \leqslant x \leqslant a$, N, $\nu > 0$. Тогда при $z \in T$

$$\|\Theta z(x) - \varphi(x)\| \leqslant \int_0^x N \frac{s^\nu}{x^\nu} \frac{\|\tilde{F}(s, s^k z(s))\|}{s^{k+1}} ds.$$

Если $a_1^k (\max_{0 \leqslant x \leqslant a_1} \|\varphi(x)\| + 1) \leqslant \sigma$, то $\|s^k z(s)\| \leqslant \sigma$ при $s \in [0, a_1]$. Тогда в силу (9) при $x \in [0, a_1]$

$$\|\Theta z(x) - \varphi(x)\| \leqslant \int_0^x N \frac{s^\nu}{x^\nu} \frac{2Ms^k \|z(s)\|^2}{s} ds \leqslant 2MNa_1^k \nu^{-1} (\|\varphi\|_{C([0, a_1]; E)} + 1)^2.$$

Выбирая a_1 так, чтобы правая часть последнего неравенства была меньше единицы, мы получим, что оператор Θ переводит шар T в себя.

Далее, при $z_1, z_2 \in T$

$$\|\Theta z_1(x) - \Theta z_2(x)\| = \left\| \int_x^0 U(x, s) \frac{\tilde{F}(s, s^k z_1(s)) - \tilde{F}(s, s^k z_2(s))}{s^{k+1}} ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x 2MN \frac{s^\nu}{x^\nu} \frac{s^k (\|z_1(s) - z_2(s)\|^2 + \|z_2(s)\| \cdot \|z_1(s) - z_2(s)\|)}{s} ds \leqslant$$

$$\leqslant 2MNa_1^k \nu^{-1} (\max_{0 \leqslant s \leqslant a_1} \|\varphi(s)\| + 3) \max_{0 \leqslant s \leqslant a_1} \|z_1(s) - z_2(s)\|.$$

Если a_1 настолько мало, что кроме предыдущих условий выполнено еще неравенство $2NMa_1^k \nu^{-1} (\max_{0 \leqslant s \leqslant a_1} \|\varphi(s)\| + 3) < 1$, то оператор Θ будет сжимающим на T и, следовательно, в T существует единственное решение $z(x)$ интегрального уравнения (6).

Покажем теперь, что функция $z(x)$ гладкая на $[0, a_1]$. Для этого достаточно доказать следующую лемму:

Лемма 2. *Если $\psi(x) \in C^n([0, a_1]; E)$, то функция $y(x) = \int_x^0 U(x, s) \psi(s) ds$ принадлежит пространству $C^{n+1}([0, a_1]; E)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Доказательство. Известно (см. [6]), что оператор $\frac{s}{x} U(x, s)$ является раз-

решающим для уравнения $xv' + (F'_{y_1}(x, 0) + (k+1) I) v = 0$, если $U(x, s)$ — разрешающий оператор уравнения (7). Отсюда и из теоремы 2.6 в [3] следует, что функция

$$\frac{1}{x} \int_x^0 U(x, s) \psi(s) ds = \int_x^0 \frac{s}{x} U(x, s) \frac{\psi(s)}{s} ds$$

является решением уравнения

$$xv' + (F'_{y_1}(x, 0) + (k+1) I) v + \psi(x) = 0,$$

принадлежащим $C^n([0, a_1[; E)$. При $x \in (0, a_1]$

$$y'(x) = -\frac{1}{x} (F'_{y_1}(x, 0) + (k+1) I) \int_x^0 U(x, s) \psi(s) ds +$$

$$+ \frac{1}{x} \int_x^0 U(x, s) \psi(s) ds - \psi(x).$$

Из предыдущего следует, что правая часть этого уравнения принадлежит $C^n([0, a_1]; E)$. Отсюда легко следует, что функция $y(x)$ имеет в нуле производную, равную значению правой части в нуле.

Таким образом, $y'(x) \in C^n([0, a_1[; E)$ и, следовательно, $y(x) \in C^{n+1}([0, a_1]; E)$. Лемма доказана.

Из уравнения (6) и лемм 1 и 2 вытекает, что функция $z(x)$ является гладкой на $[0, a_1]$. Теорема доказана.

Следствие. *Если существует формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (1), то условие на спектр оператора $f'_y(0, y(0))$ автоматически выполняется при некотором k и поэтому для уравнения (1) справедлива теорема Кузнецова—Мальгранжа.*

Замечание. Если исходное уравнение (1) было линейным: $f(x, y) = B(x)y + c(x)$, то $F(x, y_1) \equiv 0$ и уравнение (6) переходит в представление

$$z(x) = \int_x^0 U(x, s) \frac{F(s, 0)}{s^{k+1}} ds$$

и в силу теоремы 2.6 в [3] функция $z(x) \in C^\infty([0, a]; E)$ и является единственным гладким на $[0, a]$ решением уравнения (5).

Поэтому функция (2), построенная по этой функции $z(x)$, будет единственным гладким решением уравнения (1), для которого первые k коэффициентов ряда формального решения совпадают с

$$y(0), \frac{y'(0)}{1!}, \ldots, \frac{y^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}.$$

Автор благодарит своего руководителя С. Г. Крейна за ценные указания и помощь в работе.

Литература

1. Кузнецов А. Н.— Функциональный анализ и его приложения, 1972, т. 6, вып. 2, с. 41—52.

2. Malgrange B. Sur les points singuliers des equations differentielles.— Seminaire Goulaouic—Schwartz 1971—1972. Paris, p. 39.

3. Глушко В. П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения.— Воронеж: Изд-во ВГУ, 1972.—193 с.

4. Шварц Л. Анализ.— М.: Мир, 1972, т. 1.—824 с.

5. Канторович Л. В. и Акилов Г. П. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.—744 с.

6. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М.:Наука, 1970.—536 с.

Воронежский лесотехнический институт

Поступила в редакцию 27 мая 1980 г.