E. V. Degtyareva, N. N. Frolov, On the semigroups of operators Weierstrass and Poisson type, *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2004, Volume 5, Number 2, 184–194

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2004. Том 5. № 2. С. 184–194

УДК 517.985
MSC2000 45A05

© Е.В. Дегтярева, Н.Н. Фролов*

О полугруппах типа Вейерштрасса и Пуассона

Оператор, ставящий начальному условию решение задачи Коши для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$, называют оператором Вейерштрасса. Оператор, ставящий граничному условию решение задачи Дирихле для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\Delta u$ в полупространстве $t > 0$, называют оператором Пуассона. В данной заметке изучаются свойства таких операторов с заменой в уравнениях оператора Лапласа Δ на оператор числа частиц квантовой теории поля

$$-N = \sum_i \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Ключевые слова и фразы: *сжимающая, сильно непрерывная полугруппа операторов.*

1. Введение

Рассматриваемые ниже полугруппы операторов будут действовать в пространствах $L_p = L_p(R^n, \mu)$ с гауссовой мерой μ, имеющей плотность относительно лебеговой меры, равную $\frac{d\mu}{dx} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$. Здесь и далее $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка n-мерного пространства R^n, $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ — длина вектора x. Норма в L^p определяется обычным образом:

$$\|f\|_p = \left[\int\limits_{R^n} |f(x)|^p \mu(dx) \right]^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \le p < \infty)$$

и $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p$. Пространство L_2 является гильбертовым со скалярным произведением:

$$(f, g) = \int_{R^n} f(x)\overline{g}(x)\mu(dx) \qquad (f, g \in L_2).$$

В L_2 имеется ортонормированный базис $\{h_\alpha(x)\}$, состоящий из полиномов, который получается путем ортогонализации многочленов. В $L_2(R, \mu)$ этот базис представляет собой систему полиномов Эрмита:

$$h_n(t) = (-1)^n (n!)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (t \in R, \quad n = 0, 1, 2, \dots). \tag{1}$$

Легко проверить, что функции $h_n(t)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$h_n'(t) = \sqrt{n} h_{n-1}(t), \quad -h_n'(t) + t h_n(t) = \sqrt{n+1} h_{n+1}(t). \tag{2}$$

* Дальневосточный государственный университет, 690060, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: `frolov@imcs.dvgu.ru`

В $L_2(R^n,\mu)$ ортонормированным базисом служит система $h_\alpha(x) = h_{\alpha_1}(x_1)\dots h_{\alpha_n}(x_n)$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, где $\alpha_j \geq 0$ целые. Линейная оболочка, натянутая на $\{h_\alpha\}$, образует плотное множество в любом из простанств L_p $(1 \leq p < \infty)$. Ниже эту оболочку обозначаем через $\wp$. Через $\hat{f}_\alpha$ обозначается коэффициент Фурье функции $f \in L_2$ по системе $\{h_\alpha\}$:

$$\hat{f}_\alpha = \int\limits_{R^n} f(x)h_\alpha(x)\mu(dx).$$

Напомним еще, что ряд Фурье

$$\sum_\alpha \hat{f}_\alpha h_\alpha(x)$$

по системе $\{h_\alpha\}$ для любой функции $f \in L_2$ сходится к ней по норме $\|f\|_2$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Nu \qquad (t>0,\ x\in R^n), \quad u(x,0) = f(x) \in L_2. \tag{3}$$

Решение ее может быть записано в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_\alpha \hat{f}_\alpha e^{-|\alpha|t} h_\alpha(x), \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \tag{4}$$

сходящегося в L_2. Это следует из равенства $Nh_\alpha = |\alpha|h_\alpha$, которое является следствием соотношений (2). Введем оператор Вейерштрасса T_t, порожденный решением задачи (3), по формуле $u(x,t) = (T_t f)(x)$. Этот оператор можно представить в интегральной форме. Для этого воспользуемся равенством (см. [1], с. 439)

$$\sum_{n=0}^\infty \theta^n h_n(t)h_n(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left\{-\frac{\theta^2(t^2+\tau^2) - 2\theta t\tau}{2(1-\theta^2)}\right\}, \quad |\theta| < 1.$$

Полагая $\theta = e^{-t}$, подставляя в (4) выражение для $\hat{f}_\alpha$, меняя затем порядок интегрирования и суммирования в (4), что возможно для $f \in \wp$, получаем:

$$\begin{aligned} T_t f = \int\limits_{R^n} f(y) \sum_\alpha e^{-|\alpha|t} h_\alpha(x)h_\alpha(y)\mu(dy) = \\ = \int\limits_{R^n} \exp\left\{-\frac{|xe^{-t}-y|^2}{2(1-e^{-2t})}\right\}\left[2\pi(1-e^{-2t})\right]^{-\frac{n}{2}} f(y)\,dy = \\ = \int\limits_{R^n} f\left(xe^{-t} - z\sqrt{1-e^{-2t}}\right)\mu(dz) \qquad (t>0). \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Nu \qquad (t>0,\ x\in R^n), \quad u(x,0) = f(x) \in L_2. \tag{6}$$

Решение ее может быть записано в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_\alpha \hat{f}_\alpha e^{-t\sqrt{|\alpha|}} h_\alpha(x), \tag{7}$$

сходящегося в L_2. Введем оператор Пуассона V_t, порожденный решением задачи (6), по формуле $u(x,t) = (V_t f)(x)$. Этот оператор можно выразить через T_t. Для этого воспользуемся равенством (см. [2], с. 76)

$$e^{-|\xi|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \eta^{-\frac{1}{2}} \exp\Big\{ -\eta - \frac{\xi^2}{4\eta} \Big\}\, d\eta.$$

Полагая $\xi = t\sqrt{|\alpha|}$, подставляя в (7) выражение для $\hat{f}_\alpha$, меняя порядок интегрирования и суммирования в (7), для $f \in \wp$ получаем

$$V_t f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \eta^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta} \sum_\alpha \hat{f}_\alpha e^{-\frac{|\alpha| t^2}{4\eta}} h_\alpha(x)\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \eta^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta} T_{\frac{t^2}{4\eta}} f(x)\, d\eta = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty s^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t^2}{4s}} T_s f(x)\, ds. \tag{8}$$

Ниже изучаются свойства введенных здесь операторов T_t, V_t, которые существенно используются в теории мультипликаторов Эрмита пространств L_p [3].

2. Свойства полугруппы T_t

Из формулы (5) вытекает, что операторы T_t $(t > 0)$ ограничены в L_∞: $\|T_t f\|_\infty \le \|f\|_\infty$. Кроме того, они ограничены также в L_1:

$$\|T_t f\|_1 \le \int\limits_{R^n} \mu(dx) \int\limits_{R^n} |f(y)| \exp\Big\{ -\tfrac{|xe^{-t} - y|^2}{2(1-e^{-2t})} \Big\} \big[2\pi(1-e^{-2t}) \big]^{-\frac{n}{2}} dy =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} |f(y)| \exp\Big\{ -\tfrac{|y|^2}{2} \Big\} dy = \|f\|_1.$$

Отсюда, по интерполяционной теореме М. Рисса-Торина, следует, что операторы T_t ограничены в любом L_p: $\|T_t f\|_p \le \|f\|_p$ $(t > 0,\ 1 \le p \le \infty)$.

Одним из основных результатов данной заметки является доказательство более сильной оценки:

$$\Big\| \sup_{t>0} |T_t f| \Big\|_p \le c\|f\|_p \qquad (1 < p \le \infty) \tag{9}$$

с постоянной независящей от $f \in L_p$.

Отметим, что при $p = \infty$ неравенство (9) очевидно, так как $|T_t f| \le \|f\|_\infty$ $(t > 0)$. При $p = 1$ неравенство (9) неверно. Чтобы убедиться в этом достаточно рассмотреть семейство функций $f_z(x) = e^{xz}$ $(x \in R,\ z > 0)$, для которого, как легко подсчитать,

$$\|f_z\|_1 = e^{\frac{z^2}{2}}, \qquad T_t f_z = \exp\Big\{ \frac{z^2}{2}(1 - e^{-2t}) + xze^{-t} \Big\}.$$

Отсюда получаем

$$\sup_{t>0} |T_t f_z| = \begin{cases} e^{\frac{z^2}{2}}, & x \le 0 \\ e^{\frac{z^2+x^2}{2}}, & 0 \le x \le z \\ e^{xz}, & x \ge z \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\Big\|\sup_{t>0}|T_t f_z|\Big\|_1 = \left(1+\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{\frac{z^2}{2}} = \left(1+\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\right)\|f_z\|_1.$$

Таким образом, постоянную c в неравенстве (9), для данного случая, нельзя выбрать независящей от z.

Для доказательства неравенства (9) нам потребуется ряд лемм и утверждение о свойствах максимальной функции. Далее рассматривается случай $n = 1$.

Для $f \in L_1(R,\mu)$ введем максимальную функцию формулой

$$Mf(x) = \sup_{z<x<y}\frac{1}{\mu(z,y)}\int\limits_z^y |f(\eta)|\mu(d\eta),$$

где $\mu(z,y)$ равно μ-мере интервала (z,y) при $z<y$.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*
а) *Если $f \in L_1(R,\mu)$, то при любом $\lambda > 0$*

$$\mu\{x : Mf(x) > \lambda\} \le \frac{2}{\lambda}\|f\|_1. \tag{10}$$

б) *Если $f \in L_p$ $(1 \le p < \infty)$, то $Mf(x)$ — μ-почти всюду конечна.*
в) *Если $f \in L_p$ $(1 < p \le \infty)$, то $Mf \in L_p$ и $\|Mf\|_p \le c_p\|f\|_p$.*

Доказательство. Утверждение б) при $p = 1$ вытекает из а), а при $p > 1$ из в). Утверждение в) следует из а), с использованием конструкции, описанной в [2], с. 17. Остановимся на доказательстве утверждения а).

Пусть $E_\lambda = \{x : Mf(x) > \lambda\}$. Мера μE_λ — есть точная верхняя грань μ-мер содержащихся в E_λ компактов K. Поэтому достаточно доказать неравенство $\mu K \le \frac{2}{\lambda}\|f\|_1$ для любого компакта $K \subset E_\lambda$.

Для каждого $x \in K$ при некоторых $y = y(x)$ и $z = z(x)$ $(z < x < y)$ выполнено неравенство

$$\int\limits_z^y |f(\eta)|\mu(d\eta) > \lambda\mu(z,y). \tag{11}$$

Интервалы $\big(z(x), y(x)\big)$, $x \in K$ покрывают K. Выберем из них конечную систему (z_j, y_j) $(j=\overline{1,n})$, покрывающую K и такую, чтобы в этой системе интервалов пересекались только соседние интервалы. Тогда интервалы с четными и отдельно с нечетными номерами образуют две системы непересекающихся интервалов. По крайней мере одна из них (например, с четными номерами) содержит часть K с μ-мерой $\ge \frac{1}{2}\mu K$. Таким образом,

$$\mu K \le 2\sum_j \mu(z_{2j}, y_{2j}). \tag{12}$$

Из (11) тогда получаем

$$\int\limits_{z_{2j}}^{y_{2j}} |f(\eta)|\mu(d\eta) > \lambda\mu(z_{2j}, y_{2j}).$$

Суммируя это неравенство по j, с учетом (12), получаем оценку

$$\mu K \le \frac{2}{\lambda}\sum_j \int\limits_{z_{2j}}^{y_{2j}} |f(\eta)|\mu(d\eta) \le \frac{2}{\lambda}\|f\|_1,$$

из которой, как было отмечено выше, следует оценка (10).

Лемма 1. *Пусть* $0 \le \varphi$ — μ*-измеримая функция на* R*, удовлетворяющая неравенству* $\varphi(x) \le c e^{\frac{x^2}{2}}$. *Тогда справедлива оценка:*

$$\mu\{x : \varphi(x) > \lambda\} \le \frac{c}{\lambda}$$

с той же постоянной c*, что и в неравенстве для* φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно $\{x : \varphi > \lambda\} \subset \left\{x : e^{\frac{x^2}{2}} > \frac{\lambda}{c}\right\}$. Можно считать, что $\lambda > c$. Тогда

$$\mu\{x : \varphi > \lambda\} \le \mu\Big\{x : e^{\frac{x^2}{2}} > \frac{\lambda}{c}\Big\} = \mu\Big\{x : |x| > \sqrt{2\ln\tfrac{\lambda}{c}}\Big\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\sqrt{2\ln\frac{\lambda}{c}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся неравенством (см. [4], с. 121)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x + \sqrt{\frac{8}{\pi} + x^2}} \qquad (x \ge 0).$$

Имеем:

$$\mu\{x : \varphi > \lambda\} \le 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{-2\ln\frac{\lambda}{c}}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{8}} = e^{-\ln\frac{\lambda}{c}} = \frac{c}{\lambda}.$$

Лемма 2. *Существует такая постоянная* $c > 0$*, что при всех* ξ $(0 < \xi < 1)$ *справедливо неравенство*

$$\mu\left(x, \frac{x}{\xi}\right) \le c\sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (x \ge 0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из цепочки соотношений:

$$\mu\Big(x, \frac{x}{\xi}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x}^{\frac{x}{\xi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x\left(\frac{1}{\xi}-1\right)} e^{-xy-\frac{y^2}{2}} dy \le$$

$$\le e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x\left(\frac{1}{\xi}-1\right)} e^{-xy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1 - e^{-x^2\left(\frac{1}{\xi}-1\right)}}{x} \le c\sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup\limits_{\eta > 0} \frac{1 - e^{-\eta^2}}{\eta}$.

Для дальнейшего сделаем в операторе T_t замену $e^{-t} = \xi$. Тогда

$$T_t = \tilde{T}_\xi f = \int\limits_R f(y) \exp\left\{-\frac{(x\xi - y)^2}{2(1-\xi^2)}\right\} \left[2\pi(1-\xi^2)\right]^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Лемма 3. *Существует постоянная* $c > 0$ *такая, что при всех* ξ $(0 < \xi < 1)$ *справедлива оценка:*

$$|\tilde{T}_\xi f| \le \left[1 + \frac{\mu\left(|x|, \frac{|x|}{\xi}\right)}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}\right] Mf(x). \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку

$$-\frac{(x\xi-y)^2}{2(1-\xi^2)}=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-\frac{(x-\xi y)^2}{2(1-\xi^2)}, \tag{14}$$

то $\tilde{T}_\xi f$ можно представить в виде

$$\tilde{T}_\xi f=e^{\frac{x^2}{2}}\int\limits_R f(y)\exp\left\{-\frac{(x-\xi y)^2}{2(1-\xi^2)}\right\}(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\mu(dy). \tag{15}$$

Положим

$$I_x(y)=\int\limits_x^y |f(z)|\mu(dz).$$

Тогда из (15), интегрированием по частям, находим

$$e^{-\frac{x^2}{2}}|\tilde{T}_\xi f|\le\int\limits_R I'(y)\exp\left\{-\frac{(x-\xi y)^2}{2(1-\xi^2)}\right\}(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\mu(dy)\le-\int\limits_R I_x(y)d\varphi_x(y),$$

где $\varphi_x(y)=(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi y)^2}{2(1-\xi^2)}\right\}$.

Из определения максимальной функции Mf вытекают оценки:

$$\begin{aligned} I_x(y)&\le\mu(x,y)Mf(x) \qquad (y>x),\\ -I_x(y)&\le\mu(y,x)Mf(x) \qquad (y<x).\end{aligned}$$

Пусть $x\ge 0$. Тогда $\frac{x}{\xi}>x$. Используя предыдущие неравенства, имеем:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}}|\tilde{T}_\xi f|&\le\int\limits_{-\infty}^{x}\big(-I_x(y)\big)d\varphi_x(y)-\int\limits_x^{\frac{x}{\xi}}I_x(y)d\varphi_x(y)+\int\limits_{\frac{x}{\xi}}^{\infty}I_x(y)d\big(-\varphi_x(y)\big)\le\\ &\le\Big[\int\limits_{-\infty}^{x}\mu(y,x)d\varphi_x(y)+\int\limits_{\frac{x}{\xi}}^{\infty}\mu(x,y)d(-\varphi_x(y))\Big]Mf(x).\end{aligned}$$

Вновь интегрируя по частям и учитывая равенство (14), получаем:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}}|\tilde{T}_\xi f|&\le\left[\int\limits_R\varphi_x(y)\mu(dy)+\frac{\mu(x,\frac{x}{\xi})}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]Mf(x)\le\\ \le\left[\frac{\mu(x,\frac{x}{\xi})}{\sqrt{1-\xi^2}}+e^{-\frac{x^2}{2}}\int\limits_R\exp\left\{-\frac{(x\xi-y)^2}{2(1-\xi^2)}\right\}\big[2\pi(1-\xi^2)\big]^{-\frac{1}{2}}dy\right]Mf(x)&=\\ =\left[\frac{\mu(x,\frac{x}{\xi})}{\sqrt{1-\xi^2}}+e^{-\frac{x^2}{2}}\right]Mf(x).\end{aligned}$$

Отсюда вытекает оценка (13) при $x\ge 0$.

Пусть теперь $x<0$. Тогда $\frac{x}{\xi}<x$. Действуя, как и при $x\geq 0$, получаем

$$e^{-\frac{x^2}{2}}|\tilde{T}_\xi f| \leq \int\limits_{-\infty}^{\frac{x}{\xi}} -I_x(y)d\varphi_x(y) - \int\limits_{\frac{x}{\xi}}^{x} I_x(y)d\varphi_x(y) + \int\limits_{x}^{\infty} I_x(y)d(-\varphi_x(y)) \leq$$

$$\leq \left[\int\limits_{-\infty}^{\frac{x}{\xi}} \mu(y,x)d\varphi_x(y) + \int\limits_{x}^{\infty} \mu(x,y)d(-\varphi_x(y))\right] Mf(x).$$

После интегрирования по частям, правая часть последнего неравенства будет равна

$$\left[\frac{\mu(\frac{x}{\xi},x)}{\sqrt{1-\xi^2}} + \int\limits_{-\infty}^{\frac{x}{\xi}} \varphi_x(y)\mu(dy) + \int\limits_{x}^{\infty} \varphi_x(y)\mu(dy)\right] Mf(x) \leq \left[\frac{\mu(\frac{x}{\xi},x)}{\sqrt{1-\xi^2}} + e^{-\frac{x^2}{2}}\right] Mf(x).$$

Поскольку $\mu(\frac{x}{\xi},x)=\mu(|x|,\frac{|x|}{\xi})$ при $x<0$, то последнее неравенство сводится к (13).

Теорема 2. *При любых p $(1<p\leq\infty)$ существует постоянная $c>0$, независящая от $f\in L_p(R,\mu)$, при которой справедлива оценка* (9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы (15) вытекает, что

$$|T_t f| = |\tilde{T}_\xi f| \leq e^{\frac{x^2}{2}}(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\|f\|_1.$$

Поэтому при любом δ $(0<\delta<1)$

$$\sup_{0<\xi\leq\delta} |\tilde{T}_\xi f| \leq e^{\frac{x^2}{2}}(1-\delta^2)^{-\frac{1}{2}}\|f\|_1.$$

При помощи леммы 1, из этой оценки получаем

$$\mu\{x : \sup_{0<\xi\leq\delta} |\tilde{T}_\xi f| > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda}(1-\delta^2)^{-\frac{1}{2}}\|f\|_1.$$

Последнее неравенство показывает, что полуаддитивный оператор $\sup\limits_{0<\xi\leq\delta}|\tilde{T}_\xi f|$ имеет слабый тип $(1,1)$. Кроме того, он ограничен в $L_\infty(R,\mu)$: $\Big\|\sup\limits_{0<\xi\leq\delta}|\tilde{T}_\xi f|\Big\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Поэтому, по теореме Марцинкевича, он ограничен в любом $L_p(R,\mu)$:

$$\Big\|\sup_{0<\xi\leq\delta}|\tilde{T}_\xi f|\Big\|_p \leq c(p,\delta)\|f\|_p \qquad (1<p\leq\infty). \tag{16}$$

Далее, согласно лемме 3, при любом ξ: $(0<\xi<1)$ имеет место неравенство (13). Если в нем заменить μ-меру интервала $\big(|x|,\frac{|x|}{\xi}\big)$ на величину из леммы 2, то придем к неравенству

$$|\tilde{T}_\xi f| \leq \left[1+\frac{c}{\sqrt{\xi(1+\xi)}}\right] Mf(x).$$

Отсюда, в силу теоремы 1 о свойствах максимальной функции, получаем

$$\Big\|\sup_{\delta<\xi<1}|\tilde{T}_\xi f|\Big\|_p \leq \left[1+\frac{c}{\sqrt{\delta}}\right] c_p\|f\|_p.$$

Это неравенство, вместе с неравенством (16), приводит к утверждению теоремы 2.

Приведем еще ряд свойств операторов T_t:

1. *Совокупность* $\{T_t, t > 0\}$*образует сжимающую, сильно непрерывную полугруппу операторов в любом* L_p $(1 \le p < \infty)$. Это означает, что выполнены соотношения:

$$T_{t+\tau} = T_t T_\tau, \quad \|T_t f\|_p \le \|f\|_p \quad \text{и} \quad \|T_t f - f\|_p \to 0 \quad (t \to +0).$$

Первое соотношение легко следует из представления (4), а последнее из того, что оно верно для $f \in \wp$ (см.(4)), что $\wp$ плотно в L_p и что справедлива оценка $\|T_t\| \le 1$.

2. *Имеет место неравенство:*

$$\|T_t f - \hat{f}_0\|_p \le e^{-c(p)t} \|f - \hat{f}_0\|_p \qquad (1 < p < \infty,\ c(p) > 0).$$

Действительно, из (4) вытекает, что

$$\|T_t f - \hat{f}_0\|_2 \le e^{-t} \|f - \hat{f}_0\|_2.$$

Поскольку

$$\|T_t f - \hat{f}_0\|_p = \|T_t(f - \hat{f}_0)\|_p \le \|f - \hat{f}_0\|_p \qquad (1 \le p \le \infty),$$

то из этих двух неравенств, при помощи интерполяционной теоремы, получаем свойство 2.

3. *Операторы* T_t *сохраняют положительность:* $T_t f \ge 0$ μ*-почти всюду, если* $f \ge 0$ μ*-почти всюду.*

Данное свойство следует из интегрального представления оператора T_t (5).

4. T_t *обладают свойством гиперсжимаемости: если* $p, q > 1$ *и* $e^{-2t} \le \frac{p-1}{q-1}$, *то* T_t *является сжимающим оператором из* L_p *в* L_q (см. [5], с. 523).

5. T_t *усиливает положительность: если* $f \ge 0$ *и* $\mu\{x : f > 0\} > 0$, *то* $T_t f > 0$ μ*-почти всюду* (см. [5], с. 526).

6. *Оператор* T_t *самосопряжен в* L_2 *и изометричен на конусе неотрицательных функций из* L_1*:*

$$(T_t f, g) = (f, T_t g) \quad (f, g \in L_2); \quad \|T_t f\|_1 = \|f\|_1 \quad (f \ge 0, f \in L_1). \tag{17}$$

Первое равенство в (17) следует из представления (4), второе — из выражения (15).

7. *Справедлива оценка*

$$\|T_t f\|_{W_p^s} \le c t^{-\frac{s}{2}} \|f\|_p \quad (s = 0, 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

Здесь пространство $W_p^s(R^n, \mu)$ определяется как пополнение $\wp$ по норме

$$\|f\|_{W_p^s} = \left(\sum_{k=0}^{s} \int\limits_{R^n} \|D^k f\|_2^p \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\|D^k f\|_2^2 = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right)^2 = \sum\limits_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha} \right|^2$.

Для доказательства оценки (18) воспользуемся формулой (1). Если $f \in \wp$, то

$$\frac{\partial^k T_t f}{\partial x^\alpha} = (-1)^k \sqrt{\alpha!} \left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} \right)^k \int\limits_{R^n} f(y) h_\alpha \left(\frac{x e^{-t} - y}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} \right) \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{|x e^{-t} - y|^2}{2(1 - e^{-2t})} \right\} \left[2\pi (1 - e^{-2t}) \right]^{-\frac{n}{2}} dy.$$

Отсюда, для любой финитной числовой последовательности a_α, получаем

$$\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} a_\alpha \frac{\partial^k T_t f}{\partial x^\alpha} = (-1)^k \sqrt{k!} \left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \right)^k \times$$

$$\times \int\limits_{R^n} f(y) \sum_{|\alpha|=k} \sqrt{\frac{k!}{\alpha!}} a_\alpha h_\alpha \left(\frac{xe^{-t}-y}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \right) \exp\left\{ -\frac{|xe^{-t}-y|^2}{2(1-e^{-2t})} \right\} [2\pi(1-e^{-2t})]^{-\frac{n}{2}} dy.$$

Применим к интегралу справа неравенство Гельдера. Тогда

$$\Big| \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} a_\alpha \frac{\partial^k T_t f}{\partial x^\alpha} \Big| \le \sqrt{k!} \Big(\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \Big)^k (T_t |f|^p)^{\frac{1}{p}} I, \tag{19}$$

где

$$I^q = \int\limits_{R^n} \Big| \sum_{|\alpha|=k} \sqrt{\frac{k!}{\alpha!}} a_\alpha h_\alpha \Big(\frac{xe^{-t}-y}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \Big) \Big|^q \exp\left\{ -\frac{|xe^{-t}-y|^2}{2(1-e^{-2t})} \right\} \big[2\pi(1-e^{-2t})\big]^{-\frac{n}{2}} dy =$$

$$= \Big\| \sum_{|\alpha|=k} \sqrt{\frac{k!}{\alpha!}} a_\alpha h_\alpha \Big\|_q^q, \qquad \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Big).$$

Известно [3], что для любого полинома $Q_k \in \wp$ степени k имеет место неравенство

$$\|Q_k\|_q \le c_{k,q} \|Q_k\|_2, \qquad c_{k,q} = \max\{1, (q-1)^{\frac{k}{2}}\}.$$

Применим его для оценки I:

$$I = \Big\| \sum_{|\alpha|=k} \sqrt{\frac{k!}{\alpha!}} a_\alpha h_\alpha \Big\|_q \le c_{k,q} \Big\| \sum_{|\alpha|=k} \sqrt{\frac{k!}{\alpha!}} a_\alpha h_\alpha \Big\|_2 = c_{k,q} \Big(\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |a_\alpha|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставим полученную оценку для I в (19) и перейдем затем в (19) к точной верхней грани по всем наборам $\{a_\alpha\}$, удовлетворяющих неравенству $\sum\limits_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |a_\alpha|^2 \le 1$. Получим

$$\|D^k T_t f\|_2 = \Big(\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \Big| \frac{\partial^k T_t f}{\partial x^\alpha} \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{k!} \Big(\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \Big)^k c_{k,q} (T_t |f|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Возводя это неравенство в степень p, а затем интегрируя по R^n с мерой μ, приходим к оценке

$$\int\limits_{R^n} \|D^k T_t f\|_2^p \mu(dx) \le \Big[\sqrt{k!} \Big(\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \Big)^k c_{k,q} \Big]^p \|f\|_p^p,$$

из которой следует доказываемое неравенство (18).

3. Свойства полугруппы V_t.

Свойства операторов V_t $(t > 0)$, в силу равенств (8), можно получить из соответствующих свойств операторов T_t $(t > 0)$. В частности, справедливы следующие утверждения:

1. *Совокупность* $\{V_t,\ t > 0\}$ *образует сжимающую, сильно непрерывную полугруппу операторов в любом* L_p $(1 \le p < \infty)$.

Полугрупповое свойство вытекает из (7); остальные соотношения — из формулы (8) и соответствующих соотношений для полугруппы T_t (см. свойство 1 для T_t).

2. *Имеет место оценка*

$$\|V_t f - \hat{f}_0\|_p \leq e^{-c(p)t}\|f - \hat{f}_0\|_p \quad (1 < p < \infty,\ c(p) > 0),$$

доказательство которой, с использованием (7), проходит по той же схеме, что и доказательство аналогичного свойства для T_t.

3. *Операторы V_t сохраняют положительность,* что следует из (8) и аналогичного свойства для T_t.

4. *Операторы V_t усиливают положительность*, что доказывается тем же способом, что и аналогичное свойство для T_t.

5. *Для оператора V_t справедливы соотношения (17) с заменой в них T_t на V_t.* Они получаются из (8) и соответствующих соотношений для T_t.

6.*Имеет место оценка*

$$\|V_t f\|_{W_p^s} \leq ct^{-s}\|f\|_p.$$

Данная оценка вытекает из (8) и оценки (18).

7. *Справедливо неравенство*

$$\Big\| \sup_{t>0} |V_t f| \Big\|_p \leq c\|f\|_p \qquad (1 < p \leq \infty),$$

которое следует из (8) и аналогичного неравенства для T_t.

8. *Полугруппа V_t является аналитической в любом пространстве L_p* $(1 \leq p < \infty)$.

Действительно, из формулы (8) следует

$$\frac{d}{dt}V_t f = \frac{1}{t}V_t f + t\int\limits_0^\infty \varphi_t'(s,t)T_s f\, ds,$$

где $\varphi(s,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}s^{-3/2}e^{-t^2/4s}$. Поскольку $\varphi_t' \leq 0$, то для $f \geq 0$ имеем $\frac{d}{dt}V_t f \leq \frac{1}{t}V_t f$ и поэтому

$$\left\| t\frac{d}{dt}V_t f \right\|_p \leq \|V_t f\|_p \leq \|f\|_p.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\left\| t\frac{d}{dt}V_t f \right\|_p \leq 2\|f\|_p$$

для произвольной функции $f \in L_p$. Из нее, согласно известной теореме К. Иосиды (см. [6], с. 351), следует аналитичность полугруппы V_t.

Аналитичность V_t в L_p позволяет, используя общую теорему (см. [7], с.273), получить оценку:

$$\big\| \big(\sqrt{N}\big)^n V_t f \big\|_p = \|V_t^{(n)} f\|_p \leq c_n t^{-n} e^{\omega t}\|f\|_p \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Эта оценка, в частности, показывает, что функция $\mu(\alpha) = |\alpha|^{n/2}e^{-t\sqrt{|\alpha|}}$ является мультипликатором Эрмита в пространствах L_p $(1 \leq p < \infty)$ (см. [3]).

Список литературы

1. *Хилл Э.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1951. 635 с.

2. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.

3. *Клевчихин Ю.А., Фролов Н.Н.* Мультипликаторы эрмитовых разложений в пространствах L_p // ДВ Мат. сб. 1996, вып. 2, С. 86–95.

4. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979. 830 с.

5. *Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. К.: Наукова думка, 1988. 680 с.

6. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

7. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 500 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 1 сентября 2004 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00028)

Degtyareva E.V., Frolov N.N. On the semigroups of operators Weierstrass and Poisson type. Far Eastern Mathematical Journal. 2004. V. 5. № 2. P. 184–194.

ABSTRACT

In this paper properties of transforms by a Weierstrass and Poisson type are considered. Those transforms are generated of differential problems. In those problems Laplace operators are change on number operators in quantum field theory.

Key words: *strong continues semi-groups of bounded linear operators.*