© 1990 г.

Рецензии

K.J.Falconer. The Geometry of Fractal Sets // Cambridge tracts in mathematics. Vol.85. Cambridge: University Press, 1985. 162 p.

Сначала были чудовища. Природа еще
только училась, она репетировала...
Педро Салинас „Защита чтения"

Современная теория фрактальных множеств, точнее говоря, та ее часть, которая относится к геометрической теории меры, начиналась на переломе XIX и XX столетий. Появившиеся тогда примеры нигде не дифференцируемых функций Больцано и Вейерштрасса, канторовское троичное множество, кривые Пеано и „снежинка" фон Коха, сегодня являющиеся обычными фрактальными объектами, сначала воспринимались как нечто патологоическое и вызывали почти мистический ужас. Для разума, привыкшего к гладкому миру, они казались чем-то неестественным, никому не нужным и, по словам Пуанкаре, изобретенным специально для того, чтобы обнаружить недостаточность рассуждений наших отцов.

К фрактальным множествам привыкали так же трудно, как когда-то привыкали к четвертому измерению. Человек, с детства живший в трехмерном мире, не мог сразу воспринять четвертое измерение, а тем более - дробные размерности. Но в науке и в жизни часто бывает так, что идеи, еще вчера вызывавшие протест здравого смысла, и понятия, пропагандировать которые решались лишь немногие смельчаки, сегодня становятся общепризнанными, и даже появляются энтузиасты, ищущие воплощение этих идей в реальном мире. Так было и с четвертым пространственным измерением, однако все попытки доказать его существование в природе оказались безуспешными. О некоторых из них можно прочитать в книге [7].

Фрактальным объектам повезло больше. Их находят в изломах береговых линий и горных хребтов, в турбулентном течении жидкостей, в структуре колец Сатурна и броуновском движении. Об этом рассказывается в своеобразной „фрактальной энциклопедии" - книге-эссе Мандельброта [23]. Термин „фрактал" был образован Мандельбротом из латинского слова „fractus", что означает „изломанный". Мандельброт определяет фрактал как множество, топологическая размерность которого меньше его хаусдорфовой размерности, однако встречаются и другие определения фракталов, например, ими иногда называют множества нецелой хаусдорфовой

размерности. Обсуждение понятия «фрактал" имеется в [9].

Книга Мандельброта [23] сыграла большую роль в популяризации фрактальной геометрии. Возможно, когда-нибудь будут написаны повести о дробномерных мирах, подобные «геометрическим" повестям «Флатландия" Эббота и «Сферландия" Бюргера. В предисловии Данилова и Смородинского к русскому изданию этих произведений (см. [12]) сказано: «Возвращаясь из n-мерного пространства в «обычное" 4-мерное, невольно испытываешь большое облегчение - настолько все становится простым и понятным". Конечно, n-мерный мир сложно устроен, и требуется обладать незаурядной фантазией, чтобы описать жизнь существ в этом мире.

Основными понятиями теории фрактальных множеств являются мера Хаусдорфа и размерность по Хаусдорфу. Пусть задано подмножество E n-мерного евклидова пространства R^n. Для любого $\delta>0$ покроем E счетным семейством $\{V_i\}$ множеств, диаметры которых не превосходят δ. Определим числа

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf \sum_{i=0}^{\infty} [\mathrm{diam}\ (V_i)]^s, \qquad 0 \le s \le n,$$

где точная нижняя грань вычисляется по всевозможным покрытиям описанного вида. Мера Хаусдорфа размерности s - это внешняя мера $\mathcal{H}^s$ на R^n, заданная при помощи равенства

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta\downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(E), \quad E\subset R^n.$$

Рассмотрим теперь сужение внешней меры $\mathcal{H}^s$ на σ-алгебру M множеств, измеримых в смысле Каратеодори. Если E - борелевское или аналитическое подмножество R^n, то верно, что $E\in M$. Это утверждение следует из аддитивности внешней меры $\mathcal{H}^s$ на парах множеств, находящихся на положительном расстоянии друг от друга. Значит, внешняя мера $\mathcal{H}^s$ является борелевской мерой. Кроме того, мера H^i регулярна.

Хаусдорфовой размерностью множества E называется число

$$\dim_H E = \inf \{s : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup \{s : \mathcal{H}^s(E) = \infty \}.$$

Наконец, s-множеством называется такое $\mathcal{H}^s$-измеримое множество E, что

$$0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty.$$ [1]

Легко видеть, что $\dim_H (E)=s$ для любого s-множества E. Подробно о мере $\mathcal{H}^s$ и размерности $\dim_H$ можно прочитать в монографиях [11, 18 и 32].

С момента опубликования основополагающих трудов Каратеодори и Хаусдорфа по геометрическим мерам, когда появилась возможность измерять и различать подмножества R^n, имеющие сложную структуру, начинается теория фрактальных множеств. Фалконер пишет в предисловии к своей книге: «Хаусдорф (1919) указал, что определение Каратеодори применимо и в случае нецелых s. Он проиллюстрировал это

[1] s-множества образуют традиционный объект исследований в геометрической теории меры. В их число входят и фрактальные множества, и множества целой размерности. Термин s-множество, употребляющийся в рецензируемой книге, не вполне установился. К примеру, в книге [21] определение s-множества отлично от приведенного выше.

утверждение, показав, что знаменитое „троичное" множество Кантора имеет положительную, но конечную меру размерности $s = \frac{\log 2}{\log 3}$. Так родилось понятие множеств $\frac{\log 2}{\log 3}$ дробной размерности, и имя Хаусдорфа было присвоено этой размерности и этой мере".

В геометрической теории s-множеств изучаются их свойства, которые условно можно назвать геометрическими. К ним относятся, например, существование или отсутствие s-мерных плотностей и m-мерных касательных пространств у таких множеств; свойства проекций на k-мерные подпространства в R^n и пересечений этих множеств с гладкими подмногообразиями в R^n. Основными вехами в развитии теории s-множеств были: a) исследование геометрических свойств одномерных подмножеств плоскости, проведенное Безиковичем (см. [13, 14, 15]); b) результаты Федерера по проекционным и касательным свойствам подмножеств пространства R^n и их счетной спрямляемости[2] (см. [17, 18]); c) определение слабого касательного пространства, данное Марстрандом, и его работы по слабым касательным свойствам и свойствам регулярности множеств (см. [25, 26]); d) важная работа Прайса [31], в которой решена известная проблема геометрической теории меры, а также работы многих математиков, предшествовавшие работе Прайса.

Ниже будет сформулирована основная теорема из [31], но сначала введем необходимые определения и обсудим, что же было известно до появления работы Прайса.

Верхней s-мерной плотностью меры Φ в точке $x \in R^n$ называется число

$$\bar{\mathcal{D}}(\Phi, x) = \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\Phi(B(x,r))}{(2r)^s},$$

где $B(x,r)$ - это открытый шар в R^n с центром x и радиусом r. Аналогично определяется нижняя плотность $\underline{\mathcal{D}}(\Phi, x)$, следует только заменить lim sup на lim inf. Если $\underline{\mathcal{D}}(\Phi, x) = \bar{\mathcal{D}}(\Phi, x)$, то общее значение этих двух чисел называется s-мерной плотностью меры Φ в точке x, и для этой плотности используется обозначение $\mathcal{D}(\Phi, x)$. В случае, когда мера Φ совпадает с мерой $\mathcal{H}^s$, суженной на s-множество E, плотности обозначаются через $\underline{\mathcal{D}}^s(E, x)$, $\bar{\mathcal{D}}^s(E, x)$ и $\mathcal{D}^s(E, x)$.

Известно, что всегда

$$2^{-s} \le \bar{\mathcal{D}}^s(E, x) \le 1$$

для $\mathcal{H}^s$ - почти всех $x \in E$ (см., например, [18]), в то время как нижняя s-мерная плотность может равняться нулю $\mathcal{H}^s$ - почти всюду на E (пример подмножества прямой, обладающего этим свойством, строится при помощи конструкции канторовского типа, причем на каждом шаге построения из интервалов предыдущего ранга выбрасывается растущее число интервалов, длины которых специальным образом подобраны). Кроме определенных выше шаровых плотностей, рассматриваются секториальные плотности и

[2] определение счетно спрямляемого множества будет дано ниже.

плотности относительно семейств множеств общего вида (см., например, [18, 33]). Плотности измеряют разреженность множеств. Пример множества канторовского типа, имеющего нулевую нижнюю плотность, показывает, насколько различны плотностные свойства n-множеств (в R^n) и s-множеств при дробном s. Ведь, согласно известной теореме Лебега, n-мерная плотность n-множества равна единице почти всюду на E относительно n-мерной меры Лебега. Эта разница в некотором смысле типична. Как показал Марстранд [26], при дробном s для s-множества E всегда имеет место строгое неравенство

$$\mathcal{D}^s(E,x) < \bar{\mathcal{D}}^s(E,x),$$

$\mathcal{H}^s$-почти всюду на E.

Случай, когда $s=m$, где m - целое число, следует рассматривать отдельно. В этом случае среди m-множеств выделяются два класса - регулярных и иррегулярных множеств.[3] Регулярными называются такие m-множества E, что $\mathcal{D}^m(E,x)=1$ для $\mathcal{H}^m$ - почти всех $x\in E$, а иррегулярными - m-множества, не имеющие регулярных подмножеств положительной меры. Плотностные свойства регулярных m-множеств аналогичны свойствам множеств, имеющих положительную меру Лебега. Что же касается иррегулярных множеств, то они родственны множествам дробной размерности, и m-мерная плотность не существует $\mathcal{H}^m$-почти всюду на иррегулярном множестве (это следует из результатов, которые будут приведены ниже).

Пусть Φ - борелевская мера на R^n, а m - целое число, $0 \le m \le n$. Множество E называется счетно (Φ,m)-спрямляемым, если Φ-почти все множество E может быть покрыто некоторым счетным семейством m-мерных гладких подмногообразий пространства R^n. Нам понадобится определение m-мерного касательного пространства в случае s-множества. Говорят, что s-множество E имеет m-мерное касательное пространство в точке x, если $\bar{\mathcal{D}}^m(E,x)>0$ и существует m-мерное аффинное подпространство V пространства R^n, проходящее через точку x, и такое, что для всех $\theta > 0$ верно равенство

$$\lim_{r\downarrow 0} r^{-m}\,\mathcal{H}^m\{E\cap(B(x,r)\setminus S(x,V,\theta))\} = 0.$$

В этом равенстве через $S(x,V,\theta)$ обозначено множество таких $y\in R^n$, что отрезок $[y,x]$ составляет угол не больший, чем θ, с подпространством V. Такое определение касательного пространства обобщает понятие касательного пространства к m-мерному гладкому подмногообразию пространства R^n. В случае многообразия оба определения дают одно и то же касательное пространство.

Следующая теорема характеризует счетно спрямляемые множества. Пусть E - m-множество в R^n, где m - целое число такое, что $0 < m < n$. Тогда равносильны

---

[3]Эти термины принадлежат Безиковичу, который полностью изучил случай одномерных множеств на плоскости. Неоценим вклад этого замечательного математика в обсуждаемую теорию. Большинство основных понятий и методов теории s-множеств было введено и разработано либо непосредственно Безиковичем, либо восходят к его работам. Почти всю свою жизнь Безикович уделял большое внимание геометрии множеств. В библиографии к рецензируемой книге имеется 38 наименований работ Безиковича по геометрической теории меры.

следующие утверждения: a) E - регулярно; b) E - счетно $(\mathcal{H}^m, m)$-спрямляемо; c) E имеет m-мерные касательные пространства $\mathcal{H}^m$-почти всюду на E. Отсюда несложно вывести соответствующую теорему и для иррегулярных множеств.

Эти результаты были получены в случае m=1, n=2 Безиковичем (см. [13, 14, 15]). Затем Федерер доказал, что b) $\Leftrightarrow$ c) (см. [17]), а Мур, - что a) $\Rightarrow$ b) при m=1 (см. [28]). Результат Мура был перенесен Мартстрандом на случай m=2, n=3 (см. [25]) и, наконец, Маттила доказал, что a) $\Rightarrow$ b) в общем случае (см. [27]).

Теорема Прайса из [31] как бы подводит итог исследованиям в этом направлении. Прайс доказал, что если $0 < m < n$ - целые числа, а Φ - внешняя мера на R^n такая, что борелевские множества Φ-измеримы и выполнено условие

$$0 < \lim_{r \downarrow 0} \frac{\Phi(B(x,r))}{r^m} < \infty$$

для Φ - почти всех $x \in R^n$, то тогда R^n является счетно (Φ, m)-спрямляемым множеством. Итак, в случае общих мер одно лишь существование m-мерной плотности (ненулевой и конечной) влечет счетную (Φ, m)-спрямляемость R^n. В частности, если у m-множества E существует m-мерная плотность $\mathcal{H}^m$-почти всюду на E и она отлична от 0 и ∞, то множество E является счетно $(\mathcal{H}^m, m)$-спрямляемым.

Интересно заметить, что появление фрактальных множеств было предсказано Джонатаном Свифтом. Приведем хорошо известный стихотворный отрывок, принадлежащий его перу. Он написан в 1793 г.[4]

Итак, натуралист глядит: блоха
Малюток-блошек тащит на себе,
А тех кусает меньших блошек свита,
И происходит так ad infinitum.

В этом четверостишии можно найти рецепт построения некоторых фрактальных множеств, например „снежинки" фон Коха.

Де Морган в 1872 г. продолжил шкалу Свифта в сторону роста размеров блошек и получил „двусторонний вариант" стихотворения Свифта:

Большие блохи - меньших блох
Несут на спинах свиту,
Кусает меньших мелкота,
И так - ad infinitum.
Но и большие, в свой черед,
Блох покрупней взнуздали,
А эти - больших, а они -
Огромных, и так далее.

Наконец, американский ученый Ричардсон в 1922 г. написал гидродинамическую пародию на стихотворение Свифта. Стихотворение Ричардсона описывает вязкость турбулентной жидкости:

---

[4]Все стихотворные тексты заимствованы из книги [23]. Они переведены с английского на русский язык автором данной рецензии. Заметим, что строчки Свифта (в прозаическом переводе) были использованы в качестве эпиграфа к рецензии [9] на книгу [30], напечатанной недавно в этом журнале.

Большие вихри - малых вихрей рой
Несут в себе, их скоростью питая,
А те - малюток тянут за собой
И к вязкости всю стаю увлекают
(в молекулярном смысле).

Для удобства читателя мы собрали фрактальные объекты в своеобразный зоопарк. Велико разнообразие видов фракталов. Сюда входят нигде не дифференцируемые функции Больцано и Вейерштрасса, «снежинка" фон Коха, траектории броуновского движения.

1. *Канторовское множество*, иногда называемое канторовским дисконтинуумом, или канторовской пылью - совершенное нигде не плотное компактное вполне несвязное множество. Оно - самоподобно, т.е. его фрагменты подобны самому множеству. Имеется красивая общая теория самоподобных множеств (см. [20, 35]).

2. *Чертова лестница* - функция Лебега, построенная по множеству канторовского типа.[5]

3. *Ковер Серпинского* - дырявый континуум на плоскости. Ковер Серпинского связен, совершенен, компактен и нигде не плотен. Если выбрасывать из квадрата не квадраты меньших размеров, как при построении ковра Серпинского, а кресты, то получится вполне несвязное множество канторовского типа.

4. *Кривая Пеано* - непрерывное отображение отрезка на квадрат.

5. *Ожерелье Антуана* - множество в R^3, полученное из тора при помощи конструкции канторовского типа, причем на каждом шаге построения от торов предыдущего порядка остается по четыре защепленных, но попарно не пересекающихся тора (ожерелье). Полученное множество совершенно, компактно, нигде не плотно, вполне несвязно, а его дополнение не является односвязным (что важно для получения ожерелья). В работе [36] показано, что ожерелье Антуана является почти периодическим минимальным множеством некоторой дискретной динамической системы в R^3.

6. *Совершенно измятый носовой платок* - поверхность без касательных плоскостей в каждой точке.

7. *Остаточное множество апполониевой укладки* - то, что остается от криволинейного треугольника в R^2 после выбрасывания последовательности замкнутых шаров $\{B_i\}$ таких, что для каждого k шар B_k является наибольшим шаром, содержащимся в $V\setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$ (или одним из наибольших).

8. *«Подкова" Смейла* - один из «странных аттракторов". Этот пример показывает, что гладкая динамическая система может иметь аттрактор канторовского типа.

9. *Дракон, кролик Дуади, дендрит* - некоторые из связных множеств Жюлиа для итераций квадратичных комплексных полиномов $z\to z^2+c$, где z, $c\in\mathbb{C}$ (см., например, [4, 16, 30]).

---

[5] О лестнице, а также о следующих за ней ковре Серпинского и кривой Пеано можно прочитать в книге [2]; канторовское множество, лестница, ковер и ожерелье Антуана имеются в [1].

10. *Множество Мандельброта* - множество тех $c\in\mathbb{C}$, для которых множество Жюлиа соответствующего полинома $z\to z^2+c$ связно. Красивые изображения этого невероятно сложно устроенного множества и его фрагментов, выполненные при помощи компьютера, приведены в [30] (см. также [4] и [9]).

Обратимся теперь к книге Фалконера, которая сразу после своего появления приобрела большую популярность среди специалистов. К ее несомненным достоинствам относятся лаконичный стиль изложения,[6] хорошо продуманные доказательства и естественный отбор тем. Все это позволило автору вместить в малый объем книги обширный и разнообразный материал.

Гл. 1 книги Фалконера - это стандартное введение в геометрическую теорию меры, которое содержит, в частности, определения меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^s$ и размерности по Хаусдорфу, а также доказательство одного варианта теоремы Витали о покрытиях в случае сужений меры $\mathcal{H}^s$ на измеримые множества. Следует заметить, что в упражнении 1.4 к гл. 1 неточно сформулирована теорема Витали для общих мер. По-видимому, пропущено дополнительное условие на меру или на покрывающее семейство. Несложно доказать, что при $0 < \alpha < 1$ сужение меры $\mathcal{H}^\alpha$ на некоторое множество C_α канторовского типа на прямой R^1 не удовлетворяет заключению теоремы Витали для специальным образом подобранного покрывающего семейства, хотя выполнены все условия упражнения 1.4. Теорема о покрытиях из упражнения 1.4 применяется затем в упражнении 1.8, однако здесь все верно, поскольку в предположениях упражнения 1.8 применение одного из известных вариантов теоремы Витали правомерно.

Гл. 2 посвящена изложению элементарных плотностных свойств s-множеств.

В гл. 3 начинается изучение геометрической структуры 1-множеств в пространстве R^2. Сначала доказываются теоремы о существовании касательных прямых у счетно-спрямляемых множеств и о том, что континуум конечной $\mathcal{H}^1$-меры счетно $(\mathcal{H}^1,1)$-спрямляем, а затем выводится счетная $(\mathcal{H}^1,1)$-спрямляемость регулярных 1-множеств. В этой же главе исследуются плотностные свойства иррегулярных множеств и доказывается, что у таких множеств нет касательных прямых $\mathcal{H}^1$-почти всюду на множестве. После этого формулируется и обсуждается общая теорема о структуре m-мерного множества в случае, когда m - целое число.

Гл. 4 посвящена свойствам множеств дробной размерности. Здесь изучаются угловые плотности таких множеств и доказываются теоремы Марстранда о несуществовании почти всюду шаровой плотности у множеств дробной размерности и об отсутствии слабых касательных у таких множеств.

В гл. 5 рассматриваются сетевые меры. Их отличие от мер Хаусдорфа заключается в том, что семейства покрывающих множеств в определении сетевых мер должны образовывать сеть. Примером такой меры служит, например, мера, порожденная сетью двоичных кубов в R^n. Сетевые меры используются в гл. 5 для вывода теорем Безиковича

---

[6] В работе [34] сказано, что книгу Фалконера характеризует "extremely readable exposition".

и Дэвиса о подмножествах ненулевой конечной меры Хаусдорфа внутри заданного замкнутого или аналитического множества, имеющего бесконечную меру. Об этих результатах можно прочитать также в книге [6]. Поскольку мера Хаусдорфа не σ-конечна, эти теоремы далеко не тривиальны. В гл. 5, кроме того, доказываются некоторые утверждения, касающиеся хаусдорфовой размерности декартовых произведений s-множеств.

В гл. 6 изучаются проекции s-множеств на m-мерные подпространства в R^n. Типичные результаты таковы: если E - аналитическое множество с $\dim_H E=s$, то при $s\le k$ имеем $\dim(\mathrm{proj}_V E)=s$ для почти всех V из многообразия Грассмана $G(n,k)$, а при $s>k$ множество $\mathrm{proj}_V E$ имеет положительную k-мерную меру Лебега для почти всех $V\in G(n,k)$. В этой главе излагаются также результаты Безиковича о проекциях регулярных и иррегулярных множеств.

Содержание гл. 7 группируется вокруг замечательного множества, построенного в 1919 г. Безиковичем. Это плоское множество имеет нулевую меру Лебега и тем не менее содержит единичные отрезки всех направлений. Используя его свойства, Безикович и независимо от него Перрон решили в 1928 г. знаменитую проблему Какейя о плоском множестве минимальной меры Лебега, внутри которого можно повернуть на 180^0 единичный отрезок. Они доказали, что мера множества Какейя может быть произвольно малой. В гл. 7 сначала излагается история постановки проблемы Какейя, а затем приводится ее решение с очень красивыми доказательствами.

Следующая часть гл. 7 посвящена связям между множествами Безиковича и теорией линейно-измеримых множеств. Здесь обсуждается важный метод, основанный на некоторых понятиях геометрической двойственности. Этот метод позволяет, в частности, построить множество нулевой меры Лебега в пространстве R^n, содержащее прямые всех направлений.

Далее в книге приведены приложения результатов из гл. 7 в гармоническом анализе. Наиболее известным является применение множества Безиковича в теории мультипликаторов Фурье. В 1971 г. Ч. Фефферман доказал (см. [19]), что характеристическая функция χ_B единичного шара пространства R^n не является мультипликатором Фурье в пространстве L^p при $p\ne 2$ или, иначе говоря, оператор T, определенный из равенства

$$(Tf)^\wedge(x) = \chi_B(x)\hat{f}(x),$$

где $^\wedge$ обозначает преобразование Фурье, не ограничен в L^p, $p\ne 2$. При доказательстве этого глубокого результата было использовано множество Безиковича. Некоторые другие применения фракталов в гармоническом анализе можно найти в [22].

Наконец, гл. 8 посвящена разнообразным приложениям теории фрактальных множеств. Несмотря на то что, как пишет автор книги, он отбирал темы для этой главы скорее по собственной прихоти, чем из-за их важности для приложений теории фракталов, эта глава поражает разнообразием сюжетов. Тут и нигде не

дифференцируемые кривые, и броуновское движение, и самоподобные множества, и универсальность Фейгенбаума, и экономные укладки, и множества, возникающие в теории диофантовых приближений, и выпуклый анализ. При своем небольшом объеме глава содержит множество интересных результатов, доказательств и глубоких идей. Отметим только красивое доказательство теоремы о существовании аттрактора Фейгенбаума для неподвижной точки преобразования удвоения и об оценках хаусдорфовой размерности этого аттрактора в § 8.7, использующее теорию самоподобных множеств из § 8.3 (другое доказательство этих результатов можно найти в [3]).

Конечно, исчерпать все связи теории фрактальных множеств с другими областями математики поистине невозможно. К перечисленному выше добавим только приложения этой теории в гидродинамике (см., например, О.А.Ладыженская [8]); в теории конформных отображений (см., например, Н.Г.Макаров [10]); в теории потенциала, где фракталы часто используются для иллюстрации связей между различными емкостями и мерами Хаусдорфа (см., например, Карлесон [6]); в теории А.Г.Витушкина (аналитическая емкость) (см. [24, 29], а также дополнения в книге Л.Д.Иванова [5], где имеется много примеров) и в задачах о следах и продолжениях для пространств гладких функций (см. Ионесон и Валлин [21]).

Книга Фалконера содержит интересные упражнения, хорошо иллюстрирующие излагаемый материал. Она, с одной стороны, может служить вводным курсом для изучающих геометрическую теорию меры и как бы мостиком к более обширным трудам на эту тему (например, к монографии Федерера [18]), а с другой стороны, несомненно должна быть интересна для специалистов. Нам представляется полезным опубликовать перевод этой книги на русский язык.

Список литературы

[1] Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 367 с.

[2] Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. М.: Наука, 1969. 159 с.

[3] Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // УМН. 1984. Т. 39, вып.3. С.3-37.

[4] Еременко А.Э., Любич М.Ю. Динамика аналитических преобразований //Алгебра и анализ. 1989. Т.1, вып.3. С.1-70.

[5] Иванов Л.Д. Вариации множеств и функций. М.: Наука, 1975. 352 с.

[6] Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств. М.: Мир, 1971. 126 с.

[7] Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука, 1989. 454 с.

[8] Ладыженская О.А. Об оценках фрактальной размерности и числа определяющих мод для инвариантных множеств динамических систем // Зап. науч.

семинаров ЛОМИ. 1 9 8 7. Т. 163. С.105-129.

[9] Л ю б и ч М.Ю. Рецензия на книгу [30] // Алгебра и анализ. 1 9 8 9. Т. 1, вып.4. С.247-254.

[10] М а к а р о в Н.Г. Вероятностные методы в теории конформных отображений // Алгебра и анализ. 1989. Т.1, вып.1. С.3-57.

[11] С а к с С. Теория интеграла. М.: Изд-во иностр. лит., 1 9 4 9. 495 с.

[12] Э б б о т т Э. Флатландия. Б ю р г е р Д. Сферландия. М.: Мир, 1 9 7 6. 360 с.

[13] B e s i c o v i t c h A.S. On the fundamental geometric properties of linearly measurable plane sets of points // Math. Ann. 1 9 2 8. Vol.98. P.422-464.

[14] B e s i c o v i t c h A.S. On the fundamental geometric properties of linearly measurable plane sets of points, II // Math. Ann. 1 9 3 8. Vol.115. P.296-329.

[15] B e s i c o v i t c h A.S. On the fundamental geometric properties of linearly measurable plane sets of points, III // Math. Ann. 1 9 3 9. Vol.116. P.349-357.

[16] B l a n c h a r d P. Complex analytic dynamics on the Riemann sphere // Bull.AMS. 1 9 8 4. Vol.11. P.85-141.

[17] F e d e r e r H. The (Φ,k)-rectifiable subsets of n-space // Trans. AMS. 1 9 4 7. Vol.62. P.114-192.

[18] F e d e r e r H. Geometric Measure Theory. Berlin etc.: Springer, 1 9 6 9. 676 p.

[19] F e f f e r m a n C. The multiplier problem for the ball // Ann.Math. 1 9 7 1. Vol.94. P.330-336.

[20] H u t c h i n s o n J.E. Fractals and self-similarity // Indiana Univ.Math.J. 1 9 8 1. Vol.30. P.713-747.

[21] J o n s s o n A., W a l l i n H. Function Spaces on Subsets of R^n. London etc.: Harwood, 1 9 8 4. 221 p.

[22] K a h a n e J.-P., S a l e m R. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Paris: Hermann, 1 9 6 3. 192 p.

[23] M a n d e l b r o t B.B. The Fractal Geometry of Nature. New York: W.H.Fremlin and Co, 1 9 8 3.

[24] M a r s h a l l D.E. Removable sets for bounded analytical functions // Linear and Complex Analysis Problem Book: Lect.Notes in Math. 1043. Berlin etc.: Springer, 1 9 8 4. P.491-494.

[25] M a r s t r a n d J.M. Hausdorff two-dimensional measure in 3-space // Proc.London Math.Soc. 1 9 6 1. Vol.XI, N 41. P.91-108.

[26] M a r s t r a n d J.M. The (Φ,s)-regular subsets of n-space // Trans.AMS. 1 9 6 4. Vol.113. P.369-392.

[27] M a t t i l a P. Hausdorff m-regular and rectifiable sets in n-space // Trans. AMS. 1 9 7 5. Vol.205. P.263-274.

[28] M o o r e E.F. Density ratios and $(\Phi,1)$-rectifiability in n-space // Trans.AMS. 1 9 5 0. Vol.69. P.324-334.

[29] M u r a i T. A real variable method for the Cauchy transform, and analytic capacity // Lect.Notes in Math. 1307. Berlin etc.: Springer, 1 9 8 8, 133 p.

[30] P e i t g e n H.-O., R i c h t e r P.H. The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verlag, 1 9 8 6.

[31] P r e i s s D. Geometry of measures in R^n: Distribution, rectifiability and densities // Ann. Math. 1 9 8 7. Vol.125. P.537-643.

[32] R o g e r s C.A. Hausdorff Measure. Cambridge Univ.Press, 1 9 7 0.

[33] S a l l i A. Upper density properties of Hausdorff measures on fractals // Ann.Acad.Sci.Fenn. I.Mathematica. Dissertationes. 1 9 8 5. Vol.55. P.3-49.

[34] S t r i c h a r t z R.S. Besicovitch meets Wiener-Fourier expansions and fractal measures // Bull.AMS. 1 9 8 1. Vol.20, N 1. P.55-59.

[35] W a l l i n H. Self-similarity, Markov's inequality and d-sets // Preprint. Univ. of Umeå. 1 9 8 7:7.

[36] Z h a n g Z h i f e n. A topological dynamical system in R^3 with Antonie's necklace as a minimal set // Scientia Sinica. 1 9 8 2. Vol.XXV, N 9. P.932-941.

А. Б. Гулисашвили