А. И. Храбров, Объёмные отношения для декартовых произведений выпуклых тел, *Алгебра и анализ*, 2020, том 32, выпуск 5, 114–129

Алгебра и анализ
Том 32 (2020), №5

Светлой памяти моего учителя Бориса Михайловича Макарова

ОБЪЁМНЫЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛЯ ДЕКАРТОВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

© А. И. ХРАБРОВ

В настоящей работе обсуждается поведение объёмных отношений, модифицированного расстояния Банаха–Мазура и индекса вершин на суммах выпуклых тел. Доказано, что $\sup_{\mathsf{M}\subset\mathbb{R}^{n-k}} \operatorname{vr}(\mathsf{K}, \mathsf{L}\oplus\mathsf{M}) \geqslant cn^{\frac{1}{2}-\frac{k}{2n}}$ для выпуклых тел $\mathsf{K}\subset\mathbb{R}^n$ и $\mathsf{L}\subset\mathbb{R}^k$ и для симметричных выпуклых тел $\mathsf{K}\subset\mathbb{R}^k$ и $\mathsf{L}\subset\mathbb{R}^{k'}$

$$\sup d(\mathsf{A}\oplus\mathsf{K}, \mathsf{B}\oplus\mathsf{L}) \geqslant \sup \partial(\mathsf{A}\oplus\mathsf{K}, \mathsf{B}\oplus\mathsf{L}) \geqslant c\cdot n^{1-\frac{k+k'}{2n}},$$

где sup берется по всем симметричным выпуклым телам $\mathsf{A}\subset\mathbb{R}^{n-k}$ и $\mathsf{B}\subset\mathbb{R}^{n-k'}$. Помимо этого в работе обсуждаются примеры, показывающие грубость оценки индекса вершин через объёмные отношения.

§1. Введение

Каждое содержащее начало координат выпуклое тело $\mathsf{K}\subset\mathbb{R}^k$ определяет функционал Минковского $\|x\|_{\mathsf{K}} = \inf\{\lambda > 0 : x/\lambda \in \mathsf{K}\}$. Если тело симметрично относительно начала координат, то величина $\|\cdot\|_{\mathsf{K}}$ будет нормой в $\mathbb{R}^k$. Для содержащих начало координат выпуклых тел $\mathsf{K}\subset\mathbb{R}^k$ и $\mathsf{L}\subset\mathbb{R}^\ell$ назовем их p-прямой суммой такое тело $\mathsf{K}\oplus_p\mathsf{L}\subset\mathbb{R}^{k+\ell}$ $(1\leqslant p<\infty)$, что

$$\|(x,y)\|_{\mathsf{K}\oplus_p\mathsf{L}} = \left(\|x\|_{\mathsf{K}}^p + \|y\|_{\mathsf{L}}^p\right)^{1/p} \quad \text{и} \quad \|(x,y)\|_{\mathsf{K}\oplus_\infty\mathsf{L}} = \max\{\|x\|_{\mathsf{K}}, \|y\|_{\mathsf{L}}\}.$$

Отметим, что $\mathsf{K}\oplus_1\mathsf{L} = \operatorname{conv}\{\mathsf{K}\times 0, 0\times\mathsf{L}\}$ и $\mathsf{K}\oplus_\infty\mathsf{L} = \mathsf{K}\times\mathsf{L}$. Ниже мы обычно будем считать, что $p=2$. Поскольку $\mathsf{K}\oplus_1\mathsf{L}\subset\mathsf{K}\oplus_p\mathsf{L}\subset\mathsf{K}\oplus_\infty\mathsf{L}$, рассмотрение других p приведет к изменению некоторых констант.

Такие суммы возникают при построении различных контрпримеров и доказательствах точности оценок, связанных с объёмами и некоторыми другими характеристиками. Например, они использовались в работе

Ключевые слова: объёмное отношение, расстояние Банаха–Мазура, индекс вершин.

Рудельсона [37] для сравнения обычного и слабого расстояний Банаха–Мазура и в работе Бахарева [1] для сравнения обычного и модифицированного расстояний Банаха–Мазура.

Расстоянием Банаха–Мазура $d(\mathsf{K},\mathsf{L})$ между n-мерными выпуклыми телами K и L называется величина (этот и все последующие инфимумы берутся по всем аффинным отображениям $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$)

$$\inf\{\lambda>0:\mathsf{K}\subset T\mathsf{L}\subset\lambda\mathsf{K}\}.$$

Для выпуклых тел $\mathsf{K},\mathsf{L}\subset\mathbb{R}^n$ определим объёмное отношение

$$\mathrm{vr}(\mathsf{K},\mathsf{L})=\Bigl(\inf\Bigl\{\frac{\mathrm{vol}\,\mathsf{K}}{\mathrm{vol}\,T\mathsf{L}}:T\mathsf{L}\subset\mathsf{K}\Bigr\}\Bigr)^{1/n}.$$

Модифицированным расстоянием назовем величину $\partial(\mathsf{K},\mathsf{L})$, равную

$$\inf\{\lambda>0:\mathsf{K}\subset\lambda T\mathsf{L},\ |\det T|=1\}\inf\{\lambda>0:\mathsf{L}\subset\lambda T\mathsf{K},\ |\det T|=1\} \\ =\mathrm{vr}(\mathsf{K},\mathsf{L})\,\mathrm{vr}(\mathsf{L},\mathsf{K}).$$

Ясно, что $\partial(\mathsf{K},\mathsf{L})\leqslant d(\mathsf{K},\mathsf{L})$ для всех K и L. Расстояние $\partial(\mathsf{K},\mathsf{L})$ неявно использовалось в работе [7] для вывода оценок расстояния Банаха–Мазура между пространствами ℓ_n^p и в [4], где доказано существование n-мерных симметричных выпуклых тел K_0 и L_0, для которых $\partial(\mathsf{K}_0,\mathsf{L}_0)\geqslant cn$. Изучению расстояния $\partial(\mathsf{K},\mathsf{L})$ посвящены работы [1–3, 10–13]. В статье [28] доказано, что $\partial(\mathsf{K},\mathsf{L})\leqslant n$.

Величина $(\mathrm{vr}(\mathsf{K},\mathsf{L}))^n$ впервые появилась в работе Макбета [31] (см. также обзор [6]). В случае $\mathsf{L}=\mathsf{B}_n^2$ величина $\mathrm{vr}(\mathsf{K},\mathsf{B}_n^2)$ изучалась в большом количестве работ (см. главу 6 монографии [34] или главу 5 монографии [14] и многочисленные библиографические ссылки в них).

В работе Стейна [38] для любого выпуклого тела L доказано существование такого симметричного выпуклого тела $\widetilde{\mathsf{L}}\subset\mathsf{L}$, что $\mathrm{vol}\,\widetilde{\mathsf{L}}\geqslant 2^{-n}\,\mathrm{vol}\,\mathsf{L}$. А в работе Роджерса и Шепарда [35] доказано неравенство $\mathrm{vol}(\mathsf{K}-\mathsf{K})\geqslant 2^n\,\mathrm{vol}\,\mathsf{K}$. Следовательно,

$$\mathrm{vr}(\mathsf{K},\mathsf{L})\leqslant\mathrm{vr}(\mathsf{K}-\mathsf{K},\widetilde{\mathsf{L}})\leqslant 4\,\mathrm{vr}(\mathsf{K},\mathsf{L}).$$

Поэтому при оценках объёмных отношений можно ограничиться рассмотрением лишь симметричных выпуклых тел (т. е. единичных шаров некоторых конечномерных нормированных пространств).

В общем виде величина $\mathrm{vr}(\mathsf{K},\mathsf{L})$ для симметричных выпуклых тел изучалась автором в 2001 году в работе [12], где, в частности, доказано, что для любого выпуклого тела $\mathsf{K}\subset\mathbb{R}^n$ существуют такие симметричные выпуклые тела $\mathsf{L},\mathsf{M}\subset\mathbb{R}^n$, что

$$\mathrm{vr}(\mathsf{K},\mathsf{L})\geqslant c\sqrt{\frac{n}{\ln\ln n}}\quad\text{и}\quad\mathrm{vr}(\mathsf{M},\mathsf{K})\geqslant c\sqrt{\frac{n}{\ln\ln n}}\tag{1}$$

для некоторой абсолютной константы $c > 0$.

В 2002 году Гианнопулос и Хартзулаки [22] доказали, что для любых выпуклых тел $\mathrm{vr}(\mathsf{K},\mathsf{L}) \leqslant c\sqrt{n}\ln n$. Поэтому неравенства (1) в степенной шкале не могут быть улучшены. В работе [11] эти неравенства распространяются на случай прямых сумм симметричных выпуклых тел. А именно, доказывается, что для тел $\mathsf{K} \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathsf{L} \subset \mathbb{R}^k$, где $0 < k < \delta n$ существуют симметричные выпуклые тела $\mathsf{M}, \widetilde{\mathsf{M}} \subset \mathbb{R}^{n-k}$, для которых

$$\mathrm{vr}(\mathsf{K}, \mathsf{L} \oplus \mathsf{M}) \geqslant c\left(\frac{n}{\ln\ln n}\right)^{\frac{1-\delta}{2}} \quad \text{и} \quad \mathrm{vr}(\mathsf{L} \oplus \widetilde{\mathsf{M}}, \mathsf{K}) \geqslant c\left(\frac{n}{\ln\ln n}\right)^{\frac{1-\delta}{2}}. \tag{2}$$

В 2019 году в работе [21] Галисер, Мерзбахер и Пинаско избавились от знаменателя в неравенствах (1).

В настоящей работе с помощью модификации их рассуждения, а также рассуждения из работы [11] удается избавиться и от логарифмов в знаменателе оценки (2). А именно доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\delta > 0$ и $k/n \leqslant \delta$. Для любых выпуклых тел $\mathsf{K} \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathsf{L} \subset \mathbb{R}^k$, существуют такие симметричные выпуклые тела $\mathsf{M}, \widetilde{\mathsf{M}} \subset \mathbb{R}^{n-k}$, для которых*

$$\mathrm{vr}(\mathsf{K}, \mathsf{L} \oplus \mathsf{M}) \geqslant cn^{\frac{1-\delta}{2}} \quad \text{и} \quad \mathrm{vr}(\mathsf{L} \oplus \widetilde{\mathsf{M}}, \mathsf{K}) \geqslant cn^{\frac{1-\delta}{2}}, \tag{3}$$

где $c > 0$ — абсолютная константа.

Теорема 2. *Пусть $0 \leqslant \delta, \delta' \leqslant 1$, $k \leqslant \delta n$, $k' \leqslant \delta' n$, $\mathsf{K} \subset \mathbb{R}^k$, $\mathsf{L} \subset \mathbb{R}^{k'}$ — симметричные выпуклые тела. Тогда существуют симметричные выпуклые тела $\mathsf{A} \subset \mathbb{R}^{n-k}$ и $\mathsf{B} \subset \mathbb{R}^{n-k'}$, для которых*

$$d(\mathsf{A} \oplus \mathsf{K}, \mathsf{B} \oplus \mathsf{L}) \geqslant \partial(\mathsf{A} \oplus \mathsf{K}, \mathsf{B} \oplus \mathsf{L}) \geqslant c \cdot n^{1-\frac{\delta+\delta'}{2}},$$

где $c > 0$ — абсолютная константа.

Неравенства в теоремах 1 и 2 не могут быть улучшены из-за логарифмической выпуклости объёмных отношений и модифицированного расстояния (4). Например, для $\mathsf{K} = \mathsf{B}_n^2$ и $\mathsf{L} = \mathsf{B}_k^2$ имеем

$$\mathrm{vr}(\mathsf{B}_n^2, \mathsf{B}_k^2 \oplus \mathsf{M}) \leqslant 2\,\mathrm{vr}(\mathsf{B}_{n-k}^2, \mathsf{M})^{1-\delta} \leqslant 2n^{\frac{1-\delta}{2}}.$$

Кроме того, если $\mathsf{K} \subset \mathbb{R}^k$ — симметричное выпуклое тело и $\delta = k/n$, то (sup берется по всем $(n-k)$-мерным симметричным выпуклым телам A и B)

$$cn^{1-\frac{\delta}{2}} \leqslant \sup\left\{\partial(\mathsf{A} \oplus \mathsf{K}, \mathsf{B} \oplus \mathsf{K})\right\} \leqslant n^{1-\frac{\delta}{2}}.$$

Однако можно показать, что для любого симметричного выпуклого тела $\mathsf{K} \subset \mathbb{R}^n$ найдутся такие симметричные выпуклые тела $\mathsf{L} \subset \mathbb{R}^k$ и $\mathsf{M} \subset \mathbb{R}^{n-k}$, что $\mathrm{vr}(\mathsf{K}, \mathsf{L} \oplus \mathsf{M}) \geqslant c\sqrt{n}$.

§2. Предварительные сведения

Выпуклые тела мы будем обозначать заглавными буквами прямого рукописного шрифта, аффинные и линейные отображения курсивными заглавными буквами, множества тел или операторов рукописным курсивом. Через B_n^p будем обозначать единичный шар в пространстве ℓ_n^p.

Запись $f \succ g$ или $g \prec f$ означает, что существует константа $c > 0$, для которой при всех допустимых x выполнено неравенство $f(x) \geqslant cg(x)$. Если $f \prec g$ и $f \succ g$, то мы пишем $f \asymp g$.

Пусть vol — лебегова мера в $\mathbb{R}^n$ или подпространствах меньшей размерности, меру Лебега в пространствах, размерность которых квадратична по n, будем обозначать $|\cdot|$. Объём единичного евклидова шара размерности k обозначим через ν_k. Отметим, что $\nu_k^{1/k} \asymp \frac{1}{\sqrt{k}}$. Для выпуклого тела $\mathsf{B} \subset \mathbb{R}^k$ положим

$$\Delta(\mathsf{B}) = \frac{\operatorname{vol} \mathsf{B}}{\operatorname{vol} \mathsf{B}_k^2} = \frac{\operatorname{vol} \mathsf{B}}{\nu_k}.$$

Обозначим через σ_n вероятностную меру Хаара на сфере S^{n-1}; e_1, e_2, $\dots$, e_n — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. На множестве

$$\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j(n) = \bigl\{\operatorname{conv}\{\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_n, \pm f_1, \pm f_2, \dots, \pm f_j\} : \\ f_i \in S^{n-1}, i = 1, 2, \dots, j\bigr\}.$$

определена вероятность $\mathbf{P}$, индуцированная произведением мер $\sigma_n \times \sigma_n \times \dots \times \sigma_n$, определенным на $S^{n-1} \times S^{n-1} \times \dots \times S^{n-1}$ (в каждом произведении по j сомножителей).

Для симметричного выпуклого тела $\mathsf{K} \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$\ell(\mathsf{K}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|x\|_{\mathsf{K}}\, d\gamma_n(x) \asymp \sqrt{n} \int\limits_{S^{n-1}} \|x\|_{\mathsf{K}}\, d\sigma_n(x) = \sqrt{n}\mathcal{M}(\mathsf{K}),$$

где γ_n — гауссова мера в $\mathbb{R}^n$.

Ниже нам понадобятся два классических леммы: первая принадлежит Роджерсу и Шепарду (см. [36] или [34, глава 8]), вторая — стандартная объёмная оценка на количество элементов в максимальном ε-различимом множестве, см., например, [4], неравенство Шеве (см. [20] или [26] для версии с более точными константами), логарифмическая выпуклость объёмных отношений и модифицированного расстояния Банаха–Мазура ([11, теорема 1] и [10, теорема 2]), а также представление объёмных отношений с помощью норм операторов ([12, лемма 1]).

Лемма 1. *Пусть* K *— выпуклое подмножество n-мерного пространства, E — k-мерное подпространство. Тогда*

$$(C_n^k)^{-1} \operatorname{vol}(\operatorname{Pr}_{E^\perp} \mathsf{K}) \cdot \operatorname{vol}(\mathsf{K} \cap E) \leqslant \operatorname{vol} \mathsf{K} \leqslant \operatorname{vol}(\operatorname{Pr}_{E^\perp} \mathsf{K}) \cdot \operatorname{vol}(\mathsf{K} \cap E).$$

Лемма 2. *Пусть* $\mathsf{C} \subset \mathsf{C}_0 \subset \mathbb{R}^n$ *— симметричные выпуклые тела и* $\mathsf{D} \subset \mathsf{C}_0$*. Обозначим через* $\mathcal{N}(\mathsf{D}, \varepsilon)$ *количество элементов в минимальной* ε*-сети множества* D *в метрике порожденной нормой* $\|\cdot\|_{\mathsf{C}}$*. Тогда*

$$\mathcal{N}(\mathsf{D}, \varepsilon) \leqslant \Bigl(1 + \frac{2}{\varepsilon}\Bigr)^n \cdot \frac{\operatorname{vol} \mathsf{C}_0}{\operatorname{vol} \mathsf{C}}.$$

Неравенство Шеве. *Пусть* $\mathsf{K} \subset \mathbb{R}^n$ *и* $\mathsf{L} \subset \mathbb{R}^m$ *— симметричные выпуклые тела. Тогда (множество всех матриц* $(n \times m)$ *отождествляются с* $\mathbb{R}^{nm}$*)*

$$\int\limits_{S^{nm-1}} \|U\|_{\mathsf{K}\to\mathsf{L}}\, d\sigma(U) \leqslant \frac{C}{\sqrt{nm}} \bigl(\|Id\|_{\mathsf{K}\to\mathsf{B}_n^2} \ell(\mathsf{L}) + \|Id\|_{\mathsf{B}_m^2\to\mathsf{L}} \ell(\mathsf{K}^\circ)\bigr).$$

Лемма 3 (логарифмическая выпуклость vr и ∂)**.** *Для любых симметричных выпуклых тел* K_1, K_2, L_1 *и* L_2 $(\mathsf{K}_i, \mathsf{L}_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2)$ *выполнены неравенства*

$$\begin{gathered}\operatorname{vr}(\mathsf{K}_1 \oplus \mathsf{K}_2, \mathsf{L}_1 \oplus \mathsf{L}_2) \leqslant 2\bigl(\operatorname{vr}(\mathsf{K}_1, \mathsf{L}_1)\bigr)^{\frac{n_1}{n_1+n_2}} \cdot \bigl(\operatorname{vr}(\mathsf{K}_2, \mathsf{L}_2)\bigr)^{\frac{n_2}{n_1+n_2}} \quad \text{и} \\ \partial(\mathsf{K}_1 \oplus \mathsf{K}_2, \mathsf{L}_1 \oplus \mathsf{L}_2) \leqslant \bigl(\partial(\mathsf{K}_1, \mathsf{L}_1)\bigr)^{\frac{n_1}{n_1+n_2}} \cdot \bigl(\partial(\mathsf{K}_2, \mathsf{L}_2)\bigr)^{\frac{n_2}{n_1+n_2}}.\end{gathered} \tag{4}$$

Лемма 4. *Пусть* K *и* L *симметричные выпуклые тела в* $\mathbb{R}^n$*. Тогда*

$$\operatorname{vr}(\mathsf{K}, \mathsf{L}) = \inf\bigl\{\|T\|_{\mathsf{L}\to\mathsf{K}} : T \in SL(n)\bigr\} \cdot \Bigl(\frac{\operatorname{vol} \mathsf{K}}{\operatorname{vol} \mathsf{L}}\Bigr)^{1/n}.$$

§3. Доказательство теоремы 1

Пусть $\mathcal{M}_\gamma^{\mathsf{K}} = \bigl\{T \in SL(n) : \|T\|_{\mathsf{B}_m^1\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{K}} \leqslant \gamma\bigr\}$, а $\mathcal{N}_\gamma^{\mathsf{K}}$ — минимальная γ-сеть компакта $\mathcal{M}_\gamma^{\mathsf{K}}$ в метрике, порожденной нормой $\|\cdot\|_{\mathsf{B}_m^2\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{K}}$.

Лемма 5. *Для абсолютной константы* $C > 0$ *имеет место оценка*

$$\#\mathcal{N}_\gamma^{\mathsf{K}} \leqslant C^{nm} 6^{n^2} (\operatorname{vol} \mathsf{K})^m \bigl(\ell(\mathsf{K}) + \sqrt{m}\|Id\|_{\mathsf{B}_n^2\to\mathsf{K}}\bigr)^{nm}.$$

Доказательство. Будем отождествлять матрицы $n \times n$ с элементами $\mathbb{R}^{n^2}$. Пусть $\mathcal{U}$ — единичный шар в пространстве с нормой $\|\cdot\|_{\mathsf{B}_m^2\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{K}}$, рассматриваемый как подмножество $\mathbb{R}^{n^2}$. Поскольку $\|\cdot\|_{\mathsf{B}_m^1\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{K}} \leqslant \|\cdot\|_{\mathsf{B}_m^2\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{K}}$, справедливо включение $\gamma\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_\gamma^{\mathsf{K}}$. Поэтому по лемме 2 для количества элементов 1-сети в метрике порожденной шаром $\gamma\mathcal{U}$ будет неравенство

$$\mathcal{N}_\gamma^{\mathsf{K}} \leqslant 3^{n^2} \frac{|\{T : \|T\|_{\mathsf{B}_m^1\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{K}} \leqslant \gamma\}|}{|\gamma\mathcal{U}|} = 3^{n^2} \frac{|\{T : \|T\|_{\mathsf{B}_m^1\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{K}} \leqslant 1\}|}{|\mathcal{U}|}. \tag{5}$$

Для оператора $T : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ положим $T_1 := T\big|_{\mathbb{R}^m}$ и $T_2 := T\big|_{\mathbb{R}^k}$. Тогда

$$\{T : \|T\|_{\mathsf{B}_m^1\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{K}} \leqslant 1\} \subset \{T_1 : \|T_1\|_{\mathsf{B}_m^1\to\mathsf{K}} \leqslant 1\} \times \{T_2 : \|T_2\|_{\mathsf{L}\to\mathsf{K}} \leqslant 1\}.$$

Множество $\{T_1 : \|T_1\|_{\mathsf{B}^1_m\to\mathsf{K}} \leqslant 1\}$ состоит в точности из тех T_1, столбцы матрицы которых лежат в K, поэтому

$$|\{T : \|T\|_{\mathsf{B}^1_m\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{K}} \leqslant 1\}| \leqslant (\operatorname{vol}\mathsf{K})^m |\{T_2 : \|T_2\|_{\mathsf{L}\to\mathsf{K}} \leqslant 1\}|. \tag{6}$$

Далее, по неравенству Роджерса–Шепарда

$$|\mathcal{U}| \geqslant 2^{-n^2} |\operatorname{Pr}_{\mathbb{R}^{nm}}\mathcal{U}|\, |\mathbb{R}^{nk}\cap\mathcal{U}|.$$

Множество $\mathbb{R}^{nk}\cap\mathcal{U}$ содержит все такие операторы, что $T_1=0$ и $\|T_2\|_{\mathsf{L}\to\mathsf{K}}\leqslant 1$, поэтому $|\mathbb{R}^{nk}\cap\mathcal{U}| \geqslant |\{T_2 : \|T_2\|_{\mathsf{L}\to\mathsf{K}} \leqslant 1\}|$. Множество $\operatorname{Pr}_{\mathbb{R}^{nm}}\mathcal{U}$ содержит все такие операторы, что $\|T_1\|_{\mathsf{B}^2_m\to\mathsf{K}} \leqslant 1$ и $T_2 = 0$, поэтому

$$|\operatorname{Pr}_{\mathbb{R}^{nm}}\mathcal{U}| \geqslant |\{T_1 : \|T_1\|_{\mathsf{B}^2_m\to\mathsf{K}} \leqslant 1\}|.$$

Дальнейшая оценка $|\{T_1 : \|T_1\|_{\mathsf{B}^2_m\to\mathsf{K}} \leqslant 1\}|$ аналогична оценке из монографии [40, лемма 38.5] и почти повторяет часть доказательства леммы 3.2 из работы [21]. Переход к сферическим координатам дает равенство

$$\frac{|\{\|T_1\|_{\mathsf{B}^2_m\to\mathsf{K}} \leqslant 1\}|}{\mathrm{v}_{nm}} = \int\limits_{S^{nm-1}} \|T_1\|^{-nm}_{\mathsf{B}^2_m\to\mathsf{K}}\, d\sigma(T_1).$$

По неравенству Гёльдера для показателей $1+\frac{1}{nm}$ и $1+nm$ имеем

$$\Bigg(\int\limits_{S^{nm-1}} \|T_1\|^{-nm}_{\mathsf{B}^2_m\to\mathsf{K}}\, d\sigma(T_1)\Bigg)^{\frac{nm}{1+nm}} \Bigg(\int\limits_{S^{nm-1}} \|T_1\|_{\mathsf{B}^2_m\to\mathsf{K}}\, d\sigma(T_1)\Bigg)^{\frac{1}{1+nm}} \geqslant 1,$$

поэтому

$$\frac{|\{\|T_1\|_{\mathsf{B}^2_m\to\mathsf{K}} \leqslant 1\}|}{\mathrm{v}_{nm}} \geqslant \Bigg(\int\limits_{S^{nm-1}} \|T_1\|_{\mathsf{B}^2_m\to\mathsf{K}}\, d\sigma(T_1)\Bigg)^{-nm}.$$

Но по неравенству Шеве

$$\begin{aligned}\int\limits_{S^{nm-1}} \|T_1\|_{\mathsf{B}^2_m\to\mathsf{K}}\, d\sigma(T_1) &\leqslant \frac{\widetilde{C}}{\sqrt{nm}}\big(\ell(\mathsf{K})\|Id\|_{\mathsf{B}^2_m\to\mathsf{B}^2_m} + \ell(\mathsf{B}^2_m)\|Id\|_{\mathsf{B}^2_n\to\mathsf{K}}\big)\\ &\leqslant \frac{\widetilde{C}}{\sqrt{nm}}\big(\ell(\mathsf{K}) + \sqrt{m}\|Id\|_{\mathsf{B}^2_n\to\mathsf{K}}\big).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\{\|T_1\|_{\mathsf{B}^2_m\to\mathsf{K}} \leqslant 1\}| \geqslant \mathrm{v}_{nm}\, \frac{(nm)^{nm/2}}{\widetilde{C}^{nm}\big(\ell(\mathsf{K}) + \sqrt{m}\|Id\|_{\mathsf{B}^2_n\to\mathsf{K}}\big)^{nm}} \quad \text{и}$$

$$|\mathcal{U}| \geqslant 2^{-n^2} |\{T_2 : \|T_2\|_{\mathsf{L}\to\mathsf{K}} \leqslant 1\}|\, \mathrm{v}_{nm}\, \frac{(nm)^{nm/2}}{\widetilde{C}^{nm}\big(\ell(\mathsf{K}) + \sqrt{m}\|Id\|_{\mathsf{B}^2_n\to\mathsf{K}}\big)^{nm}}. \tag{7}$$

Соберем вместе неравенства (5), (6), (7) и получим

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\gamma^K &\leqslant 6^{n^2}\frac{\widetilde{C}^{nm}(\operatorname{vol}\mathsf{K})^m\big(\ell(\mathsf{K})+\sqrt{m}\|Id\|_{\mathsf{B}_n^2\to\mathsf{K}}\big)^{nm}}{\nu_{nm}(nm)^{nm/2}}\\ &\leqslant C^{nm}6^{n^2}(\operatorname{vol}\mathsf{K})^m\big(\ell(\mathsf{K})+\sqrt{m}\|Id\|_{\mathsf{B}_n^2\to\mathsf{K}}\big)^{nm}.\end{aligned}$$ □

Следующая лемма доказана в работе [21, предложение 3.8] с помощью неравенства Пауриса [32] и теоремы Клартага [30].

Лемма 6. *Для любого симметричного выпуклого тела $\mathsf{K}\subset\mathbb{R}^n$ существует такое симметричное выпуклое тело $\widetilde{\mathsf{K}}\supset\mathsf{K}$, что $\operatorname{vr}(\widetilde{\mathsf{K}},\mathsf{K})\leqslant C$ и*

$$\big(\ell(\widetilde{\mathsf{K}})+\|Id\|_{\mathsf{B}_n^2\to\widetilde{\mathsf{K}}}\sqrt{n}\big)(\operatorname{vol}\widetilde{\mathsf{K}})^{1/n}\leqslant C, \tag{8}$$

где $C>0$ — универсальная константа.

Замечание. Поскольку ни $\operatorname{vr}(\widetilde{\mathsf{K}},\mathsf{K})$, ни величина в левой части (8) не меняются при гомотетии $\widetilde{\mathsf{K}}$, то, если нужно, можно взять тело $\lambda\widetilde{\mathsf{K}}$ вместо $\widetilde{\mathsf{K}}$ (включение $\widetilde{\mathsf{K}}\supset\mathsf{K}$ при этом конечно не сохранится).

Следствие. *Для тела $\widetilde{\mathsf{K}}\supset\mathsf{K}$ из леммы 6*

$$\#\mathcal{N}_\gamma^{\widetilde{\mathsf{K}}}\leqslant C^{nm}6^{n^2},$$

где $C>0$ — универсальная константа.

Лемма 7. *Пусть B — симметричное выпуклое тело в $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k$, L — симметричное выпуклое тело в $\mathbb{R}^k$. Положим*

$$W=\big\{x\in S^{m-1}:\|x+y\|_{\mathsf{B}}\leqslant\alpha,\ \ \forall y\in\mathsf{L}\big\}.$$

Тогда

$$\sigma_m(W)\leqslant\alpha^n\frac{\operatorname{vol}\mathsf{B}}{\nu_m\cdot\operatorname{vol}\mathsf{L}}$$

Доказательство. Обозначим через $\operatorname{cone}W$ содержащуюся в B_m^2 часть конуса, натянутого на W. Если $x\in W$, то для любого $y\in\mathsf{L}$ имеем неравенства $\|x+y\|_{\mathsf{B}}\leqslant\alpha$ и $\|x-y\|_{\mathsf{B}}\leqslant\alpha$. Следовательно,

$$2\|y\|_{\mathsf{B}}\leqslant\|x+y\|_{\mathsf{B}}+\|x-y\|_{\mathsf{B}}\leqslant 2\alpha.$$

Поэтому справедливо включение $\{0\}\times\mathsf{L}\subset\alpha\mathsf{B}$. С другой стороны по условию $W\times\mathsf{L}\subset\alpha\mathsf{B}$. Тогда и выпуклая оболочка множеств $\{0\}\times\mathsf{L}$ и $W\times\mathsf{L}$ лежит в $\alpha\mathsf{B}$. Стало быть, $\operatorname{cone}W\times\mathsf{L}\subset\alpha\mathsf{B}$. Поэтому

$$\sigma_m(W)=\frac{\operatorname{vol}(\operatorname{cone}W)}{\nu_m}=\frac{\operatorname{vol}(\operatorname{cone}W\times\mathsf{L})}{\nu_m\operatorname{vol}\mathsf{L}}\leqslant\frac{\alpha^n\operatorname{vol}\mathsf{B}}{\nu_m\operatorname{vol}\mathsf{L}}.$$ □

Лемма 8. *Для любых симметричных выпуклых тел* $\mathsf{B} \subset \mathbb{R}^n$ *и* $\mathsf{L} \subset \mathbb{R}^k$ *имеет место оценка*

$$\mathbf{P}\big\{\mathsf{A} \in \mathcal{A}_j(m) : \|T\|_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}} \leqslant \alpha\Delta(\mathsf{L})^{1/n}\Delta(\mathsf{B})^{-1/n}\big\} \leqslant \Big(\alpha^n \frac{\nu_n}{\nu_m\nu_k}\Big)^j \leqslant \alpha^{jn}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big\{\mathsf{A} \in \mathcal{A}_j(m) : \|T\|_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}} \leqslant \beta\big\}\\
&\qquad\leqslant \mathbf{P}\big\{\|T(f_i+y)\|_{\mathsf{B}} \leqslant \beta \ \ \forall y \in \mathsf{L},\ \forall i = 1,2,\dots,j\big\}\\
&\qquad= \mathbf{P}\big\{\|f_i+y\|_{T^{-1}\mathsf{B}} \leqslant \beta \ \ \forall y \in \mathsf{L},\ \forall i = 1,2,\dots,j\big\}\\
&\qquad= \big(\mathbf{P}\big\{x \in S^{n-k-1} : \|x+y\|_{T^{-1}\mathsf{B}} \leqslant \beta \ \ \forall y \in \mathsf{L}\big\}\big)^j \leqslant \Big(\beta^n \frac{\operatorname{vol}\mathsf{B}}{\nu_m \operatorname{vol}\mathsf{L}}\Big)^j.
\end{aligned}$$

Возьмем $\beta = \alpha\Delta(\mathsf{L})^{1/n}\Delta(\mathsf{B})^{-1/n}$, тогда

$$\mathbf{P}\big\{\mathsf{A}\in\mathcal{A}_j(m) : \|T\|_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}}\leqslant\beta\big\}\leqslant\Big(\alpha^n\frac{\operatorname{vol}\mathsf{L}}{\nu_k}\frac{\nu_n}{\operatorname{vol}\mathsf{B}}\frac{\operatorname{vol}\mathsf{B}}{\nu_m\operatorname{vol}\mathsf{L}}\Big)^j = \Big(\alpha^n\frac{\nu_n}{\nu_m\nu_k}\Big)^j. \quad \square$$

Зафиксируем минимальную γ-сеть $\mathcal{N}_\gamma^{\mathsf{B}}$ в множестве $\mathcal{M}_\gamma^{\mathsf{B}}$. Положим

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathsf{B},\beta) &= \big\{\mathsf{A} \in \mathcal{A}_j(m) : \exists T \in SL(n),\ \|T\|_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}} \leqslant \beta\big\},\\
\mathcal{V}'(\mathsf{B},\beta) &= \big\{\mathsf{A} \in \mathcal{A}_j(m) : \exists T \in \mathcal{N}_\gamma^{\mathsf{B}},\ \|T\|_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}} \leqslant \beta\big\}.
\end{aligned}$$

Лемма 9. *Справедливо включение* $\mathcal{V}(\mathsf{B},\gamma) \subset \mathcal{V}'(\mathsf{B},2\gamma)$.

Доказательство. Если $\mathsf{A} \in \mathcal{V}(\mathsf{B},\gamma)$, то существует $T \in SL(n)$, для которого $\|T\|_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}} \leqslant \gamma$. Тогда

$$\|T\|_{\mathsf{B}_m^1\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}} \leqslant \|Id\|_{\mathsf{B}_m^1\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{A}\oplus\mathsf{L}}\|T\|_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}} \leqslant \gamma.$$

Следовательно, $T \in \mathcal{M}_\gamma^{\mathsf{B}}$. Поэтому найдется оператор $R \in \mathcal{N}_\gamma^{\mathsf{B}}$, для которого $\|R-T\|_{\mathsf{B}_m^2\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}} \leqslant \gamma$. Оценим норму разности $\|R-T\|_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}}$:

$$\|R-T\|_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}} \leqslant \|Id\|_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}_m^2\oplus\mathsf{L}}\|R-T\|_{\mathsf{B}_m^2\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}} \leqslant \gamma.$$

Отсюда

$$\|R\|_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}} \leqslant \|T\|_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}} + \|R-T\|_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{B}} \leqslant 2\gamma. \qquad \square$$

Следствие. *Пусть тело* $\widetilde{\mathsf{K}}$ *из леммы* 6 *и* $\gamma = \alpha\Delta(\mathsf{L})^{1/n}\Delta(\widetilde{\mathsf{K}})^{-1/n}$. *Тогда для некоторой абсолютной константы* $C > 0$

$$\mathbf{P}\big(\mathcal{V}(\widetilde{\mathsf{K}},\gamma)\big) \leqslant C^{n^2} \cdot \Big(2^n\alpha^n\frac{\nu_n}{\nu_m\nu_k}\Big)^j \leqslant C^{n^2}\cdot 2^{jn}\alpha^{jn}.$$

Доказательство. Последовательно воспользовавшись леммами 9 и 8, а также следствием леммы 6, получим

$$\mathbf{P}\big(\mathcal{V}(\widetilde{\mathsf{K}},\gamma)\big) \leqslant \mathbf{P}\big(\mathcal{V}'(\widetilde{\mathsf{K}},2\gamma)\big) \leqslant \sum_{T\in\mathcal{N}_\gamma^{\widetilde{\mathsf{K}}}} \mathbf{P}\big\{\mathsf{A}\in\mathcal{A}_j(m) : \|T\|_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{L}\to\widetilde{\mathsf{K}}} \leqslant 2\gamma\big\}$$

$$\leqslant \#\mathcal{N}_\gamma^{\widetilde{\mathsf{K}}} \cdot \Big(2^n\alpha^n\frac{\nu_n}{\nu_m\nu_k}\Big)^j \leqslant 6^{n^2}C^{nm}\cdot\Big(2^n\alpha^n\frac{\nu_n}{\nu_m\nu_k}\Big)^j. \qquad \square$$

Лемма 10 (Бараньи и Фюреди [16], Глускин [5]). *Пусть многогранник* $\mathsf{M}\subset\mathsf{B}_m^2$ *имеет* j *вершин. Тогда*

$$\big(\Delta(\mathsf{M})\big)^{1/m} \leqslant c\min\Big\{1,\sqrt{\frac{1+\ln(j/m)}{m}}\Big\}.$$

для некоторой абсолютной константы $c>0$.

Следствие. *Если* $\mathsf{A}\in\mathcal{A}_n(m)$ *и* $m=(1-\delta)n$ *при* $\delta>0$, *то*

$$\Delta(\mathsf{A})^{1/m} \asymp \sqrt{\frac{1-\ln(1-\delta)}{m}} \quad \text{и} \quad \Delta(\mathsf{A})^{1/n}\asymp n^{\frac{\delta-1}{2}}. \tag{9}$$

Доказательство теоремы 1. Для тела K возьмем соответствующее ему тело $\widetilde{\mathsf{K}}$ из леммы 6. Тогда при любом M

$$\begin{aligned} \mathrm{vr}(\mathsf{K},\mathsf{L}\oplus\mathsf{M}) &\geqslant \frac{\mathrm{vr}(\widetilde{\mathsf{K}},\mathsf{L}\oplus\mathsf{M})}{\mathrm{vr}(\widetilde{\mathsf{K}},\mathsf{K})} \succ \mathrm{vr}(\widetilde{\mathsf{K}},\mathsf{L}\oplus\mathsf{M}) \\ &= \inf\{\|T\|_{\mathsf{L}\oplus\mathsf{M}\to\widetilde{\mathsf{K}}} : T\in SL(n)\}\Big(\frac{\mathrm{vol}\,\widetilde{\mathsf{K}}}{\mathrm{vol}\,\mathsf{L}\oplus\mathsf{M}}\Big)^{1/n} \\ &\geqslant \frac{1}{2}\inf\{\|T\|_{\mathsf{L}\oplus\mathsf{M}\to\widetilde{\mathsf{K}}} : T\in SL(n)\}\Big(\frac{\mathrm{vol}\,\widetilde{\mathsf{K}}}{\mathrm{vol}\,\mathsf{L}\,\mathrm{vol}\,\mathsf{M}}\Big)^{1/n}. \end{aligned} \tag{10}$$

Положим $j=n$ и $\alpha=\frac{1}{4C}(\nu_m\nu_k/\nu_n)^{1/n}$. Тогда $\mathbf{P}\big(\mathcal{V}(\widetilde{\mathsf{K}},\gamma)\big)\leqslant 2^{-n^2}$ и, значит, найдется такой многогранник $\mathsf{M}\in\mathcal{A}_n(m)$, для которого

$$\|T\|_{\mathsf{L}\oplus\mathsf{M}\to\widetilde{\mathsf{K}}} \geqslant \frac{1}{4C}\Big(\frac{\nu_m\nu_k}{\nu_n}\Big)^{1/n}\bigg(\frac{\Delta(L)}{\Delta(\widetilde{\mathsf{K}})}\bigg)^{1/n} = \frac{1}{4C}\bigg(\frac{\nu_m\,\mathrm{vol}\,L}{\mathrm{vol}\,\widetilde{\mathsf{K}}}\bigg)^{1/n}.$$

при всех $T\in SL(n)$. Тогда по неравенству (10)

$$\begin{aligned} \mathrm{vr}(\mathsf{K},\mathsf{L}\oplus\mathsf{M}) &\geqslant \frac{1}{2}\inf\big\{\|T\|_{\mathsf{L}\oplus\mathsf{M}\to\widetilde{\mathsf{K}}} : T\in SL(n)\big\}\Big(\frac{\mathrm{vol}\,\widetilde{\mathsf{K}}}{\mathrm{vol}\,\mathsf{L}\,\mathrm{vol}\,\mathsf{M}}\Big)^{1/n} \\ &\geqslant \frac{1}{8C}\Big(\frac{\nu_m\,\mathrm{vol}\,\mathsf{L}}{\mathrm{vol}\,\widetilde{\mathsf{K}}}\Big)^{1/n}\Big(\frac{\mathrm{vol}\,\widetilde{\mathsf{K}}}{\mathrm{vol}\,\mathsf{L}\,\mathrm{vol}\,\mathsf{M}}\Big)^{1/n} = \frac{1}{8C}\Big(\frac{\nu_m}{\mathrm{vol}\,\mathsf{M}}\Big)^{1/n} \succ n^{\frac{1-\delta}{2}}. \end{aligned}$$

Второе неравенство в (3) следует из оценки $\mathrm{vr}(\mathsf{L}\oplus\mathsf{M},\mathsf{K})\asymp\mathrm{vr}(\mathsf{K}^\circ,\mathsf{L}^\circ\oplus\mathsf{M}^\circ)$, вытекающей из неравенств Сантало и Бургейна–Мильмана (подробнее см., [12, теорема 2]). $\square$

§4. Доказательство теоремы 2

Лемма 11. *Если* $a, b > 0$, $0 < \delta < 1$, *то* $\min_{\lambda>0}(\lambda a + b)\lambda^{-\delta} \leqslant 2a^\delta b^{1-\delta}$.

Лемма 12. *Для любого симметричного выпуклого тела* $\mathsf{K} \subset \mathbb{R}^k$ *существует такое тело* $\widetilde{\mathsf{K}}$, *что* $\mathrm{vr}(\widetilde{\mathsf{K}}, \mathsf{K}) \leqslant C$ *и для любого* $\mathsf{A} \in \mathcal{A}_j(m)$, *где* $m = n - k$,

$$\big(\ell(\mathsf{A} \oplus \widetilde{\mathsf{K}}) + \|Id\|_{\mathsf{B}_n^2 \to \mathsf{A} \oplus \widetilde{\mathsf{K}}}\sqrt{n}\big)(\mathrm{vol}(\mathsf{A} \oplus \widetilde{\mathsf{K}}))^{1/n} \leqslant C,$$

где $C > 0$ *— абсолютная константа.*

Доказательство. Пусть $\delta = k/n$. Возьмем соответствующее телу K тело $\widetilde{\mathsf{K}}$ из леммы 6. Непосредственным вычислением легко проверить, что

$$\begin{gathered}\ell(\mathsf{B}_m^1 \oplus \widetilde{\mathsf{K}}) \asymp \ell(\widetilde{\mathsf{K}}) + m,\\ (\mathrm{vol}(\mathsf{A} \oplus \widetilde{\mathsf{K}}))^{1/n} \asymp (\mathrm{vol}\,\mathsf{A}\,\mathrm{vol}(\widetilde{\mathsf{K}}))^{1/n} \asymp \frac{(\mathrm{vol}\,\widetilde{\mathsf{K}})^{\delta/k}}{n^{1-\delta}} \quad \text{и}\\ \|Id\|_{\mathsf{B}_n^2 \to \mathsf{B}_m^1 \oplus \widetilde{\mathsf{K}}} \asymp \max\big\{\sqrt{m}, \|Id\|_{\mathsf{B}_k^2 \to \widetilde{\mathsf{K}}}\big\} \leqslant \sqrt{m} + \|Id\|_{\mathsf{B}_k^2 \to \widetilde{\mathsf{K}}}.\end{gathered}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}&\big(\ell(\mathsf{A} \oplus \lambda\widetilde{\mathsf{K}}) + \|Id\|_{\mathsf{B}_n^2 \to \mathsf{A} \oplus \lambda\widetilde{\mathsf{K}}}\sqrt{n}\big)(\mathrm{vol}(\mathsf{A} \oplus \lambda\widetilde{\mathsf{K}}))^{1/n}\\ &\qquad \leqslant \big(\ell(\mathsf{B}_m^1 \oplus \lambda\widetilde{\mathsf{K}}) + \|Id\|_{\mathsf{B}_n^2 \to \mathsf{B}_m^1 \oplus \lambda\widetilde{\mathsf{K}}}\sqrt{n}\big)(\mathrm{vol}(\mathsf{A} \oplus \lambda\widetilde{\mathsf{K}}))^{1/n}\\ &\qquad \prec \left(\left(\frac{\ell(\widetilde{\mathsf{K}})}{\lambda} + m\right) + \left(\frac{\|Id\|_{\mathsf{B}_k^2 \to \widetilde{\mathsf{K}}}}{\lambda} + \sqrt{m}\right)\sqrt{n}\right)\frac{(\mathrm{vol}\,\widetilde{\mathsf{K}})^{\delta/k}\lambda^\delta}{n^{1-\delta}}.\end{aligned}$$

Минимизируем это выражение по $\lambda > 0$ и по лемме 11 получим, что для λ, реализующего минимум

$$\begin{aligned}&\big(\ell(A \oplus \lambda\widetilde{\mathsf{K}}) + \|Id\|_{\mathsf{B}_n^2 \to \mathsf{A} \oplus \lambda\widetilde{\mathsf{K}}}\sqrt{n}\big)(\mathrm{vol}(\mathsf{A} \oplus \lambda\widetilde{\mathsf{K}}))^{1/n}\\ &\qquad \prec \Big(\big(\ell(\widetilde{\mathsf{K}}) + \|Id\|_{\mathsf{B}_k^2 \to \widetilde{\mathsf{K}}}\sqrt{n}\big)(\mathrm{vol}\,\widetilde{\mathsf{K}})^{1/k}\Big)^\delta \big(m + \sqrt{m}\sqrt{n}\big)^{1-\delta} n^{-1+\delta}\\ &\qquad \leqslant C^\delta\big(m + \sqrt{m}\sqrt{n}\big)^{1-\delta} n^{-1+\delta} \leqslant C^\delta 2^{1-\delta} \leqslant C. \qquad \square\end{aligned}$$

Следствие. *Для такого тела* $\widetilde{\mathsf{K}}$ *имеет место оценка* $\#\mathcal{N}_\gamma^{\mathsf{A} \oplus \widetilde{\mathsf{K}}} \leqslant C^{nm} 6^{n^2}$, *где* $C > 0$ *— универсальная константа.*

Лемма 13. *Пусть* $0 \leqslant \delta, \delta' \leqslant 1$, $k \leqslant \delta n$, $k' \leqslant \delta' n$, $\dim \mathsf{K} = k$, $\dim \mathsf{L} = k'$. *Пусть* $\widetilde{\mathsf{K}}$ *и* $\widetilde{\mathsf{L}}$ *тела из леммы* 12, *соответствующие телам* K *и* L. *Тогда существует такая пара тел* $\mathsf{A} \in \mathcal{A}_n(n - k)$ *и* $\mathsf{B} \in \mathcal{A}_n(n - k')$, *что*

$$\mathrm{vr}(\mathsf{A} \oplus \widetilde{\mathsf{K}}, \mathsf{B} \oplus \mathsf{L}) \succ n^{\frac{1-\delta'}{2}} \quad \text{и} \quad \mathrm{vr}(\mathsf{B} \oplus \widetilde{\mathsf{L}}, \mathsf{A} \oplus \mathsf{K}) \succ n^{\frac{1-\delta}{2}}.$$

Доказательство. Поскольку

$$\Delta(\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}})^{1/n}\asymp\Delta(\mathsf{A})^{1/n}\Delta(\widetilde{\mathsf{K}})^{1/n}\asymp\Delta(\mathsf{B}^1_{n-k})^{1/n}\Delta(\widetilde{\mathsf{K}})^{1/n},$$

найдется такая достаточно малая константа $c>0$, что

$$\gamma=c\alpha\Delta(\mathsf{B}^1_{n-k})^{-1/n}\Delta(\mathsf{L})^{1/n}\Delta(\widetilde{\mathsf{K}})^{-1/n}\leqslant\alpha\Delta(\mathsf{L})^{1/n}\Delta(\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}})^{-1/n}\quad\text{и}$$
$$\gamma'=c\alpha\Delta(\mathsf{B}^1_{n-k'})^{-1/n}\Delta(\mathsf{K})^{1/n}\Delta(\widetilde{\mathsf{L}})^{-1/n}\leqslant\alpha'\Delta(\mathsf{K})^{1/n}\Delta(\mathsf{B}\oplus\widetilde{\mathsf{L}})^{-1/n}$$

при любых $\mathsf{A}\in\mathcal{A}_n(n-k)$ и $\mathsf{B}\in\mathcal{A}_n(n-k')$. По лемме 9 справедливо включение $\mathcal{V}(\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}},\gamma)\subset\mathcal{V}'(\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}},2\gamma)$. Поэтому по лемме 8

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(\mathcal{V}(\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}},\gamma)\big)&\leqslant\mathbf{P}\big(\mathcal{V}'(\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}},2\gamma)\big)\\&\leqslant\sum_{T\in\mathcal{N}_\gamma^{\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}}}}\mathbf{P}\big\{\mathsf{B}\in\mathcal{A}_n(m):\|T\|_{\mathsf{B}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}}}\leqslant2\gamma\big\}\\&\leqslant\sum_{T\in\mathcal{N}_\gamma^{\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}}}}\mathbf{P}\big\{\mathsf{B}\in\mathcal{A}_n(m):\|T\|_{\mathsf{B}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}}}\leqslant2\alpha\Delta(\mathsf{L})^{1/n}\Delta(\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}})^{-1/n}\big\}\\&\leqslant\#\mathcal{N}_\gamma^{\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}}}\cdot4^{n^2}\alpha^{n^2}\leqslant6^{n^2}C^{n(n-k')}\cdot4^{n^2}\alpha^{n^2}\leqslant(24C\alpha)^{n^2}.\end{aligned}$$

Положим

$$\mathcal{W}(\beta)=\big\{(\mathsf{A},\mathsf{B})\in\mathcal{A}_n(n-k)\times\mathcal{A}_n(n-k'):\exists T\in SL(n),\ \|T\|_{\mathsf{B}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}}}\leqslant\beta\big\},$$
$$\mathcal{W}'(\beta')=\big\{(\mathsf{A},\mathsf{B})\in\mathcal{A}_n(n-k)\times\mathcal{A}_n(n-k'):\exists T\in SL(n),\ \|T\|_{\mathsf{A}\oplus\mathsf{K}\to\mathsf{B}\oplus\widetilde{\mathsf{L}}}\leqslant\beta'\big\}.$$

Тогда по принципу Кавальери $\mathbf{P}\big(\mathcal{W}(\gamma)\big)\leqslant(24C\alpha)^{n^2}\leqslant2^{-n^2}$ при $\alpha=\frac{1}{48C}$. Аналогично $\mathbf{P}\big(\mathcal{W}'(\gamma')\big)\leqslant2^{-n^2}$. Поэтому существует такая пара симметричных выпуклых многогранников $(\mathsf{A},\mathsf{B})\in\mathcal{A}_n(n-k)$ и $(\mathsf{A},\mathsf{B})\in\mathcal{A}_n(n-k')$, для которых $\mathsf{A}\notin\mathcal{W}'(\gamma')$ и $\mathsf{B}\notin\mathcal{W}(\gamma)$. Следовательно,

$$\|T\|_{\mathsf{B}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}}}\geqslant\frac{c}{48C}\left(\frac{\Delta(\mathsf{L})}{\Delta(\mathsf{B}^1_{n-k})\Delta(\widetilde{\mathsf{K}})}\right)^{1/n}=\frac{c}{48C}\left(\frac{\nu_k\nu_{n-k}\operatorname{vol}\mathsf{L}}{\nu_{k'}\operatorname{vol}\mathsf{B}^1_{n-k}\operatorname{vol}\widetilde{\mathsf{K}}}\right)^{1/n}.$$

при всех $T\in SL(n)$. Тогда по лемме 4

$$\begin{aligned}\operatorname{vr}(\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}},\mathsf{B}\oplus\mathsf{L})&=\inf\big\{\|T\|_{\mathsf{B}\oplus\mathsf{L}\to\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}}}:T\in SL(n)\big\}\Big(\frac{\operatorname{vol}(\mathsf{A}\oplus\widetilde{\mathsf{K}})}{\operatorname{vol}(\mathsf{B}\oplus\mathsf{L})}\Big)^{1/n}\\&\succ\Big(\frac{\nu_k\nu_{n-k}\operatorname{vol}\mathsf{L}}{\nu_{k'}\operatorname{vol}\mathsf{B}^1_{n-k}\operatorname{vol}\widetilde{\mathsf{K}}}\Big)^{1/n}\Big(\frac{\operatorname{vol}\mathsf{A}\operatorname{vol}\widetilde{\mathsf{K}}}{\operatorname{vol}\mathsf{B}\operatorname{vol}\mathsf{L}}\Big)^{1/n}\asymp\Big(\frac{\nu_n}{\nu_{k'}\operatorname{vol}\mathsf{B}^1_{n-k'}}\Big)^{1/n}\\&\asymp\frac{n^{-1/2}}{(k')^{-\delta'/2}(n-k')^{\delta'-1}}\succ n^{\frac{1-\delta'}{2}}.\end{aligned}$$

Аналогично $\operatorname{vr}(\mathsf{B}\oplus\widetilde{\mathsf{L}},\mathsf{A}\oplus\mathsf{K})\succ n^{\frac{1-\delta}{2}}$. □

Доказательство теоремы 2. По лемме 12 для тел K и L подберем такие симметричные выпуклые тела $\widetilde{\mathsf{K}} \subset \mathbb{R}^k$ и $\widetilde{\mathsf{L}} \subset \mathbb{R}^{k'}$. Тогда $\operatorname{vr}(\widetilde{\mathsf{K}}, \mathsf{K}) \leqslant C$ и $\operatorname{vr}(\widetilde{\mathsf{L}}, \mathsf{L}) \leqslant C$. По логарифмической выпуклости $\operatorname{vr}(\mathsf{A} \oplus \widetilde{\mathsf{K}}, \mathsf{A} \oplus \mathsf{K}) \leqslant 2C$ и $\operatorname{vr}(\mathsf{B} \oplus \widetilde{\mathsf{L}}, \mathsf{B} \oplus \mathsf{L}) \leqslant 2C$. Значит, по лемме 13 имеют место неравенства

$$\operatorname{vr}(\mathsf{A} \oplus \mathsf{K}, \mathsf{B} \oplus \mathsf{L}) \asymp \operatorname{vr}(\mathsf{A} \oplus \widetilde{\mathsf{K}}, \mathsf{B} \oplus \mathsf{L}) \succ n^{\frac{1-\delta'}{2}} \quad \text{и}$$
$$\operatorname{vr}(\mathsf{B} \oplus \mathsf{L}, \mathsf{A} \oplus \mathsf{K}) \asymp \operatorname{vr}(\mathsf{B} \oplus \widetilde{\mathsf{L}}, \mathsf{A} \oplus \mathsf{K}) \succ n^{\frac{1-\delta}{2}}.$$

Следовательно,

$$\partial(\mathsf{A} \oplus \mathsf{K}, \mathsf{B} \oplus \mathsf{L}) \asymp \operatorname{vr}(\mathsf{A} \oplus \widetilde{\mathsf{K}}, \mathsf{B} \oplus \mathsf{L}) \operatorname{vr}(\mathsf{B} \oplus \widetilde{\mathsf{L}}, \mathsf{A} \oplus \mathsf{K}) \succ n^{1-\frac{\delta+\delta'}{2}}. \qquad \square$$

§5. Индекс вершин

Понятие индекса вершин было введено в 2007 году Бездеком и Литваком [17] в качестве количественной характеристики, связанной с задачей освещенности. Для компактного выпуклого симметричного тела $\mathsf{K} \subset \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{vein} \mathsf{K} = \inf \Big\{ \sum \|p_i\|_{\mathsf{K}} : \mathsf{K} \subset \operatorname{conv}\{p_i\} \Big\},$$

Аналогично можно определить индекс вершин и для произвольного компактного выпуклого тела, содержащего начало координат. В этом случае $\|x\|_{\mathsf{K}} = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda \mathsf{K}\}$.

Помимо статьи [17] изучению индекса вершин посвящены две работы Глускина и Литвака [24,25], работа Бразитикоса, Часаписа и Хиони [19], а также короткий обзор в книге Бездека [18, §3.8]. В частности, для индекса вершин справедливо неравенство

$$\frac{n^{3/2}}{\sqrt{2\pi e}\operatorname{vr}(\mathsf{B}_n^2, \mathsf{K})} \leqslant \operatorname{vein} \mathsf{K} \leqslant 24 n^{3/2} \tag{11}$$

(нижняя оценка из работы [17], верхняя из работы [25]). В [25] также объясняется, что нижняя оценка может быть очень грубой. А именно доказывается существование такого симметричного выпуклого тела K (многогранника Глускина), что

$$\operatorname{vr}(\mathsf{B}_n^2, \mathsf{K}) \geqslant c\sqrt{\frac{n}{\ln(2n)}} \quad \text{и} \quad \operatorname{vein} \mathsf{K} \geqslant c n^{3/2}.$$

Таким образом, отношение правой и левой части может быть больше, чем $c\sqrt{n}/\sqrt{\ln(2n)}$.

Ниже будет показано, что для тела $\mathsf{K} = \mathsf{B}_{n-k}^1 \oplus \mathsf{B}_k^2$ при $k = \frac{n}{\ln n}$ это отношение будет не меньше, чем $c\sqrt{n}/\sqrt{(\ln(2n))^3}$, а также модифицирован пример Глускина и Литвака и получено отношение $c\sqrt{n}/\sqrt{(\ln\ln(2n))^3}$.

В силу неравенства

$$\mathrm{vr}(\mathsf{B}_n^2, \mathsf{B}_n^1) \leqslant \mathrm{vr}(\mathsf{K}, \mathsf{B}_n^1)\, \mathrm{vr}(\mathsf{B}_n^2, \mathsf{K}) \leqslant \sqrt{e}\, \mathrm{vr}(\mathsf{B}_n^2, \mathsf{B}_n^1) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{n},$$

полученного разными способами в работах [9,13,15,23,27,33] (данная формулировка из работы [13]) левое неравенство (11) с ухудшением константы не более чем в $\sqrt{e}$ раз можно переписать в более удобном виде

$$\frac{n}{\pi}\, \mathrm{vr}(\mathsf{K}, \mathsf{B}_n^1) \leqslant \mathrm{vein}\, \mathsf{K}. \tag{12}$$

Лемма 14. *Пусть* $\mathsf{K} \subset \mathbb{R}^n$ *— выпуклое тело и* E *— подпространство* $\mathbb{R}^n$. *Тогда* $\mathrm{vein}\, \mathsf{K} \geqslant \mathrm{vein}(\mathrm{Pr}_E\, \mathsf{K})$.

Доказательство. Пусть $\mathsf{K} \subset \mathrm{conv}\{p_i + q_i\}$, где $p_i \in E$ и $q_i \in E^\perp$. Спроецируем это включение на E, получим $\mathrm{Pr}_E\, \mathsf{K} \subset \mathrm{conv}\{p_i\}$. Поскольку

$$\|p_i\|_{\mathrm{Pr}_E \mathsf{K}} = \min_{q \in E^\perp} \|p_i + q\|_{\mathsf{K}} \leqslant \|p_i + q_i\|_{\mathsf{K}},$$

имеем неравенство

$$\sum \|p_i + q_i\|_{\mathsf{K}} \geqslant \sum \|p_i\|_{\mathrm{Pr}_E \mathsf{K}}.$$

Следовательно, $\mathrm{vein}(\mathrm{Pr}_E\, \mathsf{K}) \leqslant \mathrm{vein}\, \mathsf{K}$. □

Следствие. *Пусть* $\mathsf{K} \subset \mathbb{R}^k$ *и* $\mathsf{L} \subset \mathbb{R}^m$ *— выпуклые тела. Тогда*

$$\max\{\mathrm{vein}\, \mathsf{K}, \mathrm{vein}\, \mathsf{L}\} \leqslant \mathrm{vein}(\mathsf{K} \oplus \mathsf{L}) \leqslant \mathrm{vein}\, \mathsf{K} + \mathrm{vein}\, \mathsf{L}.$$

Таким образом при $\mathsf{M} = \mathsf{K} \oplus \mathsf{L}$ *и* $E = \mathbb{R}^k$

$$\frac{\mathrm{vein}\, \mathrm{Pr}_E\, \mathsf{M} + \mathrm{vein}\, \mathrm{Pr}_{E^\perp} \mathsf{M}}{2} \leqslant \mathrm{vein}\, \mathsf{M} \leqslant \mathrm{vein}\, \mathrm{Pr}_E\, \mathsf{M} + \mathrm{vein}\, \mathrm{Pr}_{E^\perp} \mathsf{M}. \tag{13}$$

Доказательство. Если $\mathsf{K} \subset \mathrm{conv}\{p_i : i = 1, \ldots, \ell\}$ и $\mathsf{L} \subset \mathrm{conv}\{q_j : j = 1, \ldots, n\}$, то $\mathsf{K} \oplus L \subset \mathrm{conv}\{(p_i, 0) : i = 1, \ldots, \ell\} \cup \{(0, q_j), j = 1, \ldots, n\}$. Кроме того

$$\sum \|(p_i, 0)\|_{\mathsf{K}\oplus\mathsf{L}} + \sum \|(0, q_j)\|_{\mathsf{K}\oplus\mathsf{L}} = \sum \|p_i\|_{\mathsf{K}} + \sum \|q_i\|_{\mathsf{L}},$$

откуда следует оценка $\mathrm{vein}(\mathsf{K} \oplus \mathsf{L}) \leqslant \mathrm{vein}\, \mathsf{K} + \mathrm{vein}\, \mathsf{L}$. □

Замечание. Левое неравенство (13) даже в случае $m = k$ для произвольного выпуклого тела M неверно. Например, если

$$\mathsf{M} = 2\mathsf{B}_n^1 \oplus_1 \tfrac{1}{\sqrt{n}} \mathsf{B}_n^2 \quad \text{и} \quad E = \mathrm{Lin}\{e_1 + e_{n+1}, e_2 + e_{n+2}, \ldots, e_n + e_{2n}\},$$

где e_1, e_2, …, e_{2n} — стандартный базис, то

$\mathrm{Pr}_E\, \mathsf{M} = \mathrm{conv}\{e_1 + e_{n+1}, \ldots, e_n + e_{2n}\}$ и $\mathrm{Pr}_{E^\perp} \mathsf{M} = \mathrm{conv}\{e_1 - e_{n+1}, \ldots, e_n - e_{2n}\}$,

поэтому $\mathrm{vein}\, \mathrm{Pr}_E\, \mathsf{M} = \mathrm{vein}\, \mathrm{Pr}_{E^\perp} \mathsf{M} = 2n$, но $\mathrm{vein}\, \mathsf{M} \geqslant \mathrm{vein}(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathsf{B}_n^2) \geqslant \frac{n^{3/2}}{\sqrt{3}}$ (последнее неравенство доказано в работе [25]).

Подобное утверждение для сечений также не может иметь места в силу теоремы Кашина (см. [8, 39] или [34, следствие 6.3]).

Перейдем к построению примеров, показывающих неточность в нижней оценке (11) и (12).

Пример 1. Пусть $k = \frac{n}{\ln n}$ и $\mathsf{L} \subset \mathbb{R}^k$ — произвольное симметричное тело, для которого $\operatorname{vein} \mathsf{L} \geqslant ck^{3/2}$, например, B_k^2 или B_k^∞. Положим $\mathsf{K} = \mathsf{B}_{n-k}^1 \oplus \mathsf{L}$. В силу логарифмической выпуклости (4) и теоремы Джона [29, 34]

$$\operatorname{vr}(\mathsf{B}_{n-k}^1 \oplus \mathsf{L}, \mathsf{B}_n^1) \leqslant \operatorname{vr}(\mathsf{L}, \mathsf{B}_k^1)^{\frac{k}{n}} \leqslant d(\mathsf{L}, \mathsf{B}_k^1)^{\frac{k}{n}} \leqslant n^{\frac{1}{\ln n}} = e.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{vein}(\mathsf{B}_{n-k}^1 \oplus \mathsf{B}_k^2) \geqslant \operatorname{vein} \mathsf{B}_k^2 \geqslant \frac{k^{3/2}}{\sqrt{2\pi e}} = \frac{n^{3/2}}{(\ln n)^{3/2}\sqrt{2\pi e}}.$$

Таким образом, мы предъявили явный пример, в котором левая и правая части неравенства (12) отличаются в $c\sqrt{n}/(\ln n)^{3/2}$ раз.

Пример 2. Пусть симметричное тело $\mathsf{K} \subset \mathbb{R}^k$ удовлетворяет неравенствам

$$\operatorname{vr}(\mathsf{B}_n^2, \mathsf{K}) \geqslant c\sqrt{\frac{k}{\ln(2k)}} \quad \text{и} \quad \operatorname{vein} \mathsf{K} \geqslant ck^{3/2}.$$

(существование такого тела доказано в работе [25]). Тогда $\operatorname{vr}(\mathsf{K}, \mathsf{B}_k^1) \leqslant c\sqrt{\ln(2k)}$. Положим $k = \frac{n}{\ln \ln n}$ и $\mathsf{L} = \mathsf{K} \oplus \mathsf{B}_{n-k}^1$. Тогда

$$\operatorname{vr}(\mathsf{L}, \mathsf{B}_n^1) \leqslant \operatorname{vr}(\mathsf{K}, \mathsf{B}_k^1)^{\frac{k}{n}} \leqslant (c \ln n)^{\frac{1}{\ln \ln n}} \leqslant ce.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{vein} \mathsf{L} = \operatorname{vein}(\mathsf{K} \oplus \mathsf{B}_{n-k}^1) \geqslant \operatorname{vein} \mathsf{K} \geqslant ck^{3/2} = c\frac{n^{3/2}}{(\ln \ln n)^{3/2}}.$$

Таким образом, отношение левой и правой части неравенства (12) может быть больше, чем $c\sqrt{n}/(\ln \ln n)^{3/2}$, что улучшает пример Глускина и Литвака.

Список литературы

[1] Бахарев Ф. Л., *Экстремально далекие нормированные пространства с дополнительными ограничениями*, Мат. заметки **79** (2006), №3, 339–352.

[2] Бахарев Ф. Л., *Оценки максимальных расстояний между пространствами, нормы которых инвариантны относительно заданных групп операторов*, Зап. науч. семин. ПОМИ **333** (2006), 33–42.

[3] Бахарев Ф. Л., *Обобщение некоторых классических результатов на случай модифицированного расстояния Банаха–Мазура*, Зап. науч. семин. ПОМИ **333** (2006), 17–32.

[4] Глускин Е. Д., *Диаметр компакта Минковского примерно равен n*, Функц. анал. и его прил. **15** (1981), №1, 72–73.

[5] Глускин Е. Д., *Экстремальные свойства ортогональных параллелепипедов и их приложения к геометрии банаховых пространств*, Мат. сб. **136** (1988), №1, 85–96.

[6] Грюнбаум Б., *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел*, Наука, М., 1971.

[7] Гурарий В. И., Кадец М. И., Мацаев В. И., *О расстояниях между конечномерными аналогами пространств L^p*, Мат. сб. **170** (1966), №4, 481–489

[8] Кашин Б. С., *Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций*, Изв. Акад. Наук СССР **41** (1977), №2, 334–351.

[9] Кашин Б. С., *О параллелепипедах наименьшего объёма, содержащих выпуклое тело*, Мат. заметки **45** (1989), №2, 134–135.

[10] Храбров А. И., *Оценки расстояний между суммами пространств ℓ_n^p*, Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. **2000**, вып. 3, 56–62.

[11] Храбров А. И., *Экстремальные объёмные отношения для сумм нормированных пространств*, Пробл. мат. анал. **21** (2000), 264–275.

[12] Храбров А. И., *Обобщенные объёмные отношения и расстояние Банаха–Мазура*, Мат. заметки **70** (2001), №6, 918–926.

[13] Храбров А. И., *Расстояния между пространствами с безусловными базисами*, Пробл. мат. анал. **23** (2001), 206–220.

[14] Artstein-Avidan S., Giannopoulos A., Milman V., *Asymptotic geometric analysis.* Part I, Math. Surveys Monogr., vol. 202, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[15] Ball K., *Volumes of sections of cubes and related problems*, Geometric aspects of functional analysis (1987–88), Lecture Notes in Math., vol. 1376, Springer, Berlin, 1989, pp. 251–260.

[16] Bárány I., Füredi Z., *Approximation of the sphere by polytopes having few vertices*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), no. 3, 651–659.

[17] Bezdek K., Litvak A. E., *On the vertex index of convex bodies*, Adv. Math. **215** (2007), no. 2, 626–641.

[18] Bezdek K., *Classical topics in discrete geometry*, CMS Books Math., Springer-Verlag, New York, 2010.

[19] Brazitikos S., Chasapis G., Hioni L., *Random approximation and the vertex index of convex bodies*, Arch. Math. (Basel) **108** (2017), no. 2, 209–221.

[20] Chevet S., *Séries de variables aléatoires gaussiennes à valeurs dans $E\widehat{\otimes}_\varepsilon F$*, Application aux produits d'espaces de Wiener abstraits, Séminaire sur la Géométrie des Espaces de Banach (1977–1978), Exp. No. 19, École Polytech., Palaiseau, 1978.

[21] Galicer D., Merzbacher M., Pinasco D., *Asymptotic estimates for largest volume ratio of a convex body*, `arXiv:1901.00771v2`, 2019.

[22] Giannopoulos A., Hartzoulaki M., *On the volume ratio of two convex bodies*, Bull. London Math. Soc. **34** (2002), no. 6, 703–707.

[23] Geiss S., *Antisymmetric tensor products of absolutely p-summing operators*, J. Approx. Theory **68** (1992), no. 3, 223–246.

[24] Gluskin E. D., Litvak A. E., *Asymmetry of convex polytopes and vertex index of symmetric convex bodies*, Discrete Comput. Geom. **40** (2008), no. 4, 528–536.

[25] Gluskin E. D., Litvak A. E., *A remark on vertex index of the convex bodies*, Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math., vol. 2050, Springer, Heidelberg, 2012, pp. 255–265.

[26] Gordon Y., *Some inequalities for Gaussian processes and applications*, Israel J. Math. **50** (1985), no. 4, 265–289.

[27] Gordon Y., Meyer M., Pajor A., *Ratios of volumes and factorization through* ℓ_∞, Illinois J. Math. **40** (1996), no. 1, 91–107.

[28] Gordon Y., Litvak A. E., Meyer M., Pajor A., *John's decomposition in the general case and applications*, J. Differential Geom. **68**(2004), no. 1, 99–119.

[29] John F., *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Intersci. Publ. Inc., New York, NY, 1948, pp. 187–204.

[30] Klartag B., *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), no. 6, 1274–1290.

[31] Macbeath A. M., *A compactness theorem for affine equivalence-classes of convex regions*, Canad. J. Math. **3** (1951), no. 1, 54–61.

[32] Paouris G., *Concentration of mass on convex bodies*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), no. 5, 1021–1049.

[33] Pełczyński A., Szarek S. J., *On parallelepipeds of minimal volume containing a convex symmetric body in* $\mathbb{R}^n$, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **109** (1991), no. 1, 125–148.

[34] Pisier G., *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, Cambridge Tracts Math., vol. 94, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[35] Rogers C. A., Shephard C., *The difference body of a convex body*, Arch. Math. (Basel) **8** (1957), 220–233.

[36] Rogers C. A., Shephard C., *Convex bodies associated with a given convex body*, J. London Math. Soc. **33** (1958), 270–281.

[37] Rudelson M., *Estimates of the weak distance between finite-dimensional Banach spaces*, Israel J. Math. **89** (1995), no. 1–3, 189–204.

[38] Stein S., *The symmetry function in a convex body*, Pacific J. Math. **6** (1956), 145–148.

[39] Szarek S. J., *On Kashin's almost Euclidean orthogonal decomposition of* ℓ_1^n, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. **26** (1978), no. 8, 691–694.

[40] Tomczak-Jaegermann N., *Banach–Mazur distances and finite-dimensional operator ideals*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., vol. 38, Longman Sci. & Tech., Harlow, New York, 1989.

Высшая школа экономики
Санкт-Петербургская школа
физико-математических и компьютерных наук
194100, ул. Кантемировская, 3, корп. 1, лит. А,
Санкт-Петербург, Россия

Поступило 3 ноября 2019 г.

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет математики и компьютерных наук
199178, 14 линия В.О., дом 29Б, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: aikhrabrov@mail.ru