

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Интригатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.
2. *Levy H., Sarnat M.* Capital investment and financial decisions. Englewood Cliffs. N J: Prentice-Hall Int., 1986.
3. *van Hilten O., Kort P. M., van Loon P. J. J. M.* Dynamic policies of the firm. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.
4. *Мордухович Б. Ш.* Существование оптимальных управлений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ. 1976. Т. 6.
5. *Понтрягин Л. С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
6. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы оптимизации. Минск: Изд-во БГУ, 1981.
7. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 03.06.97

УДК 519.6.

© 1998 г. А. А. ЧЕНЦОВ

(Уральский государственный технический университет, Екатеринбург),

А. Г. ЧЕНЦОВ, чл.-корр. РАН

(Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург)

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ МАРШРУТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ¹

Рассматривается задача последовательного обхода системы подвижных множеств, имеющих смысл "областей достижимости" в пространстве параметров; последние отвечают решению конечного набора задач в условиях многовариантности переходов к решению очередной задачи. Установлены возможности устойчивой реализации экстремума и оценки, связывающие погрешность вычислений и возможный проигрыш качества. Проведено моделирование конкретных вариантов задачи последовательного обхода множеств в условиях меняющихся допусков на степень отклонения от кратчайших переходов при решении очередной задачи.

1. Краткое обсуждение задачи

Конструкции [1, 2] динамического программирования (ДП) для решения известной задачи коммивояжера (ЗК) получили свое развитие в виде процедуры ДП в задачах последовательного обхода конечной системы множеств (см. [3-5]), что может соответствовать решению задачи "облета архипелага", некоторым упрощенным постановкам задачи о размещении компонент радиоаппаратуры на печатных платах (см. [6]) и задачи авиапожарного патрулирования лесов. Следующим шагом в этом направлении явились версии ДП, ориентированные на оптимизацию пары "маршрут - трасса" при решении задачи обхода меняющихся (по мере развития процесса)

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научно-технического центра (проект № 008-94) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-01-00458).

множеств (см. по этому поводу [6 – 9]). Пример такой задачи можно получить, рассматривая процесс последовательной смены динамики управляемой системы, т.е. процесс своеобразных “перевоплощений” этой системы в очередности, устанавливаемой исследователем. Возможность изменения множеств, подлежащих последовательному обходу, имеет смысл допускать и по иным причинам (см., в частности, постановку [6]). Так, в задаче обхода системы неподвижных множеств в пространстве параметров реализация процедуры ДП [3 – 5] требует больших вычислительных затрат и большого времени счета. Последнее может оказаться неприемлемым для постановок, требующих решения “в темпе реального времени”. Один из вариантов ускорения процедуры ДП может быть, в частности, связан с просмотром в процессе ее реализации не всего очередного целевого множества, а лишь некоторой его части; последняя может подбираться из компромиссных соображений. Эта идея реализуется в статье в достаточно общей форме и иллюстрируется затем на вышеупомянутой весьма конкретной задаче последовательного обхода конечной системы неподвижных целевых множеств в конечномерном пространстве (см. раздел 4). Для этой конкретной задачи рассмотрен модельный пример, иллюстрирующий процесс формирования эвристик на основе динамической аппроксимации текущей метрической проекции узлов “трассы” на целевые множества, занумерованные в соответствии с избранным маршрутом. В связи с перспективой развития численных методов в статье много внимания (на уровне общей постановки) уделено проблеме реализации метода ДП в условиях неточных вычислений функции Беллмана, включая построение оценок погрешностей и исследование их влияния на реализуемые “трассы” в смысле отклонения значений критерия от экстремума.

2. Динамическое программирование в задаче маршрутизации: общие сведения

Фиксируем непустое множество X произвольной природы; будем рассматривать “движения” (трассы) в X , полагая время дискретным. Фиксируем далее число $N \in \mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ (через \triangleq обозначаем, здесь и ниже, равенство по определению), $2 \leq N$. Обозначаем через 2^X семейство всех непустых подмножеств множества X . Даны операторы

$$(2.1) \quad A_1 : X \longrightarrow 2^X, \dots, A_N : X \longrightarrow 2^X$$

(по традиции такие отображения именуют многозначными отображениями в X). Если $x \in X$ и $i \in \overline{1, N}$, то множество $A_i(x)$, $A_i(x) \subset X$, интерпретируется, как “область достижимости” (термин заимствован из теории управления: см. [10 – 12]) из состояния x при решении задачи с номером i . В этой связи “набор” (2.1) можно рассматривать как некоторый способ описания “динамики” управляемой системы с дискретным временем; именно, нас интересуют следующие системы перемещений в X :

$$(2.2) \quad (x_0 \in X) \longrightarrow (x_1 \in A_{i_1}(x_0)) \longrightarrow (x_2 \in A_{i_2}(x_1)) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow (x_N \in A_{i_N}(x_{N-1}));$$

здесь $x_0 \in X$ – “база” (начальное состояние), $\mathcal{I} \triangleq (i_1, \dots, i_N)$ – перестановка элементов $\overline{1, N}$ (маршрут), (x_0, x_1, \dots, x_N) – “движение” (трасса), по маршруту \mathcal{I} . Мы вправе выбрать маршрут и трассу как угодно, что приводит к дискретно-непрерывной экстремальной задаче, не допускающей, вообще говоря, декомпозиции в комбинаторную и “непрерывную” часть без потери качества. Введем кортеж $c \triangleq (c_1, \dots, c_N)$ функционалов

$$(2.3) \quad c_1 : X \times X \longrightarrow [0, \infty[, \dots, c_N : X \times X \longrightarrow [0, \infty[.$$

Если в (2.2) фиксировать звено (x_{j-1}, x_j) , где $j \in \overline{1, N}$, то, в терминах (2.3), оценка соответствующих потерь будет определяться числом $c_{ij}(x_{j-1}, x_j)$; общие потери получаем суммированием по всем звеньям системы (2.2). Мы формализуем рассматриваемую задачу, привлекая, подобно [8], конструкции, естественные для задач управления с дискретным временем. В частности, упомянутые потери будем сопоставлять “движениям”, выбираемым из множеств, определяемых каждое соответствующим маршрутом. Последний соответствует дискретной “компоненте” экстремальной задачи, являющейся предметом рассмотрения. Для корректной постановки упомянутой задачи нам потребуются некоторые обозначения. Через \mathbb{N} условимся обозначать семейств всех непустых подмножеств множества $\overline{1, N}$. Если $K \in \mathbb{N}$, то через $|K|$ обозначаем количество элементов (мощность) множества K , в то время как $(bi)[K]$ есть def множество всех биекций “отрезка” $\overline{1, |K|}$ на K ; элементы $(bi)[K]$ – перестановки элементов из K и только они, $(bi)[K] \neq \emptyset$. Если $x_* \in X$, $K \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in (bi)[K]$, то через $Sol(x_*, K, \lambda)$ обозначаем множество всех кортежей

$$(2.4) \quad (x_i)_{i \in \overline{0, |K|}} : \overline{0, |K|} \longrightarrow X$$

таких, что $x_0 = x_*$ и, кроме того, имеет место

$$\forall i \in \overline{1, |K|} : x_i \in A_{\lambda(i)}(x_{i-1}).$$

Рассуждением, использующим индукцию по количеству элементов подмножества $\overline{1, N}$, легко проверяется, что $\forall x \in X \forall K \in \mathbb{N} \forall \lambda \in (bi)[K] : Sol(x, K, \lambda) \neq \emptyset$. В последнем соотношении мы имеем описание “динамики”, согласованной с выбранным маршрутом. Выбор движения (2.4), как и выбор маршрута λ , подчиняем интересам минимизации совокупных затрат, определяемых в терминах с (2.3). Если $x_* \in X$, $K \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in (bi)[K]$, то

$$\Pi(x_*, K, \lambda) \triangleq \inf \left(\left\{ \sum_{i=1}^{|K|} c_{\lambda(i)}(y_{i-1}, y_i) : (y_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in Sol(x_*, K, \lambda) \right\} \right) \in [0, \infty[;$$

эта величина оценивает качество маршрута λ в позиции (x_*, K) . В результате, при $x_* \in X$ и $K \in \mathbb{N}$ число

$$(2.5) \quad V(x_*, K) \triangleq \min_{\lambda \in (bi)[K]} \Pi(x_*, K, \lambda) \in [0, \infty[$$

определяет экстремум в задаче оптимизации затрат при осуществлении “путешествия”, соответствующего задачам с номерами из множества K и начальному состоянию x_* . Пусть $\forall x \in X : V(x, \emptyset) \triangleq 0$. Полагаем $\mathbb{N} \triangleq \mathbb{N} \cup \{\emptyset\}$ и $\mathbb{D} \triangleq X \times \mathbb{N}$ (множество всех позиций). Посредством задания величин $V(x, K)$, $x \in X$, $K \in \mathbb{N}$ определена функция Беллмана

$$V : \mathbb{D} \longrightarrow [0, \infty[.$$

Аргументы функции V – суть позиции, т.е. пары (x, K) , где $x \in X$, а K – подмножество $\overline{1, N}$. Значение этой функции в “точке” $(x^0, \overline{1, N})$, где $x^0 \in X$ играет роль начального состояния, представляет для нас наибольший интерес. В частности, сечение $V(\cdot, \overline{1, N})$ функции V может использоваться для оптимизации начального состояния при выборе $x^0 \in X^0$, где X^0 – заданная начальная область; следует решить задачу

$$V(x^0, \overline{1, N}) \longrightarrow \min, x^0 \in X^0.$$

Другая возможная версия задания $x^0 \in X^0$ определяется неравенством $V(x^0, \overline{1, N}) \leq d^0$, где $d^0 \in [0, \infty[$ – заданный “допуск” на значение суммарных потерь. Наконец, возможна постановка (мы ее в дальнейшем в основном и рассматриваем), когда $x^0 \in X$ задано. Напомним, что функция V удовлетворяет следующему уравнению [4 – 8]; именно, $\forall x \in X \forall K \in N$:

$$(2.6) \quad V(x, K) = \min_{k \in K} \inf_{y \in A_k(x)} [c_k(x, y) + V(y, K \setminus \{k\})].$$

Фактически мы имеем в виде (2.6) естественный вариант уравнения Беллмана, определяющий дискретно-непрерывную версию метода ДП. Посредством (2.6) можно, при заданном $x^0 \in X$, определить экстремум $V(x^0, \overline{1, N})$, отправляясь от тривиального “слоя” функции V , а именно – от $V(\cdot, \emptyset)$. Мы будем рассматривать возмущенные аналоги (2.6), стремясь прежде всего к установлению оценок, определяющих влияние практически неизбежных погрешностей вычислений. Отметим, что на практике последние могут быть, в частности, связаны с дискретизацией значений (2.1), т.е. с подменой “областей достижимости” конечными сетками. В связи с этим подробнее будет специально рассматриваться важный частный случай, соответствующий задаче последовательного обхода конечных множеств.

3. Построение функции Беллмана в условиях неточных вычислений

В настоящем разделе исследуется влияние погрешностей на процесс построения функции Беллмана. Мы рассматриваем случай общей постановки маршрутной задачи, рекомендуя читателю по ходу изложения интерпретировать наши построения для частного случая “метрической” задачи последовательного обхода множеств, рассматриваемой в конце раздела 4 (см. ниже (4.22) – (4.24)). В этой понятной задаче критерий определяется суммой пройденных расстояний, а значения операторов (1.1) реализуются из соображений построения метрических проекций на упомянутые множества с заданными допусками. Следуя естественной логике ДП, мы разбиваем пространство позиций \mathbb{D} на “слои” с номерами $0, 1, \dots, N$. При этом “слой” с номером 0 определяется в виде множества всех позиций (x, \emptyset) , $x \in X$. Если же $s \in \overline{1, N}$, то слой с номером s составляет множество всех позиций (x, K) , где $x \in X$, а K есть s -элементное подмножество $\overline{1, N}$. Введем следующее соглашение. Если $z \in \mathbb{D}$, так что $z = (x, K)$ для некоторых (единственным образом определяемых) $x \in X$ и $K \in N$, то через $pr_1(z)$ и $pr_2(z)$ условимся обозначать соответствующие компоненты z : $(pr_1(z) \triangleq x) \& (pr_2(z) \triangleq K)$. Полагаем $|\emptyset| \triangleq 0$, распространяя понятие $|K|$ на случай пустого множества $K \in N$. Пусть $\forall s \in \overline{0, N} : N_s \triangleq \{K \in N \mid |K| = s\}$. Имеем $N_0 = \{\emptyset\}$ и $N_N = \{\overline{1, N}\}$ (одноэлементные семейства). Тогда $\forall s \in \overline{0, N}$:

$$D_s \triangleq X \times N_s = \{z \in \mathbb{D} \mid pr_2(z) \in N_s\}.$$

Множества, или “слои”, D_0, D_1, \dots, D_N составляют в своей совокупности разбиение \mathbb{D} : 1) \mathbb{D} есть объединение всех множеств D_s , $s \in \overline{0, N}$; 2) $\forall i \in \overline{0, N} \forall j \in \overline{0, N} \setminus \{i\} : D_i \cap D_j = \emptyset$. Отметим, что $\forall s \in \overline{0, N} : D_s \neq \emptyset$.

Если $s \in \overline{0, N}$, то через F_s обозначаем множество всех неотрицательных функционалов на D_s . Построение полной функции Беллмана можно осуществлять по “слоям”. В этой связи полагаем $\forall s \in \overline{0, N} : V_s \triangleq (V|D_s)$; здесь и ниже используется традиционное понятие сужения или следа функции на произвольное подмножество ее области определения (см., например, [13, с. 13; 14, с. 26]). Итак, функцию V мы “заменяли” системой ее сужений V_s , $s \in \overline{0, N}$. Если $s \in \overline{1, N}$, то определяем оператор

$$(3.1) \quad T_s : F_{s-1} \longrightarrow F_s$$

посредством условия: при $h \in F_{s-1}$, $x \in X$ и $K \in N_s$ полагаем

$$(3.2) \quad T_s(h)(x, K) \triangleq \min_{k \in K} \inf_{y \in A_k(x)} [c_k(x, y) + h(y, K \setminus \{k\})];$$

тем самым определяются значения $T_s(h)(z) \in [0, \infty[$ при всех $z \in D_s$, а стало быть, и функция $T_s(h) \in F_s$ в целом. В терминах операторов (3.1) уравнение (2.6) получает следующее истолкование: V_0 есть функционал из F_0 , тождественно равный нулю;

$$(3.3) \quad \forall s \in \overline{1, N} : V_s = T_s(V_{s-1}).$$

В результате последовательного применения операторов T_1, T_2, \dots, T_N реализуется "переход" $V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow V_N$. Рассмотрим теперь приближенный аналог вышеупомянутого "перехода" от V_0 к V_N , используя следующее весьма очевидное свойство изометричности операторов (3.1), (3.2). Именно, $\forall s \in \overline{1, N} \forall u \in F_{s-1} \forall v \in F_{s-1} \forall \alpha \in]0, \infty[$:

$$(3.4) \quad (\forall z \in D_{s-1} : |u(z) - v(z)| \leq \alpha) \implies (\forall z \in D_s : \\ : |T_s(u)(z) - T_s(v)(z)| \leq \alpha).$$

Обоснование легко следует из хорошо известных свойств точных нижней и верхней граней числовых множеств (см. [15, с. 38]).

Рассмотрим теперь следующий сценарий приближенного построения (V_0, V_1, \dots, V_N) , фиксируя параметр точности $\epsilon \in]0, \infty[$. Именно, будем полагать, что при использовании (3.3) вместо $(V_s)_{s \in \overline{0, N}}$ по тем или иным причинам реализовался кортеж функционалов

$$(3.5) \quad (\tilde{V}_s)_{s \in \overline{0, N}} \in \prod_{s=0}^N F_s,$$

для которого: 1) $\tilde{V}_0 = V_0$; 2) $\forall s \in \overline{1, N} \forall z \in D_s$:

$$(3.6) \quad |\tilde{V}_s(z) - T_s(\tilde{V}_{s-1})(z)| \leq \epsilon.$$

В части 1) отметим, что данный очевидный "слой" функции Беллмана можно реализовать безошибочно, поскольку он определен явным (и простейшим) условием. В части 2) мы имеем погрешность вычислений, причем (см. (3.6)) по нашим предположениям относительно имеющегося, после фактического построения функции Беллмана в реальных условиях, кортежа (3.5) в виде ϵ , $\epsilon > 0$, выдерживается допуск на величину упомянутой погрешности. Справедливо следующее

Предложение 3.1. Кортеж (3.5) и "слои" истинной функции Беллмана связаны следующими оценками; именно, $\forall s \in \overline{0, N} \forall z \in D_s$:

$$(3.7) \quad |\tilde{V}_s(z) - V_s(z)| \leq s\epsilon.$$

Доказательство достаточно очевидно и в настоящем варианте опущено по соображениям объема.

Следствие. $\forall x \in X : |\tilde{V}_N(x, \overline{1, N}) - V(x, \overline{1, N})| \leq N\epsilon$.

4. Маршрутизация в условиях неточных вычислений функции Беллмана: квазиоптимальные решения

Характерной особенностью решения маршрутных задач на основе ДП [3 – 9] является пошаговое развитие (своеобразное “выращивание”) пары маршрут – трасса; это согласуется и с логикой [1, 2] в части решения ЗК. В этой связи введем модификацию определений раздела 2, полагая для $m \in \overline{0, N}$, что X_m – множество всех кортежей $(x_i)_{i \in \overline{0, m}} : \overline{0, m} \rightarrow X$. Пусть $\forall x_* \in X \forall K \in N$:

$$S(x_*, K) \triangleq \{(\lambda, (x_i)_{i \in \overline{0, |K|}}) \in (\text{bi})[K] \times \mathbb{X}_{|K|} \mid (x_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \text{Sol}(x_*, K, \lambda)\}.$$

Элементы $S(x_*, K)$ – суть всевозможные пары “маршрут – трасса”, которые можно использовать при решении маршрутной задачи, связанной с исполнением заданий, нумеруемых индексами из непустого множества K , $K \subset \overline{1, N}$, из начального состояния $x_* \in X$ (x_* – база задачи, характеризуемой множеством K); легко видеть, что $V(x_*, K)$ есть точная нижняя грань непустого множества

$$\left\{ \sum_{i=1}^{|K|} c_{\lambda(i)}(y_{i-1}, y_i) : (\lambda, (y_i)_{i \in \overline{0, |K|}}) \in S(x_*, K) \right\}.$$

Фиксируя $x^0 \in X$, мы интересуемся прежде всего выбором элементов $S(x^0, \overline{1, N})$, т.е. решений “полной” маршрутной задачи. Наглядный пример исследуемой ниже общей схемы можно получить, обращаясь к анализу конкретной задачи обхода конечной системы множеств в конечномерном арифметическом пространстве и оптимизируя при этом длину ломаной, получающейся в виде трассы. Текущие затраты при этом определяются “очередным” расстоянием и суммируются с экстремумом перспективных затрат, определяемых суммой расстояний (см. в этой связи (4.22) – (4.24)). Вместо упомянутого экстремума может использоваться его приближенное значение или даже эвристика. Мы формируем очередное перемещение, следовательно, исходя из идеи приближенной минимизации суммы текущих и перспективных затрат, что, на уровне принципа, соответствует (2.6) или его конкретизации (см. (4.27)). Вернемся к общему случаю построения решений абстрактной маршрутной задачи. При их построении на основе ДП мы полагаем, что (точно или приближенно) построена функция Беллмана. Следовательно, мы располагаем некоторой моделью $V : \mathbb{D} \rightarrow [0, \infty[$ упомянутой функции. Кроме того, мы задаемся обычно параметром точности $\kappa \in]0, \infty[$; пара (V, κ) определяет условия моделирования на основе ДП. Условимся о соглашении: по аналогии с $\overline{1, m}$, где $m \in \overline{1, N}$, вводим $\overline{1, 0} \triangleq \emptyset$. Полагаем теперь $\forall K \in N$:

$$(4.1) \quad (p - \text{SOL})[V; \kappa; K] \triangleq \{(\lambda, (x_i)_{i \in \overline{0, |K|}}) \in S(x^0, K) \mid \forall s \in \overline{1, |K|} : \\ c_{\lambda(s)}(x_{s-1}, x_s) + V(x_s, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, s}\}) < \\ < \min_{k \in \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, s-1}\}} \inf_{y \in A_k(x_{s-1})} [c_k(x_{s-1}, y) + \\ + V(y, (\overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, s-1}\}) \setminus \{k\})] + \kappa\}.$$

Элементы множества, которое здесь введено, есть решения (а точнее, пары вида маршрут – трасса), формируемые в модели на основе логики ДП; эти решения касаются маршрутизации при “обходе” задач с номерами из K , но из определения видно, что всякий раз при выборе номера очередной задачи и очередного звена трассы мы

учитываем в терминах \mathbb{V} все еще “не пройденные” задачи с номерами из $\overline{1, N}$. В этой связи для нас особое значение имеет случай $K = \overline{1, N}$; вышеупомянутые решения – элементы $(p - \text{SOL})[\mathbb{V}; \kappa; K]$ (4.1) при $K \neq \overline{1, N}$ мы рассматриваем, как “частичные” или предварительные. Итак, имеем

$$(4.2) \quad (\text{SOL})[\mathbb{V}; \kappa] \triangleq (p - \text{SOL})[\mathbb{V}; \kappa; \overline{1, N}] = \\ = \{(\lambda, (x_i)_{i \in \overline{0, |N|}}) \in \mathbb{S}(x^0, \overline{1, N}) \mid \forall s \in \overline{1, N} : c_{\lambda(s)}(x_{s-1}, x_s) + \\ + \mathbb{V}(x_s, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, s}\}) < \\ < \min_{k \in \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, s-1}\}} \inf_{y \in A_k(x_{s-1})} [c_k(x_{s-1}, y) + \\ + \mathbb{V}(y, (\overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, s-1}\}) \setminus \{k\})] + \kappa\}.$$

Посредством (4.2) мы определили естественный формализованный вариант решения полной маршрутной задачи в модели.

Отметим, что при $x \in X$ и $\tilde{K} \in \tilde{\mathbb{N}}$ всегда можно указать $q \in \tilde{K}$ и $\tilde{y} \in A_q(x)$ такие, что

$$(4.3) \quad c_q(x, \tilde{y}) + \mathbb{V}(\tilde{y}, \tilde{K} \setminus \{q\}) < \min_{k \in \tilde{K}} \inf_{y \in A_k(x)} [c_k(x, y) + \mathbb{V}(y, \tilde{K} \setminus \{k\})] + \kappa.$$

В силу (4.1) практически очевидно

Предложение 4.1. Множество $(\text{SOL})[\mathbb{V}; \kappa]$ непусто.

При обосновании по индукции устанавливается свойство

$$\forall h \in \overline{1, N} \exists K \in \mathbb{N}_h : (p - \text{SOL})[\mathbb{V}; \kappa; K] \neq \emptyset.$$

При $h = 1$ оно извлекается из (4.3); шаг индукции также обосновывается посредством (4.3). Окончательное утверждение получаем из (4.2).

В рассматриваемой схеме в качестве \mathbb{V} может использоваться произвольная неотрицательная функция позиции (условие неотрицательности здесь непринципиально, но логично в силу неотрицательности моделируемой функции Беллмана; если моделирующая функция знакопеременна, то в качестве \mathbb{V} можно взять ее “срезку” нулем, причем уклонение значений $\mathbb{V}(z)$ в результате такой “срезки” не возрастет по сравнению с уклонением исходной знакопеременной функции). Разумеется, возможен (и рассмотрен в [6, 8]) “идеальный” вариант, когда $\mathbb{V} = V$; получающаяся процедура маршрутизации на основе ДП доставляет экстремум $V(x^0, \overline{1, N})$ с любой наперед заданной точностью.

Возможно использование, в качестве \mathbb{V} , разного рода эвристик. Если $\mathbb{V}(z) \equiv 0$, то мы приходим к реализации идеи “кратчайших” переходов с огрублением, определяемым посредством κ ; в данной ситуации мы получаем аналог принципа “иди в ближайшую точку”. В качестве “более содержательной” эвристики \mathbb{V} можно указать следующую. Именно, сопоставим точке $x \in X$ и множеству $\tilde{K} \in \tilde{\mathbb{N}}$ в качестве $\mathbb{V}(x, \tilde{K})$ число

$$\min_{k \in \tilde{K}} \inf_{y \in A_k(x)} c_k(x, y);$$

кроме того, полагаем $\text{def} : \mathbb{V}(x, \emptyset) \equiv 0$. Определение (4.1) приводит в этом случае к абстрактному аналогу инфимальной реализации парной проекции (для метрических задач), когда предстоящие в позиции (x, \tilde{K}) затраты искусственно разлагаются на “текущие” (характеризуемые очередным номером $k \in \tilde{K}$) и “перспективные”; последние оцениваются (в случае, когда (2.3) – система расстояний) “удалением” от

кластера задач, оставшихся в "списке" после вычеркивания очередной задачи с номером $k \in \tilde{K}$. Разумеется, \tilde{K} следует определять, как множество всех номеров задач, имеющих в списке на момент пребывания "системы" в состоянии x ; такое понимание \tilde{K} соответствует множеству $\overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, s-1}\}$ (подразумевается, что $s-1$ задач уже решены), если иметь в виду выражение в правой части (4.2).

Мы рассматриваем случай, когда V является искаженной, в процессе вычисления, функцией Беллмана. Наглядное представление такой функции можно получить, склеивая "слои" $\tilde{V}_0, \tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_N$ (см. раздел 3). Именно, V можно определить условиями: на D_0 имеет место $V(z) = \tilde{V}_0(z)$, на D_1 полагаем $V(z) = \tilde{V}_1(z)$ и т.д. В результате, в виде V мы получим функцию, близкую к V ; эту функцию мы используем для маршрутизации в смысле определения 4.1. Уточним постановку нашей задачи.

Алгоритм на функциональном уровне. Фиксируем число $\alpha \in]0, \infty[$ в качестве заданного параметра точности. Полагаем далее, что

$$(4.4) \quad \mathcal{V} : \mathbb{D} \longrightarrow [0, \infty[$$

есть функция, для которой

$$(4.5) \quad (\forall z \in \mathbb{D} : |\mathcal{V}(z) - V(z)| \leq \alpha) \ \& \ (\forall z \in \mathbb{D}_0 : \mathcal{V}(z) \stackrel{\Delta}{=} 0).$$

Итак, \mathcal{V} – приближенный вариант функции Беллмана, который, в частности, может быть построен по рецептам раздела 3 (в этом случае можно полагать: $\alpha = N\epsilon$, где $\epsilon \in]0, \infty[$ соответствует (3.6); $(\mathcal{V}|_{D_s}) = \tilde{V}_s$ при $s \in \overline{0, N}$), хотя не исключаются и другие возможности. Полагаем в дальнейшем $\forall s \in \overline{0, N} : \mathcal{V}_s \stackrel{\Delta}{=} (\mathcal{V}|_{D_s})$. Это означает, что (при $s \in \overline{0, N}$) $\mathcal{V}_s \in F_s$ и, кроме того, $\forall z \in D_s : \mathcal{V}_s(z) = \mathcal{V}(z)$. Итак, пусть в дальнейшем: $V \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{V}$, $\kappa \in]0, \infty[$ – фиксированный параметр (определяющий точность реализации экстремума в основном соотношении ДП с искаженной функцией Беллмана, причем это искажение удовлетворяет (4.5)). Стало быть, в дальнейших построениях у нас присутствуют два параметра точности: $\alpha \in]0, \infty[$ и $\kappa \in]0, \infty[$. Эти параметры связаны с неидеальной реализацией основных структур метода ДП.

Теорема 4.1. В упомянутых выше предположениях (4.4), (4.5) и $V = \mathcal{V}$ имеем, при заданных $\kappa \in]0, \infty[$ и $\alpha \in]0, \infty[$, что $\forall (\lambda, (x_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in (\text{SOL})[V; \kappa]$:

$$\sum_{j=1}^N c_{\lambda(j)}(x_{j-1}, x_j) < V(x^0, \overline{1, N}) + (2\alpha + \kappa)N.$$

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент $(\lambda, (x_i)_{i \in \overline{0, N}})$ непустого множества $(\text{SOL})[V; \kappa] = (\text{SOL})[\mathcal{V}; \kappa]$. Разумеется,

$$(\lambda, (x_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbb{S}(x^0, \overline{1, N}),$$

так что $\lambda \in (\text{bi})[\overline{1, N}]$ и $(x_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \text{Sol}(x^0, \overline{1, N}, \lambda)$ (при этом, разумеется, $(x_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathbb{X}_N$). Далее, из определения 4.1 вытекает, что $\forall s \in \overline{1, N}$:

$$(4.6) \quad c_{\lambda(s)}(x_{s-1}, x_s) + \mathcal{V}(x_s, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, s}\}) < \\ < \min_{k \in \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, s-1}\}} \inf_{y \in A_k(x_{s-1})} [c_k(x_{s-1}, y) + \\ + \mathcal{V}(y, (\overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, s-1}\}) \setminus \{k\})] + \kappa.$$

В частности, при $s = 1$ имеем из (4.6), что

$$(4.7) \quad c_{\lambda(1)}(x^0, x_1) + \mathcal{V}(x_1, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(1)\}) < \min_{k \in \overline{1, N}} \inf_{y \in A_k(x^0)} [c_k(x^0, y) + \\ + \mathcal{V}(y, \overline{1, N} \setminus \{k\})] + \kappa.$$

С учетом (3.2), (4.5) и (4.7) мы получаем, что справедливо

$$(4.8) \quad c_{\lambda(1)}(x^0, x_1) + V(x_1, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(1)\}) < \alpha + T_N(\mathcal{V}_{N-1})(x^0, \overline{1, N}) + \kappa.$$

Учитывая естественную изометричность T_N , получаем (см. (4.9))

$$(4.9) \quad |T_N(\mathcal{V}_{N-1})(x^0, \overline{1, N}) - V(x^0, \overline{1, N})| = |T_N(\mathcal{V}_{N-1})(x^0, \overline{1, N}) - \\ - V_N(x^0, \overline{1, N})| = |T_N(\mathcal{V}_{N-1})(x^0, \overline{1, N}) - T_N(V_{N-1})(x^0, \overline{1, N})| \leq \alpha.$$

Из (4.8), (4.9) вытекает, что

$$(4.10) \quad c_{\lambda(1)}(x^0, x_1) + V(x_1, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(1)\}) < V(x^0, \overline{1, N}) + 2\alpha + \kappa.$$

Рассмотрим теперь следующее множество; именно, пусть

$$(4.11) \quad Q \triangleq \left\{ q \in \overline{1, N} \mid \sum_{j=1}^q c_{\lambda(j)}(x_{j-1}, x_j) + V(x_q, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : \\ : j \in \overline{1, q}\}) < V(x^0, \overline{1, N}) + (2\alpha + \kappa)q \right\}.$$

Из (4.10), (4.11) сразу следует, что $1 \in Q$ (мы учли, что $x_0 = x^0$). Покажем, что $Q = \overline{1, N}$. Допустим противное: $Q \neq \overline{1, N}$. Тогда непременно $\overline{1, N} \setminus Q \neq \emptyset$. Пусть $n \triangleq \inf(\overline{1, N} \setminus Q)$; при этом $n \in \overline{1, N} \setminus Q$. Кроме того, $\forall k \in \overline{1, N} \setminus Q : n \leq k$. Наконец, $n \neq 1$, так что $n \in \overline{2, N}$, а тогда $n - 1 \in Q$. В силу (4.11) получаем неравенство

$$(4.12) \quad \sum_{j=1}^{n-1} c_{\lambda(j)}(x_{j-1}, x_j) + V(x_{n-1}, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}) < \\ < V(x^0, \overline{1, N}) + (2\alpha + \kappa)(n - 1).$$

Вместе с тем, из (4.6) следует, что справедливо

$$(4.13) \quad c_{\lambda(n)}(x_{n-1}, x_n) + \mathcal{V}(x_n, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n}\}) < \\ < \min_{k \in \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}} \inf_{y \in A_k(x_{n-1})} [c_k(x_{n-1}, y) + \\ + \mathcal{V}(y, (\overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}) \setminus \{k\})] + \kappa.$$

Заметим, что $x_n \in A_{\lambda(n)}(x_{n-1})$. Отметим, что в силу (4.5), (4.13)

$$(4.14) \quad c_{\lambda(n)}(x_{n-1}, x_n) + V(x_n, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n}\}) < \\ < \alpha + \min_{k \in \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}} \inf_{y \in A_k(x_{n-1})} [c_k(x_{n-1}, y) + \\ + \mathcal{V}(y, (\overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}) \setminus \{k\})] + \kappa.$$

Имеем, при $k \in \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}$ и $y \in A_k(x_{n-1})$, что

$$(4.15) \quad (y, (\overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}) \setminus \{k\}) \in D_{N-n}.$$

С другой стороны, у нас

$$(x_{n-1}, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}) \in D_{(N-n)+1}.$$

Из (3.2), (4.14), (4.15) имеем теперь с очевидностью

$$(4.16) \quad \begin{aligned} & T_{(N-n)+1}(\mathcal{V}_{N-n})(x_{n-1}, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}) = \\ &= \min_{k \in \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}} \inf_{y \in A_k(x_{n-1})} [c_k(x_{n-1}, y) + \\ &+ \mathcal{V}_{N-n}(y, (\overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}) \setminus \{k\})] = \\ &= \min_{k \in \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}} \inf_{y \in A_k(x_{n-1})} [c_k(x_{n-1}, y) + \\ &+ \mathcal{V}(y, (\overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}) \setminus \{k\})]. \end{aligned}$$

Рассмотрим комбинацию (4.14) и (4.16). Тогда

$$(4.17) \quad \begin{aligned} & c_{\lambda(n)}(x_{n-1}, x_n) + V(x_n, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n}\}) < \\ & < \alpha + T_{(N-n)+1}(\mathcal{V}_{N-n})(x_{n-1}, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}) + \kappa. \end{aligned}$$

Напомним, что на D_{N-n} имеет место оценка (см. (4.5)) $|\mathcal{V}_{N-n}(z) - V_{N-n}(z)| = |\mathcal{V}(z) - V(z)| \leq \alpha$. С учетом (3.4) мы получаем тогда, что $\forall z \in D_{(N-n)+1}$:

$$(4.18) \quad |T_{(N-n)+1}(\mathcal{V}_{N-n})(z) - T_{(N-n)+1}(V_{N-n})(z)| \leq \alpha.$$

Из (4.17) и (4.18) имеем теперь неравенство

$$(4.19) \quad \begin{aligned} & c_{\lambda(n)}(x_{n-1}, x_n) + V(x_n, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n}\}) < \\ & < T_{(N-n)+1}(V_{N-n})(x_{n-1}, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}) + 2\alpha + \kappa. \end{aligned}$$

В силу (3.3) и (4.19) получаем, что

$$(4.20) \quad \begin{aligned} & c_{\lambda(n)}(x_{n-1}, x_n) + V(x_n, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n}\}) < \\ & < V_{(N-n)+1}(x_{n-1}, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}) + 2\alpha + \kappa = \\ & = V(x_{n-1}, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n-1}\}) + 2\alpha + \kappa. \end{aligned}$$

Из (4.12), (4.20) следует неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n c_{\lambda(j)}(x_{j-1}, x_j) + V(x_n, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n}\}) < \\ & < V(x^0, \overline{1, N}) + (2\alpha + \kappa)(n-1) + (2\alpha + \kappa). \end{aligned}$$

Иными словами, справедливо неравенство

$$(4.21) \quad \begin{aligned} & \sum_{j=1}^n c_{\lambda(j)}(x_{j-1}, x_j) + V(x_n, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, n}\}) < \\ & < V(x^0, \overline{1, N}) + (2\alpha + \kappa)n. \end{aligned}$$

Из (4.11), (4.21) следует, что $n \in Q$, а это невозможно. Противоречие доказывает равенство $Q = \overline{1, N}$; тогда $N \in Q$ и в силу $\overline{1, N} = \{\lambda(j) : j \in \overline{1, N}\}$:

$$\sum_{j=1}^N c_{\lambda(j)}(x_{j-1}, x_j) = \sum_{j=1}^N c_{\lambda(j)}(x_{j-1}, x_j) + V(x_N, \overline{1, N} \setminus \{\lambda(j) : j \in \overline{1, N}\}) < V(x^0, \overline{1, N}) + (2\alpha + \kappa)N.$$

Тем самым теорема полностью доказана.

Рассмотрим применение общих конструкций разделов 3, 4 для решения известной [3 – 9] задачи обхода конечной системы целевых множеств с целью минимизации длины получающейся в итоге ломаной. Итак, мы рассматриваем метрическую задачу: минимизация суммы расстояний – наша основная цель в этом разделе. Однако, рассматриваемые ниже конструкции легко могут быть модифицированы для общего варианта задачи, целевые функционалы в которой определяются посредством кортежа c (2.3). Предлагаемая ниже конкретная схема является, однако, более наглядной и допускает естественную геометрическую интерпретацию. Мы полагаем здесь, что X есть подмножество n -мерного арифметического пространства \mathbb{R}^n (здесь $n \in \mathcal{N}$), оснащаемого евклидовой нормой $\|\cdot\|$. Если H – непустое подмножество \mathbb{R}^n и $x \in \mathbb{R}^n$, то через $\rho(x, H)$ обозначаем евклидово расстояние от x до H :

$$\rho(x, H) \triangleq \inf(\{\|x - h\| : h \in H\}) \in [0, \infty[.$$

Пусть M_1, \dots, M_N – непустые подмножества \mathbb{R}^n , подлежащие обходу (т.е. посещению) из начального состояния $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Фиксируем, кроме того, N чисел $\epsilon_1 \in]0, \infty[, \dots, \epsilon_N \in]0, \infty[$. Будем полагать в дальнейшем, что

$$(4.22) \quad X \triangleq \left(\bigcup_{i=1}^N M_i \right) \cup \{x^0\}.$$

Далее, определяем при $i \in \overline{1, N}$ многозначное отображение A_i с непустыми значениями (см. раздел 2) условием: для $x \in X$ имеет место

$$(4.23) \quad A_i(x) \triangleq \{\tilde{x} \in M_i \mid \|x - \tilde{x}\| \leq \rho(x, M_i) + \epsilon_i\}.$$

Наконец, каждую из функций (2.3) определяем посредством $\|\cdot\|$, полагая $\forall i \in \overline{1, N} \forall x_1 \in X \forall x_2 \in X$:

$$(4.24) \quad c_i(x_1, x_2) \triangleq \|x_1 - x_2\|.$$

Посредством (4.22) – (4.24) конкретизируется общая постановка раздела 2. В содержательном отношении логика, предусматривающая движение по “областям достижимости” вида (4.23) ориентирована на реализацию идеи компромисса по отношению к “доминанте” в виде требования кратчайших переходов (переходов по принципу “иди в ближайшую точку”). Помимо всего прочего, можно использовать такую логику и в целях снижения вычислительных затрат при обходе системы $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_N)$. Более подробное обсуждение этого подхода см. в [6, 8]. Другая возможная версия может быть связана с обходом открытых множеств в \mathbb{R}^n по упомянутому выше принципу кратчайших переходов в его аппроксимативной редакции. Мы не будем сейчас рассматривать общий случай задачи последовательного обхода; ограничимся далее тем случаем, когда \mathcal{M} – система конечных подмножеств \mathbb{R}^n , так что речь идет о задаче последовательного обхода больших дискретных структур.

Эти структуры могут быть заданы изначально, а могут появиться в результате предварительной дискретизации континуальных целевых множеств, что естественно в случае применения численных методов. Рассматриваемая ниже задача является следовательно невыпуклой; позднее мы приведем соответствующие примеры. Итак, пусть $\text{Fin}(\mathbb{R}^n)$ есть def семейство всех непустых конечных подмножеств \mathbb{R}^n ; полагаем в дальнейшем, что

$$(4.25) \quad \forall i \in \overline{1, N} : M_i \in \text{Fin}(\mathbb{R}^n).$$

В отношении ϵ_i в (4.23) будем допускать теперь возможность принимать нулевые значения, так что в последующем изложении полагаем

$$(4.26) \quad \epsilon_1 \in [0, \infty[, \dots, \epsilon_N \in [0, \infty[.$$

Более того, мы будем использовать "допуски" (4.26), как средство управления. Заметим, что в условиях (4.25) имеем $\forall x \in \mathbb{R}^n \forall i \in \overline{1, N} \exists \tilde{x} \in M_i : \rho(x, M_i) = \|x - \tilde{x}\|$; следовательно в (4.26) можно использовать и нулевые значения, сохраняя при этом непустоту конечных множеств (5.2). Соотношение (2.6) принимает следующий вид: именно, $\forall x \in X \forall K \in \mathbb{N}$:

$$(4.27) \quad V(x, K) = \min_{k \in K} \min_{y \in A_k(x)} [\|x - y\| + V(y, K \setminus \{k\})].$$

Разумеется, (4.27) отвечает фиксированному набору "допусков" (4.26). На основе (4.27) был построен алгоритм, который реализован в виде программы на ПЭВМ, написанной на языке Pascal (в его версии - Delphi 2). Ниже приведены результаты применения упомянутого алгоритма для решения задачи маршрутизации последовательного обхода системы \mathcal{M} из заданного начального состояния.

Сейчас мы рассмотрим только более наглядный вариант плоской ($n = 2$) задачи; полагаем в этом случае $N = 12$. В качестве x^0 вновь используем вектор с нулевыми координатами ($x_i^0 \equiv 0$). Целевую систему \mathcal{M} задаем в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_1 &\triangleq \{(5, 5); (5, -5); (8, 0)\}; M_2 \triangleq \{(10, 10); (10, 15)\}; M_3 \triangleq \{(10, -10); \\ &(10, -15)\}; M_4 \triangleq \{(25, 5); (30, 10)\}; M_5 \triangleq \{(25, -5); (30, -10)\}; \\ M_6 &\triangleq \{(50, 1); (50, -1)\}; M_7 \triangleq \{(40, 30); (45, 35); (42, 40)\}; \\ M_8 &\triangleq \{(40, -30); (45, -35); (42, -40)\}; M_9 \triangleq \{(0, 5); (0, 10)\}; \\ M_{10} &\triangleq \{(0, -10); (0, -20)\}; M_{11} \triangleq \{(-15, 0); (-10, 20); (-10, -20)\}; \\ M_{12} &\triangleq \{(-30, 30); (-30, 40); (-30, 50)\}. \end{aligned}$$

Допуски в (5.5) выбираем одинаковыми и соответствующими двум вариантам: 1) $\epsilon = 0$, 2) $\epsilon = 20$. В первом случае ($\epsilon_i \equiv 0$) процедура на основе ДП доставляет маршрут 1, 10, 3, 5, 8, 6, 7, 4, 2, 9, 11, 12; соответствующая трасса имеет вид:

$$(0, 0), (5, -5), (0, -10), (10, -10), (25, -5), (40, -30), (50, -1), \\ (40, 30), (30, 10), (10, 10), (0, 10), (-10, 20), (-30, 30).$$

Длина ломаной в случае 1) есть число 221,22. В случае 2) мы получаем другое решение. Именно (при $\epsilon_i \equiv 20$), маршрут, реализуемый на основе ДП есть: 10, 3, 5, 8, 6, 7, 4, 2, 1, 9, 11, 12. Соответствующая трасса имеет вид:

$$(0, 0), (0, -10), (10, -10), (30, -10), (40, -30), (50, 1), (40, 30), \\ (30, 10), (10, 10), (5, 5), (0, 10), (-10, 20), (-30, 30).$$

Длина ломаной есть число 218,62 (результат улучшился). В случае 2) процедура использует новые возможности, отступая от принципа кратчайшего перехода уже на первом "шаге". Этот отказ из соображений "высших интересов" является типичным для маршрутных задач такого типа, хотя выигрыш в данном случае весьма невелик и (более простая) конструкция решения, отвечающая случаю 1), приводит здесь к вполне приемлемому результату. Вышеупомянутые примеры показывают, что схема на основе (2.2), (5.2), реализуемая с малыми допусками ϵ_i , может служить зачастую для определения "хорошего" ориентира при решении более традиционных задач [3 – 5] обхода конечной системы множеств (см. раздел 1), хотя используемые в настоящем разделе конструкции, конкретизирующие абстрактную схему [6 – 9] (на основе решения уравнения (2.6)) в виде (4.1), (5.6), являются, строго говоря, способом получения эвристик в смысле исходной задачи обхода целевой системы M .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
2. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
3. Коротаева Л.Н., Сесекин А.Н., Ченцов А.Г. Об одной модификации метода динамического программирования в задаче последовательного сближения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 8. С. 1107–1113.
4. Буслаева Л.Т., Ченцов А.Г. К вопросу о декомпозиции процесса последовательного выбора вариантов // Математическое моделирование. 1991. Т. 3. № 4. С. 103–113.
5. Коротаева Л.Н., Назаров Э.М., Ченцов А.Г. Об одной задаче о назначениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. № 4. С. 483–494.
6. Коротаева Л.Н., Трушкин М.П., Ченцов А.Г. К вопросу о маршрутизации соединений // АИТ. 1997. № 12. С. 175–192.
7. Коротаева Л.Н., Назаров Э.М., Ченцов А.Г. Динамическое программирование в одной задаче о назначениях / Тезисы докладов V Всесоюзного семинара "Методы синтеза и планирования развития крупномасштабных систем", Звенигород. Институт проблем управления, 1990.
8. Chentsov A.G., Korotayeva L.N. The Dinamic Programming Method in the Generalized Salesman Problem // Mathl. Comput. Modelling. 1997. V. 25. No. 1. P. 93–105.
9. Коротаева Л.Н., Ченцов А.Г. Об одном обобщении задачи коммивояжера "на узкие места" // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35. № 7. С. 1067–1076.
10. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
11. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
12. Панасюк А.И., Панасюк В.И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986.
13. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
14. Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1981.
15. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.

Поступила в редакцию 17.09.97