



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. R. Its, V. B. Matveev, Algebrogeometrical integration of the MNS equation, the finite-gap solutions and their degeneration, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 101, 64–76

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.91

January 15, 2025, 09:51:38



АЛГЕБРОГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ
МНШ, КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ И ИХ ВЫРОЖДЕНИЯ

Введение

Недавно Кауп и Ньюэлл [1] заметили, что коммутативность пары операторов $\partial_x - U, \partial_t - V$ полиномиально зависящих от λ

$$U = \lambda(\lambda a + b), V = 2\lambda^3(\lambda a + b) + \lambda z q(\lambda a + b) + \lambda c, \quad (0.1)$$

$$a = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & q \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & i q_x \\ -i z_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (0.2)$$

порождают систему нелинейных уравнений

$$i q_t = -q_{xx} + i(zq^2)_x, \quad i z_t = z_{xx} + i(z^2 q)_x. \quad (0.3)$$

При $z = \pm \bar{q}$ эта система переходит в модифицированное нелинейное уравнение Шредингера (МНШ)

$$i q_t = -q_{xx} \mp i(|q|^2 q)_x$$

Уравнение МНШ описывает распространение циклически поляризованных Альфеновских волн в плазме, поэтому вычисление его решений представляет определенный интерес. Так же, как и в случае нелинейного уравнения Шредингера, метод обратной задачи рассеяния наталкивается на определенные трудности в построении компактных формул для многосолитонных решений. Поэтому в [1] описаны лишь односолитонные решения уравнения МНШ и его комплексификации (0.3). В настоящей работе получены компактные явные формулы для конечнозонных решений системы (0.3). Эти решения просто выражаются через многомерные Θ -функции. Простейшие вырождения конечнозонных решений приводят к явным представлениям для многосолитонных решений уравнения МНШ и многосолитонных решений на постоянном фоне.

Отметим, что конечнозонным решениям уравнения МНШ посвящена также работа А.К.Прикарпатского [2], однако примененный в ней метод позволил получить лишь явные формулы для симметрических функций от условных собственных чисел, переход от которых к самим решениям представляет отдельную задачу.

В недавней работе Н.В.Чередника [3] предложена общая схема интегрирования уравнений Захарова-Михайлова, однако данный пример не вкладывается явным образом в схему работы [3] и характеризуется отсутствием естественной априорной нормировки в аксиоматике Ψ -функции, принадлежащей ядру операторов $\partial_x - U, \partial_t - V$. Укажем еще, что в работе [4] Герджикова, Иванова и Кулиша исследовался класс нелинейных эволюционных уравнений, сохраняющих ядро оператора $\partial_x - U$ и вычислялись переменные действие-угол для уравнений этого класса. Там же показано, что в этот класс (с точностью до калибровочной эквивалентности) попадает массивная модель Тирринга и ряд других релятивистски инвариантных систем.

Построения настоящей работы легко переносятся на случай векторного варианта уравнения МНШ, недавно исследованного в рамках метода обратной задачи рассеяния Доддом и Моррисом [5]. Соответствующие результаты будут опубликованы в отдельной статье.

1. ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОНЕЧНОЗОННЫХ И МНОГОСОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ.

Конечнозональные решения. Фиксируем гиперэллиптическую кривую

Γ соотношением

$$\omega^2 = P(z), \quad P(z) = \prod (z - E_j), \quad E_j \in \mathbb{C}, \quad j=1, \dots, 2n+2, \quad E_{2n+2} = 0. \quad (1.1)$$

Риманова поверхность Γ получается склеиванием двух экземпляров плоскости \mathbb{C} с разрезами по отрезкам (дугам) $(\infty, E_1][E_{2k}, E_{2k+1}]$, $[E_{2n+2}, \infty)$. Канонический базис a и b циклов на поверхности Γ устроен следующим образом. Цикл a_k обходит вокруг отрезка $[E_{2k}, E_{2k+1}]$ по часовой стрелке на верхнем листе Γ . Цикл b_k начинается с левого берега разреза $[E_{2k}, E_{2k+1}]$ на верхнем листе, пересекает в единственной точке цикл a_k , не пересекая остальных циклов выходит на левый берег разреза $[E_{2n+2}, \infty)$ и по нижнему листу возвращается в исходную точку.

По набору циклов a_k и b_k строятся базис голоморфных дифференциалов dU_j , матрица B - периодов и вектор $U(P)$:

$$dU_j = P^{-\frac{1}{2}}(z) \sum_{j=1}^n \Gamma_j^k z^{n-k} dz, \quad \oint_{a_k} dU_j = \delta_{kj}, \quad (1.2)$$

$$B_{mn} = \oint_{b_m} dU_n, \quad U(P) = \int_{E_{2n+2}} dU, \quad (dU_j) = dU_j, \quad P \in \Gamma. \quad (1.3)$$

Матрица B всегда симметрична, недиагональна (если род больше единицы) и не распадается на блоки. Мнимая часть B положительно определена на \mathbb{R}^n .

По матрице B строится n -мерная θ -функция

$$\theta(\vec{p}) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^n} \exp\{i\pi(B\vec{k}, \vec{k}) + 2i\pi(\vec{p}, \vec{k})\}, \quad \vec{p} \in \mathbb{C}^n. \quad (I.4)$$

В описании решений участвует также абелевы интегралы $\omega_{1,2,3}$ с нулевыми A -периодами, сингулярности которых лежат в точках ∞^\pm и описываются формулами^{*}:

$$\omega_1(\rho) = \pm(z - z^{-1}E_0 + R_1 z^{-1}) + O(z^{-2}), \quad \rho \rightarrow \infty^\pm \quad (I.5)$$

$$\omega_2(\rho) = \pm(2z^2 + z^{-1}N_0 + z^{-1}F_1) + O(z^{-2}), \quad \rho \rightarrow \infty^\pm \quad (I.6)$$

$$\omega_3(\rho) = z^{-1} \ln z + \gamma z^{-1} + \gamma_1 z^{-2} + O(z^{-3}), \quad \rho \rightarrow \infty^+, \quad (I.7)$$

$$\omega_3(\rho) = -z^{-1} \ln z + \ln \omega_0 + \delta z^{-1} + \delta_1 z^{-2} + O(z^{-3}), \quad \rho \rightarrow \infty^-. \quad (I.8)$$

Решения системы (0.3), соответствующие кривой Γ и неособому дивизору $D = \sum_{j=1}^n P_j^*$, $P_j \in \Gamma$ имеют вид

$$q_j = i\theta(q+z)\theta(q-z)\theta^{-2}(q) \exp\{i\alpha x - i\beta t\}, \quad (I.9)$$

$$z = 4i\omega_0 \theta(q)\theta(q+2z)\theta^{-2}(q+z) \exp\{-i\alpha x + i\beta t\}, \quad (I.10)$$

$$zq = 2i\partial_x \ln\{\theta(q)\theta^{-1}(q+z)\} - 4\delta + 2E_0, \quad \alpha = E_0 - 4\delta, \quad (I.11)$$

$$\beta = N_0 - 16\gamma_1, \quad q_j = -2i\Gamma_j^1 x - 4i(\Gamma_j^2 + z^{-1}\Gamma_j^1 \sum E_i)t + q_j(0,0),$$

$$q_j(0,0) = -\sum_{m=1}^n \int_0^{P_m} dU_j + \frac{j}{2} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n B_{mj}, \quad z = \int_0^+ dU, \quad (I.12)$$

последний интеграл берется по левому берегу разреза на верхнем

^{*} Чтобы дивизор был неособым, необходимо и достаточно, чтобы проекции $\pi(P_m)$ точек P_m на комплексную плоскость были различны. ∞^+ и ∞^- служат обозначением бесконечноудаленных точек на верхнем и нижнем листе поверхности Γ соответственно.

листе.

Многосолитонные решения. Эти решения представляют собой результат предельного $E_1 \rightarrow 0, E_{2\nu}, E_{2\nu+1} \rightarrow \lambda_\nu, \nu=1, \dots, n$, в формулах (I.9) - (I.II) при дополнительном условии $n=2m$. Мы считаем кроме того, что $\text{Im} \lambda_j > 0, j=1, \dots, m, \lambda_{m+j} = \bar{\lambda}_j$. Это необходимо для выполнения равенства $q = \pm \bar{z}$. При этом предельный переход в формулах (I.9) - (I.II) приводит к следующему переопределению входящих в них объектов.

$$1. q_j = 2i\lambda_j x + 4i\lambda_j^2 t - 2^{-1} \ln(-4\lambda_j) + \eta_j, \quad j=1, \dots, m,$$

$$2\pi i q_{m+j} = -2i\bar{\lambda}_j x - 4i\bar{\lambda}_j^2 t + 2^{-1} \ln(-4\bar{\lambda}_j) + \eta_{m+j}, \quad (I.I3)$$

$$2. 2\pi i z_j = \ln(-4\lambda_j), \quad z_{m+j} = -\bar{z}_j, \quad (I.I4)$$

$$3. \alpha = \beta = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{4},$$

$$4. B_{\nu\nu} = 0; \quad B_{\nu\mu} = \ln \frac{(\lambda_\nu - \lambda_\mu)^2}{16\lambda_\mu^2 \lambda_\nu^2}, \quad \mu \neq \nu, \quad \mu, \nu \geq m+1$$

или $\mu, \nu \leq m$;

$$2\pi i B_{\nu\mu} = \ln \frac{16\lambda_\mu^2 \lambda_\nu^2}{(\lambda_\nu - \lambda_\mu)^2}, \quad \nu \leq m, \quad \mu \geq n+1, \quad \mu \neq \nu. \quad (I.I5)$$

5. Суммирование по решетке \mathbb{Z}^n в (I.4) следует заменить на суммирование по векторам \vec{k} , таким что $k_\nu = 0, 1$ и удовлетворяющим следующим дополнительным условиям:

а) в переопределении $\theta(q+z)$ и $\theta(q)$

$$\sum k_j = \sum k_{m+j}, \quad j=1, \dots, m \quad (I.I6)$$

б) в переопределении $\theta(q-z)$

$$\sum k_j = \sum k_{m+j} - 1, \quad (I.I7)$$

с) в переопределении $\theta(q+2z)$

$$\sum k_j = \sum k_{m+j} + 1. \quad (I.I8)$$

Построенные решения параметризуются $3m$ комплексными параметрами λ_j, η_j . Подчинив η_j условию

$$\eta_j = \bar{\eta}_{m+j} - \frac{\pi i}{2} (1 \pm 1)$$

мы получаем многосолитонные решения уравнения МНШ. Еще проще описываются многосолитонные решения на постоянном фоне. Они параметризуются $2n+1$ числами $\alpha_j, \lambda_1, \dots, \lambda_n; \eta_1, \dots, \eta_n$, а Θ -функции, входящие в формулы (I.9) - (I.II) переопределяются единым образом

$$\Theta(q+lv) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{0,1}^n} \exp \left\{ \sum_{\nu > \mu} \ln \left(\frac{\gamma_\nu - \gamma_\mu}{\gamma_\nu + \gamma_\mu} \right)^2 k_\nu k_\mu + \sum k_\nu (-2\alpha_\nu x + 4\alpha_\nu(\alpha - \lambda_\nu)t + l \cdot \ln \frac{\gamma_\nu + 1}{\gamma_\nu - 1} + \eta_\nu) \right\},$$

$$\gamma_\nu = \sqrt{\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu + d}}, \quad \alpha_\nu = \sqrt{\lambda_\nu(\lambda_\nu + \alpha)}, \quad l = 1, 2, -1. \quad (\text{I.I9})$$

Предельные значения параметров $E_0, N_0, \gamma, \delta, \omega_0$ даются формулами

$E_0 = 0, N_0 = -2\alpha^2, \gamma = \delta = 0, \omega_0 = \frac{\alpha}{4}$,
 $\mathbb{Z}_{0,1}^n$ обозначает решетку n -мерных векторов, составляющие которых могут принимать лишь значения 0 или 1. Многосолитонные решения на постоянном фоне соответствуют предельному переходу $E_1 \rightarrow -\alpha, E_{2k} E_{2k+1} \rightarrow \lambda_k, k = 1, 2, \dots, n$. Следуя работе одного из авторов [6] можно свернуть полученные многосолитонные (и многосолитонные на постоянном фоне) решения в детерминантные формулы. Из полученных формул легко извлекается асимптотика многосолитонных решений при $t \rightarrow \pm\infty$. При этом фазовые сдвиги, описывающие столкновения между солитонами стандартно выражаются через предельные значения недиагональных элементов матрицы B .

II: Ψ - функция для вспомогательной линейной системы.

В этом разделе мы опишем совместное решение (функцию Бейкера-Ахиезера) системы линейных уравнений

$$\partial_x \Psi = U \Psi, \quad (2.1)$$

$$\partial_t \Psi = V \Psi, \quad \Psi = \Psi(x, t, \rho), \quad \rho \in \Gamma \quad (2.2)$$

параметризованное кривой Γ и неспециальным дивизором D .

Функция Ψ строится по следующим условиям:

I $\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{z} \end{pmatrix} \Psi, \lambda = \sqrt{z}$, однозначна на Γ и мероморфна на $\Gamma / \{\infty^\pm\}$. Ее дивизор полюсов $D = \sum_{i=1}^n \rho_i$ неспециален и не зависит от x и t .

2 Асимптотика Ψ_i при $\rho \rightarrow \infty^\pm, \rho \in \Gamma$ имеет вид:

$$\Psi_i^\pm = u_i(x, t) \left\{ \sum_{j=-1}^{\infty} \xi_{ij}^\pm z^{-\frac{j}{2}} \right\} e^{\pm i(zx + 2z^2 t)} \quad (2.3)$$

$$\xi_{1, 2k-1}^\pm = 0, \quad \xi_{1, 0}^\pm = 1, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

$$\xi_{2, 2k}^\pm = 0, \quad \xi_{2, -1}^\pm = 1, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \xi_{2, -1}^\mp = 0. \quad (2.5)$$

Функции $u_i(x, t)$ при этом априори не фиксируются и функция Ψ восстанавливается лишь с точностью до этих неопределенных множителей.

Можно, конечно, совершить зависящее от z калибровочное преобразование, при котором уравнение (2.1) превратится в систему Захарова-Шабата, однако явное вычисление коэффициентов исходной системы в терминах получившейся калибровочно эквивалентной системы оказывается труднее непосредственного использования Ψ - функции с неопределенной нормировкой, которой мы пользуемся.

Для первой компоненты функции Ψ на основании аксиом I, 2, 3 получаем:

$$\Psi_1 = \frac{\theta(U(\rho) - q(x, t) \cdot \theta(q(0, 0) + z)}{\theta(U(\rho) - q(0, 0)) \cdot \theta(q(x, t) + z)} x \times \exp \left\{ i\omega_1(\rho)x + i\omega_2(\rho)t - \frac{ixE_0}{2} + \frac{iN_0 t}{2} \right\}, \quad (2.6)$$

где векторы $U(\rho), q, z$ описываются формулами (1.3). Отметим попутно, что разность $q(x, t) - q(0, 0)$ можно описать эквивалентным образом в терминах векторов b - периодов \vec{B}^1, \vec{B}^2 интегралов ω_1 и ω_2

$$q(x, t) - q(0, 0) = -\frac{1}{2\pi} (\vec{B}^1 x + \vec{B}^2 t),$$

а вектор z явно выражается через b - периоды интеграла ω_3 :

$$2\pi iz = -\pi i \vec{1} - \vec{B}^3, \quad \vec{1}_j \equiv \vec{1}.$$

Формула для Ψ_2 имеет вид

$$\Psi_2 = \frac{\theta(U(\rho) - q(x, t) - z)}{\theta(U(\rho) - q(0, 0))} \cdot \frac{\theta(q(0, 0) - z)}{\theta(q(x, t))} \cdot \exp \left\{ i\omega_1 x + i\omega_2 t + \omega_3 + ix \frac{E_0}{2} - \frac{iN_0 t}{2} \right\}, \quad (2.9)$$

Заметим, что периоды интеграла $\ln \frac{\Psi_2}{\Psi_1}$ совпадают, в силу отмеченной выше связи между векторами z и \vec{B}^3 , с периодами абелева интег-

рада $\omega_4 = \frac{1}{2} \ln z$.

Явные формулы для коэффициентов разложения Ψ -функции в бесконечноудаленных точках.

Введем обозначения

$$x_0^+ = \ln \theta(q(x, t) - z), \quad x_1^+ = \frac{\partial}{\partial x} x_0^+, \quad x_2^+ = \frac{1}{8} \left(-\frac{\partial}{\partial x^2} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) x_0^+.$$

ЛЕММА 1. При $\rho \rightarrow \infty^+$ справедлива асимптотика

$$\ln \theta(q - U(\rho)) = x_0^+ + \frac{x_1^+}{z} + \frac{x_2^+}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Доказательство этой леммы дано в приложении I.

Обозначая

$$x_0^- = \ln \theta(q + z), \quad x_1^- = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} x_0^-, \quad x_2^- = -\frac{1}{8} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) x_0^-,$$

можно доказать аналогичное утверждение, описывающее асимптотику $\ln \theta(q - U(\rho))$ при $\rho \rightarrow \infty^-$:

ЛЕММА 2. При $\rho \rightarrow \infty^-$,

$$\ln \theta(q - U(\rho)) = x_0^- + \frac{x_1^-}{z} + \frac{x_2^-}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Заменой $q \rightarrow q + z$ мы получаем аналогичные асимптотические формулы для $\ln \theta(q + z - U(\rho))$ при $\rho \rightarrow \infty^\pm$:

$$\ln \theta(q + z - U(\rho)) = \eta_0^\pm + \frac{\eta_1^\pm}{z} + \frac{\eta_2^\pm}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right),$$

а явный вид функций $\eta_0^\pm, \eta_1^\pm, \eta_2^\pm$ тривиально определяется из лемм 1, 2.

Потенцируя эти асимптотические разложения и подставляя асимптотику абелевых интегралов $\omega_{1,2,3}$, мы найдем для коэффициентов ξ_i^\pm в (2.3) следующие явные представления:

$$\xi_{1,2}^- = x_1^- - x_{10}^- - iR_1 x - iF_1 t, \quad x_{10}^- \equiv x_1(0, 0),$$

$$\xi_{1,4}^- = x_2^- - x_{20}^- - iR_2 x - iF_2 t - \frac{1}{2} (x_1^- - x_{10}^- - iR_1 x - iF_1 t)^2,$$

$$\xi_{10}^+ = \frac{\theta(q(0, 0) + z) \theta(q(x, t) - z)}{\theta(q(0, 0) - z) \theta(q(x, t) + z)} \exp(-iEx + iN_0 t),$$

$$\xi_{1,2}^+ = \xi_{10}^+ (x_1^+ - x_{10}^+ - iR_1 x + iF_1 t), \quad x_{10}^+ \equiv x_1(0, 0),$$

$$\begin{aligned}
\xi_{14}^+ &= \xi_{10}^+ \left[x_2^+ - x_{20}^+ + iR_2 x + iF_2 t + \frac{1}{2} (x_1^+ - x_{10}^+ + iR_1 x + iF_1 t)^2 \right], \\
\xi_{21}^+ &= \eta_1^+ - x_{10}^+ + iR_1 x + iF_1 t + \gamma, \\
\xi_{23}^+ &= \eta_2^+ - x_{20}^+ + iR_2 x + iF_2 t + \gamma_1 + \frac{1}{2} (\eta_1^+ - x_{10}^+ + iR_1 x + iF_1 t + \gamma)^2, \\
\xi_{21}^- &= \omega_0 \frac{\theta(q(0,0) - z) \theta(q(x,t) + 2z)}{\theta(q(0,0) + z) \theta(q(x,t))} \exp(iE_0 x - iN_0 t), \\
\xi_{23}^- &= \xi_{21}^- (\eta_1^- - x_{10}^- - iR_1 x - iF_1 t + \delta), \\
\xi_{25}^- &= \xi_{21}^- \left[\eta_2^- - x_{20}^- - iR_2 x - iF_2 t + \delta_1 + \frac{1}{2} (\eta_1^- - x_{10}^- - iR_1 x - iF_1 t + \delta)^2 \right].
\end{aligned}$$

III. Подстановка асимптотического разложения Ψ -функции в точках ∞^\pm в уравнения (2.1) - (2.2)

Подставляя асимптотику Ψ (2.3) в уравнение (2.1), мы потребуем

1) чтобы при $\rho \rightarrow \infty^+$ первое уравнение соответствующей системы удовлетворялось с точностью до $O(1)$ (по модулю соответствующего экспоненциального множителя),

2) при $\rho \rightarrow \infty^\pm$ второе уравнение и при $\rho \rightarrow \infty^-$ первое уравнение удовлетворялись с точностью до $O(1)$ по модулю соответствующих экспоненциальных множителей.

Эти требования эквивалентны следующим уравнениям на нормировочные функции $u_{1,2}$ и коэффициенты матрицы U :

$$u_1 = -2iu_2 \xi_{21}^-, \quad qu_2 = 2iu_1 \xi_{10}^+, \quad (3.1)$$

$$u_{1x} = 2iu_1 \xi_{10}^+ \xi_{21}^-, \quad u_{2x} = -2iu_2 \xi_{10}^+ \xi_{21}^-. \quad (3.2)$$

Стандартные алгебраические аргументы [7, 8] показывают, что выполнение условий (3.1-2) необходимо и достаточно для того, чтобы функция Ψ точно удовлетворяла уравнению (2.1). Аналогично устанавливается, что для того, чтобы функция Ψ удовлетворяла уравнению вида

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[2\lambda^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda^3 \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & M \\ N & 0 \end{pmatrix} \right] \Psi, \quad (3.3)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A &= -4 \frac{u_1}{u_2} \xi_{10}^+, & B &= 4 \frac{u_2}{u_1} \xi_{21}^-, & C &= 4 \xi_{10}^+ \xi_{21}^-, \\ D &= -4 \xi_{10}^+ \xi_{21}^-, & M &= -2i \frac{u_1}{u_2} (\xi_{10}^+)_x, & N &= -2i \frac{u_2}{u_1} (\xi_{21}^-)_x, \\ u_{1t} &= u_1 (2 \xi_{10}^+ \xi_{21x}^- - 2 \xi_{10x}^+ \xi_{21}^- - 4i (\xi_{10}^+)^2 (\xi_{21}^-)^2), \\ u_{2t} &= -u_2 [2 \xi_{10}^+ \xi_{21x}^- - 2 \xi_{10x}^+ \xi_{21}^- - 4i (\xi_{10}^+)^2 (\xi_{21}^-)^2]. \end{aligned}$$

Таким образом, для того, чтобы функция Ψ была совместным решением уравнений (2.1) и (3.3), необходимо и достаточно потребовать, чтобы нормирующие функции $u_{1,2}$ удовлетворяли системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \ln u_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \ln u_2 = 2i \xi_{10}^+ \xi_{21}^-, \\ \frac{\partial}{\partial t} \ln u_1 &= -\frac{\partial}{\partial t} \ln u_2 = 2 \xi_{10}^+ \xi_{21x}^- - 2 \xi_{10x}^+ \xi_{21}^- - 4i (\xi_{10}^+)^2 (\xi_{21}^-)^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Если это условие выполняется, то тогда очевидно, что

$$\begin{aligned} A &= 2iq, & B &= 2ir, & C &= r q, & D &= -r q, \\ M &= ir q^2 - q_x, & N &= ir^2 q + r_x \end{aligned}$$

то-есть, уравнение (3.3) превращается в уравнение (2.2).

IV. Проверка совместности и явное интегрирование системы (3.4).

Пусть u_1 и u_2 выбраны так, чтобы удовлетворялось первое уравнение системы (3.4). Построенная по этим $u_{1,2}$ функция Ψ будет тогда удовлетворять уравнению (2.1). Разлагая левую и правую части этого уравнения в окрестности ∞^+ и приравнявая коэффициенты в разложении первого уравнения соответствующей системы при ξ^0 получим, что

$$\xi_{21}^+ = \xi_{10}^+ \xi_{21}^- + \frac{\xi_{12}^+}{\xi_{10}^+} - \frac{i}{2} \frac{\xi_{10x}^+}{\xi_{10}^+}.$$

Откуда, учитывая явные выражения для ξ_{ij}^+ , получаем следующее тождество:

$$\xi_{21}^+ \xi_{21}^- = \gamma + \frac{E_0}{2} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\theta(q)}{\theta(q+z)}. \quad (3.5)$$

Очевидно, что аналогичным приемом можно получить бесконечную серию тождеств на θ -функции. Для дальнейшего, однако, нам понадобятся, наряду с (3.5), лишь еще два тождества:

$$\xi_{23}^+ = \frac{\xi_{14}^+}{\xi_{10}^+} + \xi_{21}^- \xi_{12}^+ - \frac{i}{2} \frac{\xi_{12x}^+}{\xi_{10}^+} \quad (3.6)$$

и

$$\xi_{21x}^+ = 2i \xi_{10}^+ \xi_{21}^- \xi_{21}^+ - 2i \xi_{21}^- \xi_{12}^+ \quad (3.7)$$

Пусть теперь u_1 и u_2 выбраны так, чтобы удовлетворялись второе уравнение в системе (3.4). Построенная по этим $u_{1,2}$ функция Ψ будет удовлетворять уже уравнению (3.3). Рассматривая члены нулевого порядка по ζ в разложении первого уравнения соответствующей системы в окрестности точки ∞^+ , получаем, что

$$i(u_1 \xi_{10}^+)_{,t} = 4u_1 \xi_{14}^+ - 4u_1 \xi_{23}^+ + 4u_1 \xi_{10}^+ \xi_{21}^- \xi_{12}^+ - 2iu_1 \xi_{21}^+$$

или

$$\begin{aligned} & i(2\xi_{10}^+ \xi_{21}^- - 2\xi_{10}^+ \xi_{21}^- - 4i(\xi_{10}^+)^2 (\xi_{21}^-)^2) = \\ & = -i \frac{\xi_{10t}^+}{\xi_{10}^+} + 4 \frac{\xi_{14}^+}{\xi_{10}^+} - 4\xi_{23}^+ + 4\xi_{21}^- \xi_{12}^+ - 2i \frac{\xi_{10x}^+}{\xi_{10}^+} \xi_{21}^+. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Подставляя в правую часть этого соотношения выражение для ξ_{ij}^{\pm} через θ -функции и учитывая тождества (3.5), (3.6) и (3.7), можно прийти в результате вычислений, детали которых приведены в приложении 2, к равенству

$$\begin{aligned} & (2\xi_{10}^+ \xi_{21x}^- - 2\xi_{10x}^+ \xi_{21}^- - 4i(\xi_{10}^+)^2 (\xi_{21}^-)^2) = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\theta(q+z)}{\theta(q)} - iN_0 + 8i\gamma_1. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Формулы (3.9) и (3.5) доказывают совместность системы (3.4). Более того, они позволяют явно интегрировать эту систему:

$$u_1(x, t) = u_2^{-1}(x, t) = \frac{\theta(q+z)}{\theta(q)} \exp\{(iE_0 - 2i\delta)x -$$

$$-(iN_0 - 8i\gamma_1)t \}. \quad (3.10)$$

Собирая вместе формулы (3.1) и (3.10), получим формулы описывающие конечнозонное решение комплексифицированной системы МНШ.

Приложение I. Доказательство леммы I.

Используя в качестве локального параметра в окрестности ∞^+ переменную $\tau = \frac{1}{z}$ мы имеем при $z \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \ln \theta(q-U(\rho)) &= \ln \theta(q-z) + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \theta(q-U(\rho)) \Big|_{\rho=\infty^+} + \\ &+ \frac{1}{2z^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \ln \theta(q-U(\rho)) \Big|_{\rho=\infty^+} + \dots \end{aligned} \quad (III.1)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} &= -\frac{1}{\tau^2} \frac{\partial}{\partial z} = -z^2 \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} U_\nu(\rho) &= \rho^{-\frac{1}{z}} \cdot \sum \Gamma_\nu^k z^{n-k} \sim \frac{1}{z^2} (\Gamma_\nu^1 - \frac{1}{z} (\Gamma_\nu^2 + 2^{-1} \Gamma_\nu^1 \sum E_j) + \dots) \end{aligned}$$

то, в окрестности ∞^+ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \theta(q-U(\rho)) &= \sum \partial q_\nu \ln \theta(q-U(\rho)) \cdot \\ &\cdot (\Gamma_\nu^1 + \tau (\Gamma_\nu^2 + 2^{-1} \Gamma_\nu^1 \sum E_j) + O(\tau^2)). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \ln \theta(q-U(\rho)) &= \sum \partial q_\nu \partial q_\mu \ln \theta(q-U(\rho)) \cdot \\ &\cdot (\Gamma_\nu^1 + o(1)) \cdot (\Gamma_\mu^1 + o(1)) + \sum \partial q_\nu \ln \theta(q-U(\rho)) \cdot \\ &\cdot (\Gamma_\nu^2 + 2^{-1} \Gamma_\nu^1 \sum E_j + o(1)). \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \theta(q-U(\rho)) \Big|_{\rho=\infty^+} &= \sum \Gamma_\nu^1 \partial q_\nu \ln \theta(q-z) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q-z) \end{aligned} \quad (III.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \ln \theta(q-v) \Big|_{p=\infty} &= \sum \Gamma_\nu^{-1} \Gamma_\mu^{-1} \partial q_\nu \partial q_\mu \ln \theta(q-v) + \\ &+ \sum (\Gamma_\nu^2 + 2^{-1} \Gamma_\nu^{-1} \sum E_j) \partial q_\nu \ln \theta(q-v) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(q-v) + \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial t} \ln \theta(q-v). \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Подставляя (III.2) и (III.3) в (III.1) получаем утверждение леммы I.

Приложение 2. Вывод формулы (3.9)

Подставляя в правую часть (3.8) явные выражения для \sum_{ij}^{\pm} ,
имеем:

$$\begin{aligned} &i(2\xi_{10}^+ \xi_{21x}^- - 2\xi_{10x}^+ \xi_{21}^- - 4i(\xi_{10}^+)^2 (\xi_{21}^-)^2) = \\ &= N_0 - i \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\theta(q-v)}{\theta(q+v)} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\theta(q-v)}{\theta(q)} + I, \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

где

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(q-v) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(q) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q-v) \right)^2 + \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q) \right)^2 + (2E_0 + 4\gamma) \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\theta(q-v)}{\theta(q)} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q-v) \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q+v) - \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q+v) \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q) + \\ &- 2i\gamma \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\theta(q-v)}{\theta(q+v)} - 4\gamma_1 - 2\gamma^2 - 2E_0\gamma. \end{aligned}$$

Докажем, что

$$\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\theta(q-v)}{\theta(q)} = I + 8\gamma_1. \quad (\text{II.2})$$

В самом деле, из (3.6) имеем, что

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\theta(q-v)}{\theta(q)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(q) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q) \right)^2 - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(q-v) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q-v) \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q) \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q-v) - \\ &- 2i\gamma \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\theta(q-v)}{\theta(q)} - 2R_1 + 2\gamma^2 + 4\gamma_1. \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Вычитая из равенства (П2.2) равенство (П2.3), приходим к тождеству

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(q) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q) \right)^2 - 2i\gamma \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\theta(q)}{\theta(q+z)} + \\ & + (2E_0 + 4\gamma) \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\theta(q-z)}{\theta(q)} - \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q-z) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q+z) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q+z) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q) - \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta(q-z) - \\ & - 4\gamma^2 - 2E_0\gamma + 2R_1 = 0, \end{aligned}$$

которое, если учесть, что в силу (3.7) и (3.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(q) = & -2R_1 + 4\left(\gamma + \frac{E_0}{2} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\theta(q)}{\theta(q+z)}\right) \cdot \\ & \cdot \left(\gamma + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\theta(q)}{\theta(q-z)}\right), \end{aligned}$$

верно.

Выражая теперь I из (П2.2) и подставляя его в (П2.1), приходим к формуле (3.9).

Литература

1. Каур D.J., Newell A.C., J.Math.Phys., 1978, 19(4), p.798-801.
2. Прикарпатский А.К. Теор. и мат. физ., 1980, 45, № 2, с.171-181.
3. Чередник И.В. ДАН СССР, 1979, 246, с.575-578.
4. Герджиков V.S., Иванов M.I., Kulish R.P. preprint, JINR, № E2-12590, 1979, p.3-23.
5. Dodd R.K., Morris H.S., Physica Scripta, 1979, 20, № 3,4, p.151-161.
6. Ито А.Р. Теор. и мат. физ., 1981, 46, № 2, с.61-81.
7. Кричевер И.М. УМН, 1977, 32, вып.6., с.71-101.
8. Матвеев В.Б. Абелевы функции и солитоны. Препринт Бродовского университета (ИНР) № 373, 1976, с.1-98.