K. A. Mirzoev, N. N. Konechnaja, T. A. Safonova, R. N. Tagirova, On asymptotics of solutions to some linear differential equations, *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, 2017, Volume 141, 103–110

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 141 (2017). С. 103–110

УДК 517.928, 517.984.4

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2017 г. К. А. МИРЗОЕВ, Н. Н. КОНЕЧНАЯ,
Т. А. САФОНОВА, Р. Н. ТАГИРОВА

Аннотация. В работе найден главный член асимптотики на бесконечности некоторой фундаментальной системы решений уравнения $2n$-го порядка $l_{2n}[y] = \lambda y$, где выражение l_{2n} является произведением линейных дифференциальных выражений второго порядка, а λ — фиксированное комплексное число. При этом коэффициенты этих дифференциальных выражений второго порядка не обязательно гладкие, а имеют лишь определенный степенной рост на бесконечности. Полученные асимптотические формулы применяются к изучению вопроса об индексе дефекта дифференциальных операторов в случае, когда выражение l_{2n} является симметрическим (формально самосопряженным) дифференциальным выражением.

***Ключевые слова*:** главный член асимптотики, квазипроизводная, произведение квазидифференциальных выражений, дифференциальный оператор, индекс дефекта.

***AMS Subject Classification*:** 34E05, 47E05

1. Введение. Произведение квазидифференциальных выражений.

Пусть $I := [1, +\infty)$ и пусть $p(x), q(x), r(x)$ — такие вещественнозначные функции на I, что $p(x) \neq 0$ почти всюду на I, и $p^{-1}(:= 1/p)$, q, r локально интегрируемы по Лебегу на I (т.е. p^{-1}, q, $r \in L^1_{\text{loc}}(I)$). Как известно (см. [6, 7]), эти условия позволяют определить посредством матрицы

$$F = \begin{pmatrix} r & p^{-1} \\ q & -r \end{pmatrix}$$

квазипроизводную $y^{[1]}_F$ локально заданной абсолютно непрерывной на I функции y (т.е. $y \in AC_{\text{loc}}(I)$), полагая

$$y^{[1]}_F := p(y' - ry),$$

и при условии, что $y^{[1]}_F \in AC_{\text{loc}}(I)$, квазидифференциальное выражение, полагая

$$l_F[y](x) := -\Big(\big(y^{[1]}_F\big)' + ry^{[1]}_F - qy\Big)(x), \quad x \in I.$$

Таким образом, выражение l_F имеет вид

$$l_F[y](x) = \Big(-\big(p(y' - ry)\big)' - rp(y' - ry) + qy\Big)(x), \quad x \in I, \tag{1}$$

а его область определения $\mathcal{D}(l_F)$ есть множество всех таких функций y, что $y \in AC_{\text{loc}}(I)$ и $y^{[1]}_F \in AC_{\text{loc}}(I)$. При $y \in \mathcal{D}(l_F)$ функция $l_F[y] \in L^1_{\text{loc}}(I)$ определяется почти всюду по формуле (1).

Пусть $p_0(x)$ и $q_0(x)$ — такие вещественнозначные функции на I, что p_0, p_0^{-1}, $q_0^2 p_0^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(I)$. Положив $p = p_0$, $q = -q_0^2 p_0^{-1}$ и $r = q_0 p_0^{-1}$ в матрице F, легко установить, что квазипроизводная $y^{[1]}_F$ и квазидифференциальное выражение $l_F[y]$ принимают вид

$$y^{[1]}_F = p_0 y' - q_0 y, \quad l_F[y] = -(p_0 y')' + q_0' y, \tag{2}$$

Работа К. А. Мирзоева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект т 14-11-00754). Работа Т. А. Сафоновой выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (грант Президента РФ МК-3941.2015.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект т 14-01-00349).

где всюду производные понимаются в смысле теории распределений (см. [3]). Таким образом, определение дифференциального выражения второго порядка формулой (1) посредством матрицы F, с одной стороны, позволяет рассматривать дифференциальные выражения с негладкими коэффициентами и даже некоторые дифференциальные выражения с коэффициентами-распределениями. С другой стороны, как будет видно из дальнейшего, такой подход при изучении асимптотического поведения решений соответствующих дифференциальных уравнений второго порядка позволяет требовать лишь «правильное» поведение функции q_0, при этом функция q_0' может и сильно осциллировать.

Пусть теперь функции $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n, r_1, r_2, \dots, r_n$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $p(x), q(x)$ и $r(x)$, и пусть

$$F_i = \begin{pmatrix} r_i & p_i^{-1} \\ q_i & -r_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Символом $l_{F_i}[y]$ обозначим квазидифференциальное выражение второго порядка, построенное по матрице F_i так же, как квазидифференциальное выражение l_F построено по матрице F. Отметим, что выражения $l_{F_i}[y]$ вычисляются по формуле (1) с заменой функций p, q и r на функции p_i, q_i и r_i соответственно.

Рассмотрим далее матрицу

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} F_1 & M & O & O & \dots & O \\ O & F_2 & M & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & M \\ O & O & O & O & \dots & F_n \end{pmatrix},$$

где O — нулевая квадратная матрица второго порядка, а M — квадратная матрица того же порядка, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в левом нижнем углу, равного 1. Следуя общепринятой процедуре (см. [7]) при фиксированном $k \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$, определим квазипроизводные $y_{\mathcal{F}}^{[k]}$ заданной функции y, полагая, что $y_{\mathcal{F}}^{[0]} := y$, а функции $y_{\mathcal{F}}^{[j]}$ уже определены и являются локально абсолютно непрерывными на I при $j = 0, 1, \dots, k-1$. Из способа построения этих квазипроизводных и квазидифференциального выражения по матрице $\mathcal{F}$ следует, что

$$\begin{aligned}
y_{\mathcal{F}}^{[1]} &:= p_1\Big(\big(y_{\mathcal{F}}^{[0]}\big)' - r_1 y_{\mathcal{F}}^{[0]}\Big) = y_{F_1}^{[1]}, \\
y_{\mathcal{F}}^{[2]} &:= \Big(y_{\mathcal{F}}^{[1]}\Big)' + r_1 y_{\mathcal{F}}^{[1]} - q_1 y_{\mathcal{F}}^{[0]} = -l_{F_1}[y], \\
y_{\mathcal{F}}^{[3]} &:= p_2\Big(\big(y_{\mathcal{F}}^{[2]}\big)' - r_2 y_{\mathcal{F}}^{[2]}\Big) = -\big(l_{F_1}[y]\big)_{F_2}^{[1]}, \\
y_{\mathcal{F}}^{[4]} &:= \Big(y_{\mathcal{F}}^{[3]}\Big)' + r_2 y_{\mathcal{F}}^{[3]} - q_2 y_{\mathcal{F}}^{[2]} = -l_{F_2}\big[-l_{F_1}[y]\big] = l_{F_2}\big[l_{F_1}[y]\big], \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_{\mathcal{F}}^{[2n-1]} &:= p_n\Big(\big(y_{\mathcal{F}}^{[2n-2]}\big)' - r_n y_{\mathcal{F}}^{[2n-2]}\Big) = (-1)^{n-1}\Big(l_{F_{n-1}}\big[\dots\big[l_{F_2}[l_{F_1}[y]]\big]\dots\big]\Big)_{F_n}^{[1]}, \\
l_{\mathcal{F}}[y] &:= (-1)^n\Big(\big(y_{\mathcal{F}}^{[2n-1]}\big)' + r_n y_{\mathcal{F}}^{[2n-1]} - q_n y_{\mathcal{F}}^{[2n-2]}\Big) = l_{F_n}\big[\dots\big[l_{F_2}[l_{F_1}[y]]\big]\dots\big].
\end{aligned}$$

Таким образом, для квазидифференциального выражения $l_{\mathcal{F}}[y]$, порожденного матрицей $\mathcal{F}$, справедливо равенство

$$l_{\mathcal{F}}[y] = l_{F_n}\Big[\dots\big[l_{F_2}[l_{F_1}[y]]\big]\dots\Big], \tag{3}$$

а область определения $\mathcal{D}(l_{\mathcal{F}})$ этого выражения

$$\mathcal{D}(l_{\mathcal{F}}) = \Big\{ y \;\Big|\; y \in \mathcal{D}(l_{F_1}),\ l_{F_1}[y] \in \mathcal{D}(l_{F_2}),\ l_{F_2}[l_{F_1}[y]] \in \mathcal{D}(l_{F_3}),\ \dots,$$
$$l_{F_{n-1}}\Big[\dots\big[l_{F_2}[l_{F_1}[y]]\big]\dots\Big] \in \mathcal{D}(l_{F_n})\Big\}.$$

При определении произведения квазидифференциальных выражений мы следовали работе [6].

В настоящей работе найден главный член асимптотики на бесконечности некоторой фундаментальной системы решений уравнения

$$l_{\mathcal{F}}[y] = \lambda y, \quad \lambda \in C, \tag{4}$$

в случае, когда функции p_i^{-1}, q_i, r_i имеют вид

$$p_i^{-1} = x^{-2-\nu_i}\left(\frac{1}{a_{i1}} + r_{i1}(x)\right), \quad q_i = x^{\nu_i}\big(a_{i2} + r_{i2}(x)\big), \quad r_i = x^{-1}\big(a_{i3} + r_{i3}(x)\big), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{5}$$

где ν_i, a_{i1}, a_{i2} и a_{i3} — вещественные числа, причем $\nu_i > 0$ и $a_{i1} \neq 0$, а $r_{i1}(x)$, $r_{i2}(x)$ и $r_{i3}(x)$ — такие вещественные функции на I, что при некотором целом неотрицательном r, которое будет определено позже,

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{(\ln x)^r}{x}\big|r_{ij}(x)\big|dx < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Особо отметим, что условия p_i^{-1}, q_i, $r_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$, (5) и (6), обеспечивающие справедливость полученных в п. 2 настоящей работы асимптотических формул, не связаны с гладкостью коэффициентов выражения $l_{\mathcal{F}}[y]$.

Мы также изучаем вопрос о возможности дифференцирования полученных асимптотических формул и их применении к вопросу об индексе дефекта дифференциальных операторов в случае, когда квазидифференциальное выражение $l_{\mathcal{F}}[y]$ является симметрическим (формально самосопряженным).

Отметим, что в [1] были получены асимптотические формулы для фундаментальной системы решений уравнения вида (4) в случае, когда левая часть этого уравнения имеет дивергентную форму и является симметрическим квазидифференциальным выражением. Там же обсуждаются вопросы, связанные с историей рассматриваемой здесь задачи. Отметим также работу [4], в которой вкратце обсуждается метод, позволяющий получить асимптотические формулы для решений уравнений вида (4) в случае, когда выражение $l_{\mathcal{F}}[y]$ представляется как произведение двух квазидифференциальных выражений произвольного порядка.

2. Главный член асимптотики решений на бесконечности. Нам понадобится следующая лемма, доказанная в [8] (см. также [2, гл. III, задача 35, с. 120]).

Лемма 1. *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$U' = (A + R(t))U, \tag{7}$$

где матрица A постоянна, жорданова форма матрицы A имеет жордановы клетки J_k, $k \geqslant 1$, и максимальное число строк для всех клеток J_k, $k \geqslant 1$, равно $r + 1$. Предположим, что

$$\int\limits_1^{\infty} t^r \|R(t)\| dt < \infty. \tag{8}$$

Пусть z_j — характеристический корень A и пусть уравнение $y' = Ay$ имеет решения вида

$$e^{z_j t} t^k c + O(e^{z_j t} t^{k-1}),$$

где c — постоянный вектор. Тогда уравнение (7) имеет такое решение ϕ, что

$$\phi(t) = e^{z_j t} t^k (c + o(1)) \quad \text{при} \to +\infty.$$

Уравнение (4) равносильно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\boldsymbol{y}' = (\mathcal{F} - \Lambda)\boldsymbol{y}, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{y} = \left(y_{\mathcal{F}}^{[0]},\ y_{\mathcal{F}}^{[1]},\ y_{\mathcal{F}}^{[2]},\ \dots,\ y_{\mathcal{F}}^{[2n-1]}\right)^t$ (здесь и далее t — символ транспонирования), а Λ — квадратная матрица порядка $2n$, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в левом нижнем углу, равного λ. При этом равносильность уравнений понимается в том смысле, что если функция y

является решением (4), то вектор-функция $\boldsymbol{y} = \left(y_{\mathcal{F}}^{[0]},\ y_{\mathcal{F}}^{[1]},\ y_{\mathcal{F}}^{[2]},\ \ldots,\ y_{\mathcal{F}}^{[2n-1]}\right)^t$ является решением системы (9), и наоборот, если вектор-функция $\boldsymbol{y}$ — решение системы, то первая компонента $y = y_{\mathcal{F}}^{[0]}$ вектор-функции $\boldsymbol{y}$ является решением уравнения (4).

Далее, положив $\nu_0 := 0$, определим элементы d_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, диагональной матрицы $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_{2n})$ формулами

$$d_{2k-1} = \exp\left\{\left(\sum_{s=0}^{k-1}\nu_s - \frac{1}{2}\right)\ln x\right\}, \quad d_{2k} = \exp\left\{\left(\sum_{s=1}^{k}\nu_s + \frac{1}{2}\right)\ln x\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Сделаем замену $\boldsymbol{y} = DY$ в системе (9), где Y — новая неизвестная $2n$-компонентная вектор-функция. В результате система (9) преобразуется к виду

$$xY' = (A + B(x))Y, \tag{10}$$

где числовая матрица A и матрица-функция $B(x)$ определяются равенствами

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & M & O & O & \ldots & O \\ O & A_2 & M & O & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \ldots & M \\ O & O & O & O & \ldots & A_n \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} B_1 & O & O & \ldots & O & O \\ O & B_2 & O & \ldots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & B_{n-1} & O \\ \widetilde{\Lambda} & O & O & \ldots & O & B_n \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы A_i и B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеют вид

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i3} - \sum\limits_{s=0}^{i-1}\nu_s + \dfrac{1}{2} & a_{i1}^{-1} \\ a_{i2} & -a_{i3} - \sum\limits_{s=1}^{i}\nu_s - \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} r_{i3}(x) & r_{i1}(x) \\ r_{i2}(x) & -r_{i3}(x) \end{pmatrix},$$

$\widetilde{\Lambda}$ -— матрица второго порядка, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в левом нижнем углу, равного $\dfrac{-\lambda}{x^{\nu_1+\ldots+\nu_n}}$, а матрица M была определена выше. Из структуры матрицы A видно, что ее собственное значение определенной кратности является корнем многочлена

$$\mathfrak{F}_{2n}(z) = (-1)^n\prod_{i=1}^{n}\left(\left(a_{i3} + \frac{1}{2} - \sum_{s=0}^{i-1}\nu_s - z\right)\left(a_{i3} + \frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{i}\nu_s + z\right) + \frac{a_{i2}}{a_{i1}}\right)$$

той же кратности. Заметив это, нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть числа a_{ij}, ν_i и функции $r_{ij}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, 3$, таковы, что выполняются условия* (5) *и* (6). *Предположим, что $z_1, \ldots, z_q, z_{q+1}, \ldots, z_{q+j}$ — попарно различные корни многочлена $\mathfrak{F}_{2n}(z)$, причем $z_1, \ldots, z_q$ — однократные корни, а при $1 \leqslant p \leqslant j$ кратность корня z_{q+p} равна r_p. Тогда уравнение* (4) *имеет такую фундаментальную систему решений $y_k(x)$, что при $x \to +\infty$*

$$y_k(x) = c_k x^{z_k - 1/2}(1 + o(1)), \quad k = 1, \ldots, q, \tag{11}$$

и при $k = q, q + r_1, \ldots, q + r_1 + \ldots + r_{j-1}$

$$y_{k+i}(x) = c_{k+i}x^{z_{q+p}-1/2}(\ln x)^i(1 + o(1)), \quad i = 0, 1, \ldots, r_p - 1, \quad \text{если } k = q + r_1 + \ldots + r_{p-1}, \tag{12}$$

где c_k, c_{k+i} — некоторые ненулевые постоянные.

Доказательство. Структура матрицы A такова, что собственный вектор, соответствующий какому-либо собственному значению (т.е. корню многочлена $\mathfrak{F}_{2n}(z)$), однозначно определяется заданием своей первой координаты. Таким образом, геометрическая кратность любого собственного значения матрицы A равна единице, т.е. каждому собственному значению матрицы A соответствует только одна жорданова клетка в ее канонической форме. Поэтому размерность жордановой клетки в канонической форме матрицы A наибольшей размерности совпадает с кратностью собственного значения матрицы A наибольшей кратности. Пусть максимальная размерность жордановой клетки, встречающейся в канонической форме матрицы A, как и в лемме 1, равна $r+1$. Таким образом, $r+1$ — это кратность характеристического корня матрицы A наибольшей кратности, т.е. кратность корня многочлена $\mathfrak{F}_{2n}(z)$ наибольшей кратности.

Заменой $x = e^t$ система дифференциальных уравнений (10) приводится к виду (7), где $U(t) = Y(e^t)$ и $R(t) = B(e^t)$. Кроме того, если матрицы A и $B(x)$ удовлетворяют условию (6), то матрица $R(t)$ удовлетворяет условию (8) леммы 1.

Если теперь $z_1, z_2, \ldots, z_q$ — попарно различные простые характеристические корни матрицы A, то система уравнений с постоянными коэффициентами

$$U' = AU(t) \tag{13}$$

имеет решения $e^{z_k t} C_k$, где C_k — собственный вектор, соответствующий собственному значению z_k, $1 \leqslant k \leqslant q$. Применив далее лемму 1, видим, что система (7) имеет решения вида

$$e^{z_k t}(C_k + o(1)), \quad t \to +\infty.$$

Таким образом, сделав обратную замену $t = \ln x$, и учитывая преобразование $\boldsymbol{y} = DY$, получаем, что система (9) имеет решения, представимые в виде

$$x^{z_k} D(C_k + o(1)), \quad x \to +\infty.$$

Следовательно, первая координата этого решения — решение y_k уравнения (4) — представляется в виде (11), причем c_k — первая координата собственного вектора C_k — не равна нулю.

Пусть теперь z_{q+p} — характеристический корень матрицы A кратности r_p. Этому характеристическому корню также соответствует только одна жорданова клетка в каноническом разложении матрицы A, и поэтому размерность этой клетки равна r_p и не превосходит числа $r+1$. Отсюда следует, что система уравнений (13) имеет решения, представимые в виде

$$e^{z_{q+p} t} C_{q+p}, \quad e^{z_{q+p} t} t^k C_{q+p} + O(e^{z_{q+p} t} t^{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, r_p - 1,$$

где C_{q+p} — собственный вектор, соответствующий собственному значению z_{q+p}. Далее, применяя еще раз лемму 1 и рассуждая так же, как и в случае простого собственного значения, без труда можно установить, что уравнение (4) имеет ровно r_p решений, представимых в виде (12), соответствующих собственному значению z_{q+p}. Остается рассмотреть совокупность решений уравнения (4), представимых в виде (11) и (12), соответствующих всем собственным значениям матрицы A. Эта совокупность, очевидно, образует фундаментальную систему решений этого уравнения. Теорема доказана. □

Замечание 1. Пусть $y(x)$ — произвольное решение уравнения (4), асимптотическое поведение которого определяется теоремой 1. Изложенное выше доказательство этой теоремы позволяет получить главный член асимптотики на бесконечности и некоторых квазипроизводных $y^{[j]}(x)$ функции $y(x)$. Для этого компонента с номером $j+1$ соответствующего собственного вектора должна быть отлична от нуля.

Обозначим символом $\mathcal{L}^2(I)$ пространство классов эквивалентности всех комплекснозначных измеримых функций y, интегрируемых с квадратом модуля по Лебегу на I. Несложные вычисления показывают, что справедливо следующее следствие теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть λ — произвольное (вещественное или нет) число, а выражение $l_{\mathcal{F}}$ определено формулой* (3), *и пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда количество линейно независимых решений уравнения* (4), *принадлежащих пространству $\mathcal{L}^2(I)$, не зависит от числа λ и равно количеству корней многочлена $\mathfrak{F}_{2n}(z)$ (с учетом их кратности), лежащих в области* $\operatorname{Re} z < 0$.

Доказательство. Действительно, функции, для которых справедливы асимптотические формулы (11) или (12), принадлежат пространству $\mathcal{L}^2(I)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_1^{+\infty} \left|x^{2z-1}\right| (\ln x)^{2k}\, dx < \infty. \tag{14}$$

Так как
$$\left|x^{2z-1}\right| = x^{2\operatorname{Re} z-1},$$
то условие (14) выполняется тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} z < 0$ и не зависит от k. $\square$

3. Симметрические дифференциальные выражения и операторы.

3.1. Минимальный оператор. Дефектные числа. В этом разделе мы предполагаем, что выражение $l_{\mathcal{F}}[y]$ является симметрическим (формально самосопряженным) квазидифференциальным выражением. В таком случае, следуя хорошо известной процедуре (см., например, [5, гл. V, § 17] или [7, Appendix A]), определим минимальный замкнутый симметрический оператор L_0, порожденный выражением $l_{\mathcal{F}}[y]$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2(I)$. Обозначим через D_0' множество всех таких комплекснозначных финитных на I функций из $\mathcal{D}(l_{\mathcal{F}})$, что $l_{\mathcal{F}}[y] \in \mathcal{L}^2(I)$. В [7, c. 133] установлено, что множество D_0' является всюду плотным в $\mathcal{L}^2(I)$, а формула $L_0'y = l_{\mathcal{F}}[y]$ определяет на множестве D_0' симметрический (незамкнутый) оператор в $\mathcal{L}^2(I)$ с областью определения D_0'. Символами L_0 и D_0 обозначим замыкание этого оператора и его область определения соответственно.

Пусть, как и раньше, λ — комплексное число и $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Через R_λ и $R_{\overline{\lambda}}$ обозначим области значений операторов $L_0 - \lambda\mathcal{I}$ и $L_0 - \overline{\lambda}\mathcal{I}$ соответственно, а через $\mathcal{N}_\lambda$ и $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ — их ортогональные дополнения в пространстве $\mathcal{L}^2(I)$. Пространства $\mathcal{N}_\lambda$ и $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ называются *дефектными подпространствами*, соответствующими числам λ и $\overline{\lambda}$. Их размерности $\dim\mathcal{N}_\lambda$ и $\dim\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ одинаковы в верхней и нижней полуплоскостях. Введем обозначения
$$n_+ = \dim\mathcal{N}_\lambda, \quad n_- = \dim\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$$
при $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Пару (n_+, n_-) называют индексом дефекта оператора L_0. Известно (см., например, [5, гл. IV, § 14]), что числа n_+ и n_- совпадают с максимальным числом линейно независимых решений уравнения (4), принадлежащих пространству $\mathcal{L}^2(I)$, когда параметр λ берется из верхней ($\operatorname{Im}\lambda > 0$) или нижней ($\operatorname{Im}\lambda < 0$) полуплоскости соответственно, и удовлетворяют двойному неравенству $n \leqslant n_+, n_- \leqslant 2n$. При этом $n_+ = 2n$ тогда и только тогда, когда $n_- = 2n$. В случае $n_+ = n_- = 2n$ иногда говорят, что для выражения $l_{\mathcal{F}}[y]$ (оператора L_0) имеет место случай предельного круга, и он реализуется тогда и только тогда, когда все решения уравнения (4) при всех $\lambda \in C$ принадлежат пространству $\mathcal{L}_n^2(I)$. Если же $n_+ = n_- = n$, то говорят, что для выражения $l_{\mathcal{F}}[y]$ (оператора L_0) имеет место случай предельной точки.

3.2. Следствия теоремы 1. Примеры. Асимптотические формулы, полученные в теореме 1, можно применить к вопросам об индексе дефекта минимального симметрического оператора L_0 и о характере спектра его самосопряженных расширений.

Сначала рассмотрим случай, когда матрица $\mathcal{F}$ такова, что порожденное ею квазидифференциальное выражение имеет вид
$$l_{\mathcal{F}} = l_{F_1} \dots l_{F_{k-1}} l_{F_k} l_{F_{k-1}} \dots l_{F_1}. \tag{15}$$
В этом случае выражение $l_{\mathcal{F}}$ является симметрическим и, следовательно, порождает минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2(I)$, а соответствующий многочлен $\mathfrak{F}_{2n}(z)$ определяется равенством
$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{2n}(z) = (-1)\prod_{i=1}^{k}\left[\left(a_{i3} + \frac{1}{2} - \sum_{s=0}^{i-1}\nu_s - z\right)\left(a_{i3} + \frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{i}\nu_s + z\right) + \frac{a_{i2}}{a_{i1}}\right] \times \\ \times \prod_{i=1}^{k-1}\left[\left(a_{i3} + \frac{1}{2} - \nu_1 - \nu_k - 2\sum_{s=2}^{k-1}\nu_s + \sum_{s=2}^{i+1}\nu_s - \nu_{i+1} - z\right) \times \right. \\ \left. \times \left(a_{i3} + \frac{1}{2} + \nu_k + 2\sum_{s=1}^{k-1}\nu_s - \sum_{s=0}^{i-1}\nu_s + z\right) + \frac{a_{i2}}{a_{i1}}\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Далее, применяя следствие 1, получаем, что справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда дефектные числа* n_+ *и* n_- *оператора* L_0 *равны между собой и определяются как число корней многочлена* (16) (*с учетом их кратности*), *лежащих в области* $\operatorname{Re} z < 0$.

Теперь рассмотрим случай

$$l_{\mathcal{F}} = l_F^n, \tag{17}$$

где квазидифференциальное выражение l_F определено формулой (1). При этом мы предполагаем, что функции $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ имеют вид

$$p^{-1}(x) = x^{-2-\nu}\left(\frac{1}{a} + r_1(x)\right), \quad q(x) = x^{\nu}\big(b + r_2(x)\big), \quad r(x) = x^{-1}\big(c + r_3(x)\big), \tag{18}$$

где $\nu > 0$, $a \neq 0$, b и c — вещественные числа, а $r_1(x)$, $r_2(x)$ и $r_3(x)$ — такие вещественные функции на I, что при некотором целом неотрицательном r, определенном выше,

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^r}{x}\big|r_j(x)\big|dx < \infty, \quad j = 1, 2, 3. \tag{19}$$

Для минимального замкнутого симметрического оператора L_0, порожденного этим выражением в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2(I)$, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть выполняются условия* (18) *и* (19). *Тогда дефектные числа* n_+ *и* n_- *оператора* L_0, *порожденного выражением* (17), *равны между собой и определяются как число корней многочлена*

$$\mathfrak{F}_{2n}(z) = (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1}\left(\left(c + \frac{1}{2} - i\nu - z\right)\left(c + \frac{1}{2} + (i+1)\nu + z\right) + \frac{b}{a}\right) \tag{20}$$

(*с учетом их кратности*), *лежащих в области* $\operatorname{Re} z < 0$.

Замечание 2. Пусть выражение l_F определено формулой (2) и пусть

$$p_0^{-1}(x) = x^{-2-\nu}\left(\frac{1}{\alpha} + s_1(x)\right), \quad q_0(x) = x^{\nu+1}\big(\beta + s_2(x)\big),$$

где $\alpha \neq 0$ и β — вещественные числа, а $s_1(x)$ и $s_2(x)$ — вещественные функции. Предположим далее, что числа α, β и функции $s_1(x)$, $s_2(x)$ таковы, что функции p, q, r, определенные по формулам $p = p_0$, $q = -q_0^2 p_0^{-1}$ и $r = q_0 p_0^{-1}$, удовлетворяют условиям (18) и (19). Тогда для выражения $l_{\mathcal{F}} = l_F^n$, в частности, при $n = 2$, справедливо следствие 3. С другой стороны, элементарные вычисления показывают, что

$$l_{\mathcal{F}}[y] = l_F^2[y] = \big(p_0^2 y''\big)'' - \Big(\big(2p_0 q_0' - p_0 p_0''\big)y'\Big)' + \Big(\big(q_0'\big)^2 - \big(p_0 q_0''\big)'\Big)y.$$

Таким образом, следствие 3 позволяет определить индекс дефекта оператора, порожденного этим дифференциальным выражением, накладывая условия только на асимптотическое поведение на бесконечности функций p_0 и q_0. При этом коэффициенты $p_0\big(2q_0' - p_0''\big)$ и $\big(q_0'\big)^2 - \big(p_0 q_0''\big)'$ этого выражения, очевидно, могут сильно осциллировать.

Замечание 3. Несложно установить, что спектры любых самосопряженных расширений операторов, порожденных выражениями (15) и (17) в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2(I)$, являются дискретными.

Замечание 4. Число корней многочлена (20), лежащих в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} z < 0$), за счет выбора постоянных a, b, c и ν может быть сделано любым из чисел от n до $2n$ включительно. Этим путем легко построить примеры произвольного (допустимого) индекса дефекта для оператора L_0. В частности, полагая $a = 1, b = 0$ и $c = -1$, находим, что

$$z_k = -\frac{1}{2} - (k-1), \quad z_{n+k} = k\nu - \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Из этих формул следует, что индекс дефекта оператора L_0 равен (n, n), если $\nu > 1/2$, $(2n, 2n)$, если $0 < \nu < 1/2n$, и при $k = 1, 2, \ldots, n-1$ равен $(2n-k, 2n-k)$, если $\dfrac{1}{2(n-k+1)} < \nu < \dfrac{1}{2(n-k)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Долгих И. Н., Мирзоев К. А.* Индексы дефекта и спектр самосопряженных расширений некоторых классов дифференциальных операторов// Мат. сб. — 2006. — *197*, т 4. — С. 53–74.
2. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
3. *Мирзоев К. А.* Операторы Штурма—Лиувилля// Тр. Моск. мат. о-ва. — 2014. — *75*, т 2. — С. 335–359.
4. *Мирзоев К. А., Конечная Н. Н.* Об асимптотике решений одного класса линейных дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами// Мат. заметки. — 2016. — *100*, т 2. — С. 312–317.
5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
6. *Everitt W. N.* Linear ordinary quasi-differential expressions// Fourth Int. Symp. on Differential Equations and Differential Geometry, Beijing, 1986. — С. 1–28.
7. *Everitt W. N., Marcus L.* Boundary Value Problems and Sympletic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differentrial Operators/ Math. Surv. Monogr. — Am. Math. Soc., 1999. — *61*.
8. *Faedo S.* Proprieta asintotiche delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari// Ann. Mat. Pura Appl. — 1947. — *26*, т 4. — С. 207–215.

К. А. Мирзоев
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Н. Н. Конечная
Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск
E-mail: n.konechnaya@narfu.ru

Т. А. Сафонова
Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск
E-mail: tanya.strelkova@rambler.ru

Р. Н. Тагирова
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
E-mail: tagirova_rena@mail.ru