Я. И. Грановский, М. М. Маламуд, Операторы Штурма–Лиувилля с $W^{-1,1}$-матричными потенциалами, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2022, том 516, 20–39

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 516, 2022 г.

Я. И. Грановский, М. М. Маламуд

ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С $W^{-1,1}$-МАТРИЧНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

§1. Введение

Согласно классическому результату Титчмарша (см. монографию [8, гл. 5]), реализация Дирихле оператора Штурма–Лиувилля

$$-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 + q$$

с суммируемым потенциалом $q(\,\cdot\,) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ имеет неотрицательный лебеговский спектр постоянной кратности (см. Определение 2.6). На матричный случай этот результат был распространен разными методами в работах [16,17] и [21] (см. также монографию [10]). Отметим, что в [17] рассматривался также случай матричного оператора Шредингера с конечным числом точек дельта-взаимодействий, а в [16] результаты статьи [17] обобщены на случай конечных некомпактных квантовых графов.

Основным объектом настоящей работы является трехчленное дифференциальное матричное выражение Штурма-Лиувилля вида:

$$\mathcal{L}(P,Q,R)y := R^{-1}(x)\big(-(P(x)y')' + Q(x)y\big), \qquad y = (y_1,\dots,y_m)^\top. \tag{1.1}$$

Здесь матричные коэффициенты $P(\,\cdot\,)$ и $R(\,\cdot\,)$ предполагаются локально суммируемыми, а потенциальная матрица $Q(\,\cdot\,)$ – сингулярной и принадлежащей соболевскому пространству $W^{-1,1}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$. При этом операторы, порожденные выражением (1.1), рассматриваются в весовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+;R;\mathbb{C}^m)$.

Ключевые слова: операторы Шредингера, сингулярные потенциалы, регуляризация, дельта-взаимодействия, граничные тройки, функции Вейля, абсолютно непрерывный спектр.

Работа поддержана грантом Российского Научного фонда No. 20-61-46016.

Наш первый основной результат – обобщение теоремы Титчмарша на случай матричных сингулярных потенциалов. Именно, мы показываем, что при условии $Q(\,\cdot\,) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m})$ и некоторых необременительных условиях на $P(\,\cdot\,)$ и $R(\,\cdot\,)$, неотрицательный спектр реализации Дирихле L^D, как и любой другой самосопряженной реализации выражения $\mathcal{L}(P, Q, R)$, является лебеговским постоянной кратности m, ее сингулярный положительный спектр – пуст, а отрицательная часть реализации Дирихле L^D – компактна. Полученный результат значительно усиливает все предыдущие результаты в этом направлении.

При этом мы трактуем дифференциальное выражение (1.1), пользуясь регуляризацией, предложенной в работах [6, 7]. Впоследствии эта регуляризация использовалась для исследования спектральных свойств операторов вида (1.1) во многих работах (см., например, статью [14] и литературу в ней).

Весьма важный подкласс операторов, порожденных выражением (1.1) в $L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m)$, образуют операторы Шредингера с дельта-взаимодействиями, т.е. операторы вида:

$$\begin{gathered}\mathbf{H}_{X_+,\alpha,Q} := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q(\,\cdot\,) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q_1(\,\cdot\,) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta(\,\cdot\, - x_k), \\ X_+ = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Эти операторы являются объектами многочисленных исследований последних четырех десятилетий (см., например, монографии [11, 12], приложение [15], обзор [18] и литературу в них). Мы показываем, что для оператора (1.2) условие $Q \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m})$ эквивалентно условиям

$$Q_1(\,\cdot\,) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m}), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty. \tag{1.3}$$

Поэтому при этих условиях реализация Дирихле $\mathbf{H}^D$ выражения (1.2) имеет неотрицательный лебеговский спектр постоянной кратности m, а ее сингулярный положительный спектр – пуст.

Кроме того, мы исследуем спектральные свойства минимального оператора $L_{\min} = L := L(P, Q, R)$, порожденного выражением (1.1) на оси $\mathbb{R}$. Именно, мы показываем, что если минимальный оператор L в $L^2(\mathbb{R}; R; \mathbb{C}^m)$ самосопряжен, то при условии

$$Q(\,\cdot\,)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\,\cdot\,) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m})$$

и необременительных условиях на $P(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ и $R(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ неотрицательный спектр оператора L является лебеговским постоянной кратности $2m$. Подчеркнем обнаруженный здесь любопытный эффект: абсолютная непрерывность спектра "положительной части" оператора $L = L^*$ в $L^2(\mathbb{R}; R; \mathbb{C}^m)$ зависит лишь от поведения матричных коэффициентов $P(\cdot)$, $Q(\cdot)$ и $R(\cdot)$ на одной из полуосей $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}_-$ и не зависит от их поведения на дополнительной полуоси.

В частности, самосопряженный в $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^m)$ оператор Шредингера $\mathbf{H}_{X,\alpha,Q}$ вида:

$$\mathbf{H}_{X,\alpha,Q} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q(\cdot) := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q_1(\cdot) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \delta(\cdot - x_k),$$
$$X = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

имеет лебеговский спектр на $\overline{\mathbb{R}}_+$ постоянной кратности $2m$ при следующих условиях на "положительную (отрицательную) часть" потенциальной матрицы $Q(\cdot)$:

$$Q_1(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m}) \;\text{ и }\; \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$$
$$\left(Q_1(\cdot)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_-; \mathbb{C}^{m\times m}) \;\text{ и }\; \sum_{k=-\infty}^{-1} |\alpha_k| < \infty\right). \quad (1.5)$$

Эти условия совпадают с условиями (1.3), для $X_+ := \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ – "положительной части" множества X. И здесь результат зависит лишь от поведения потенциальной матрицы $Q(\cdot)$ на одной из полуосей $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}_-$ и не зависит от ее поведения на дополнительной полуоси.

Весьма частный случай этого результата получен ранее другим методом в работе K. Shubin Christ и G. Stolz [20]. Именно, считая в (1.4) $X = \mathbb{Z}$ и $Q_1(\cdot) = 0$, они доказали, что при условии $\sum_{k=-\infty}^{-1} |\alpha_k| < \infty$ положительная часть спектра скалярного ($m = 1$) гамильтониана $\mathbf{H}_{\mathbb{Z},\alpha,0}$ абсолютно непрерывна и заполняет положительную полуось $\mathbb{R}_+$.

Основным инструментом исследования является аппарат граничных троек и соответствующих функций Вейля (см. [2], [3]). Именно, мы показываем, что соответствующая (неортогональная) спектральная мера из интегрального представления функции Вейля исследуемого оператора абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Этот факт вместе с известным результатом о спектральной эквивалентности ортогональной и неортогональной спектральных мер самосопряженного оператора (см. [19]) позволяет получить упомянутые результаты об абсолютной непрерывности спектра самосопряженных реализаций выражения $\mathcal{L}(P, Q, R)$.

Обозначения. $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ := [0, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_- := (-\infty, 0]$, $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$, $\overline{\mathbb{C}}_+ := \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$; $\mathbb{C}^{m\times m}$ – множество всех матриц порядка m, I_m, $\mathbb{O}_m$ – единичная и нулевая матрицы порядка m, $|M| := \|M\|_{\mathbb{C}^{m\times m}}$ – норма матрицы $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$; $\rho(T)$ – резольвентное множество замкнутого оператора T, $E_T(\,\cdot\,)$ – спектральная мера оператора $T = T^*$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – множество ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, $\mathbf{1}_{\mathcal{K}}(\,\cdot\,)$ – индикаторная функция измеримого множества $\mathcal{K}$; $\sigma_{ac}(A)$, $\sigma_s(A)$, $\sigma_p(A)$ – абсолютно непрерывный, сингулярный и точечный спектр оператора A.

§2. Общий случай сингулярного $W^{-1,1}$-потенциала

Здесь мы регуляризуем дифференциальное выражение $\mathcal{L}(P, Q, R)$, получаем новое выражение $\mathcal{L} := \mathcal{L}(P, R, \sigma_1, \sigma_2)$, и исследуем свойства функции Вейля $M^D(z)$, соответствующей реализации Дирихле L^D выражения $\mathcal{L}$, а также ее предельное представление $M^D(\lambda + i0)$. Главная цель – показать, что неотрицательная часть произвольного самосопряженного расширения выражения $\mathcal{L}$ (в том числе и расширения L^D) является чисто абсолютно непрерывной с постоянной кратностью m. Также мы показываем, что отрицательная часть каждой самосопряженной реализации дифференциального выражения $\mathcal{L}$ – компактна.

2.1. Регуляризация.

2.1. Регуляризация. В данном разделе самосопряженность матричной функции $P(\,\cdot\,)$ понимается в стандартном смысле: $P(\,\cdot\,) = P(\,\cdot\,)^*$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Будем предполагать, что $P(\,\cdot\,)$ и $R(\,\cdot\,)$ являются обратимыми при п.в. $x \in \mathbb{R}_+$ и допускают представление:

$$
\begin{aligned}
&P(x) = (I_m + P_1(x))^{-1}, \quad P_1(\,\cdot\,) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m}),\\
&R(x) = I_m + R_1(x) = R(x)^* > 0 \text{ для п.в. } x \in \mathbb{R}_+,\\
&\qquad R_1(\,\cdot\,) \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m}).
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Кроме того, будем предполагать, что $Q(\,\cdot\,) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$, что согласно классическому определению класса $W^{-1,1}$ (см. [9], гл. 3), означает справедливость представления:

$$Q(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2'(x), \quad \text{в котором} \quad \sigma_j(\,\cdot\,) = \sigma_j(\,\cdot\,)^* \in L^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m}), \quad j \in \{1,2\}. \tag{2.2}$$

Здесь производная понимается в смысле теории распределений. Однако, всюду далее мы будем предполагать справедливость более сильного включения:

$$\sigma_2(\,\cdot\,) \in L^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m}) \cap L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m}). \tag{2.3}$$

Следуя [7], регуляризуем выражение (1.1) следующим образом:

$$\mathcal{L}(y) := R^{-1}(x)\Big(\sigma_1(x)y - \Big(y^{[1]}\Big)' - \sigma_2(x)P^{-1}(x)y^{[1]} - \sigma_2(x)P^{-1}(x)\sigma_2(x)y\Big), \tag{2.4}$$

где

$$y^{[1]} := P(x)y' - \sigma_2(x)y \tag{2.5}$$

называют квазипроизводной функции y. Регуляризация (2.4) дает строгую трактовку формального выражения (1.1). Отметим, что если $Q(\,\cdot\,)$ является гладкой функцией, то выражения (1.1) и (2.4) совпадают.

Далее введем матричное решение $Y(x,z)$ уравнения:

$$\mathcal{L}(Y(x,z)) = zY(x,z), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.6}$$

Пусть $C(\,\cdot\,,z)$ и $S(\,\cdot\,,z)$ – матричные решения уравнения (2.6), удовлетворяющие начальным условиям:

$$\begin{aligned} C(0,z) &= S^{[1]}(0,z) = I_m, \qquad z \in \mathbb{C}, \\ S(0,z) &= C^{[1]}(0,z) = \mathbb{O}_m, \qquad z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.2. Функции Вейля самосопряженных реализаций. В данном разделе всюду предполагается, что матричные коэффициенты $P(\,\cdot\,)$, $R(\,\cdot\,)$, $\sigma_1(\,\cdot\,)$, $\sigma_2(\,\cdot\,)$, входящие в выражение (2.4), удовлетворяют условиям (2.1)–(2.3). Обозначим через $AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ множество локально абсолютно непрерывных функций на $\mathbb{R}_+$, т.е. $f \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, если $f \in AC[0,b]$ при всех $b \in \mathbb{R}_+$. С дифференциальным выражением (2.4) мы связываем минимальный и максимальный операторы. Соответствующий минимальный оператор $A := L_{\min}$ задается выражением $\mathcal{L}$ на области:

$$\operatorname{dom}(A) := \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m) : \\ f, f^{[1]} \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m), \\ \mathcal{L}(f) \in L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m), \quad f(0) = f^{[1]}(0) = 0 \Big\}. \tag{2.8}$$

Сопряженный оператор A^* совпадает с максимальным оператором $L_{\max}$ и задается тем же выражением на области:

$$\operatorname{dom}(A^*) := \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m) : \\ f, f^{[1]} \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m), \quad \mathcal{L}(f) \in L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m) \Big\}. \tag{2.9}$$

Важно отметить, что оператор A является простым. Также отметим, что в случае $Q(\,\cdot\,) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m}) \Leftrightarrow \sigma_2(\,\cdot\,) \equiv 0$ определения минимального и максимального операторов совпадают с классическими определениями (см. [1], [5]), поскольку условие $f^{[1]} \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$ влечет $P(\,\cdot\,)f' \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$, и обратное тоже верно.

Далее, определим реализацию (расширение) Дирихле L^D выражения (2.4) следующим образом:

$$\operatorname{dom}(L^D) := \{ f \in \operatorname{dom}(A^*) : f(0) = 0 \}. \tag{2.10}$$

В следующей лемме мы вводим граничную тройку для оператора $A^* = L_{\max}$.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия* (2.1)–(2.3). *Тогда множество* $\Pi = \Pi^D := \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, *где*

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^m, \quad \Gamma_0 f = f(0), \quad \Gamma_1 f = f^{[1]}(0), \\ f = (f_1, \dots, f_m)^\top \in \operatorname{dom}(L_{\max}), \tag{2.11}$$

является граничной тройкой для оператора $A^* = L_{\max}$. *В данном случае* $A_0 = L^D$.

Предложение 2.2. *Пусть выполнены условия* (2.1)–(2.3). *Пусть* $M^D(\,\cdot\,)$ *– функция Вейля, соответствующая граничной тройке* (2.11). *Пусть также* $S(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ *и* $C(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ *– матричные решения уравнения* (2.6), *удовлетворяющие начальным условиям* (2.7). *Тогда:*

(i) *Функции* $S(x,z)$ *и* $C(x,z)$ *допускают представления:*

$$\begin{aligned} S(x,z) &= e^{-ix\sqrt{z}}\left\{-N_0(z)+o_m(1)\right\}, \quad x\to\infty, \quad z\in\overline{\mathbb{C}}_+\setminus\{0\}, \\ C(x,z) &= e^{-ix\sqrt{z}}\left\{N_1(z)+o_m(1)\right\}, \quad x\to\infty, \quad z\in\overline{\mathbb{C}}_+\setminus\{0\}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

в которых

$$\begin{aligned} N_0(z) = {} & \frac{I_m}{2i\sqrt{z}} + \frac{1}{2i\sqrt{z}}\int_0^\infty e^{it\sqrt{z}}\sigma_1(t)S(t,z)dt \\ & - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{it\sqrt{z}}(I_m+P_1(t))\sigma_2(t)S(t,z)dt \\ & - \frac{1}{2i\sqrt{z}}\int_0^\infty e^{it\sqrt{z}}\sigma_2(t)(I_m+P_1(t))\sigma_2(t)S(t,z)dt \\ & - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{it\sqrt{z}}P_1(t)S^{[1]}(t,z)dt \\ & - \frac{1}{2i\sqrt{z}}\int_0^\infty e^{it\sqrt{z}}\sigma_2(t)(I_m+P_1(t))S^{[1]}(t,z)dt \\ & - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{it\sqrt{z}}R_1'(t)S(t,z)dt \\ & - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{it\sqrt{z}}R_1(t)S'(t,z)dt, \quad z\in\overline{\mathbb{C}}_+\setminus\{0\}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

и

$$N_1(z) = \frac{1}{2}(I_m + R_1(0)) - \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} \sigma_1(t) C(t,z)\,dt$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} (I_m + P_1(t))\sigma_2(t) C(t,z)\,dt$$

$$+ \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} \sigma_2(t)(I_m + P_1(t))\sigma_2(t) C(t,z)\,dt$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} P_1(t) C^{[1]}(t,z)\,dt \tag{2.14}$$

$$+ \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} \sigma_2(t)(I_m + P_1(t)) C^{[1]}(t,z)\,dt$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} R_1'(t) C(t,z)\,dt$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} R_1(t) C'(t,z)\,dt, \qquad z \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}.$$

Функции $N_j(\,\cdot\,)$, $j \in \{0,1\}$, *корректно определены, непрерывны и голоморфны в* $\overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$.

(ii) *Справедливо соотношение:*

$$N_0(z) M^D(z) = N_1(z), \qquad z \in \mathbb{C}_+. \tag{2.15}$$

В следующей теореме мы исследуем функцию Вейля $M^D(\,\cdot\,)$, соответствующую реализации L^D. В частности, мы показываем, что на полуоси $\mathbb{R}_+$ часть соответствующей спектральной меры $\Sigma_{M^D}(\cdot)$ из интегрального представления (5.4) – абсолютно непрерывна, и указываем ее явный вид.

Теорема 2.3. *Пусть* $\mathcal{L}$ *– дифференциальное выражение вида* (2.4), *и выполнены условия* (2.1)–(2.3). *Тогда для функции Вейля* $M^D(\,\cdot\,)$, *соответствующей граничной тройке* (2.11), *справедливы следующие утверждения:*

(i) *Детерминант* $d_0(z) = \det(N_0(z))$ – *голоморфная в* $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ *функция и множество ее нулей* Λ_0 *является компактным, т.е. дискретным с единственной возможной предельной точкой ноль.*
(ii) *Функция Вейля допускает представление*

$$M^D(z) = N_0(z)^{-1} N_1(z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_0, \qquad \Lambda_0 = \{z \in \mathbb{C} : d_0(z) = 0\}. \tag{2.16}$$

(iii) *Некасательные предельные значения функции Вейля* $M^D(\lambda + i0) := \lim_{z \to\!\!\!\to \lambda} M^D(z)$ *существуют* при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$, *и справедливо равенство:*

$$M^D(\lambda) := M^D(\lambda + i0) = N_0(\lambda)^{-1} N_1(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+. \tag{2.17}$$

Кроме того, для мнимой части справедливо представление:

$$M_I^D(\lambda) := \operatorname{Im}(M^D(\lambda + i0)) = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \left(N_0(\lambda)^* N_0(\lambda)\right)^{-1}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+. \tag{2.18}$$

В частности, мнимая часть $M_I^D(\lambda)$ *положительно определена для каждого* $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
(iv) *Соответствующая спектральная мера* $\Sigma_{M^D}(\,\cdot\,)$ *функции Вейля* $M^D(\,\cdot\,)$ *на* $\mathbb{R}_+$ *имеет вид:*

$$\Sigma_{M^D}(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\lambda \frac{1}{\sqrt{t}} \left(N_0(t)^* N_0(t)\right)^{-1} dt, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+. \tag{2.19}$$

В частности, $\Sigma_{M^D}(\,\cdot\,)$ – *абсолютно непрерывна с* непрерывной на $\mathbb{R}_+$ плотностью $d\Sigma_{M^D}(\lambda)/d\lambda$ *максимального ранга, т.е.* $\operatorname{rank}(d\Sigma_{M^D}(\lambda)/d\lambda) = m$ *при всех* $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Для формулировки следующего основного результата раздела нам понадобится вспомогательный результат из теории граничных троек и соответствующих функций Вейля (см. Приложение).

Предложение 2.4 ([3], гл. 7). *Пусть* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *и* $\widetilde{\Pi} = \{\mathcal{H}, \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1\}$ – *две граничных тройки для оператора* A^*, *пусть также* $M(\,\cdot\,)$ *и* $\widetilde{M}(\,\cdot\,)$ – *соответствующие функции Вейля,* $\widetilde{A}_0 := A^* \upharpoonright \ker(\widetilde{\Gamma}_0)$, *и*

$$J := i \begin{pmatrix} 0 & -I_{\mathcal{H}} \\ I_{\mathcal{H}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) *Существует* $J_{\mathcal{H}}$*-унитарный оператор* $X = (X_{ij})_{i,j=1}^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, *т.е.* $X^* J X = J$, *такой что*

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\Gamma}_1 \\ \widetilde{\Gamma}_0 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

(ii) $0 \in \rho(X_{21}M(z)+X_{22})$ *при* $z \in \rho(\widetilde{A}_0)$. *Функции Вейля* $\widetilde{M}(\,\cdot\,)$ *и* $M(\,\cdot\,)$ *связаны следующим дробно-линейным преобразованием:*

$$\widetilde{M}(z) = X(M(z)) := (X_{11}M(z) + X_{12})(X_{21}M(z) + X_{22})^{-1}, \qquad z \in \rho(\widetilde{A}_0). \tag{2.21}$$

В следующем следствии мы исследуем функцию Вейля $\widetilde{M}(\,\cdot\,)$, соответствующую произвольному самосопряженному расширению $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ минимального оператора A. В частности, мы показываем, что на полуоси $\mathbb{R}_+$ часть соответствующей спектральной меры $\Sigma_{\widetilde{M}}(\,\cdot\,)$ из интегрального представления (5.4) – абсолютно непрерывна, и указываем ее явный вид.

Следствие 2.5. *Пусть выполнены условия* (2.1)–(2.3). *Пусть* $\widetilde{\Pi} = \{\mathcal{H}, \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1\}$ *– граничная тройка для оператора* A^*, *такая что* $\widetilde{A} = A^* \upharpoonright \ker(\widetilde{\Gamma}_0)$. *Тогда для функции Вейля, соответствующей граничной тройке* $\widetilde{\Pi}$, *справедливы следующие утверждения:*

(i) *Некасательный предел* $\widetilde{M}(\lambda+i0) := \lim_{z \to\!\!\!\succ \lambda} \widetilde{M}(z)$ *существует при всех* $\lambda > 0$, *и мнимая часть* $\widetilde{M_I}(\lambda) := \operatorname{Im}(\widetilde{M}(\lambda + i0))$ *положительно определена.*

(ii) *Соответствующая спектральная мера* $\Sigma_{\widetilde{M}}$ *функции Вейля* $M^D(\cdot)$ (*неортогональная спектральная мера оператора* $\widetilde{A}$) *имеет вид:*

$$\Sigma_{\widetilde{M}}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} (M^D(t)^* X_{21}^* + X_{22}^*)^{-1} M_I^D(t) (X_{21}M^D(t) + X_{22})^{-1} dt, \qquad \lambda > 0, \tag{2.22}$$

в котором функция Вейля $M^D(\,\cdot\,)$ *и ее мнимая часть* $M_I^D(\,\cdot\,)$ *задаются равенствами* (2.17) *и* (2.18) *соответственно. В частности,* $\Sigma_{\widetilde{M}}(\,\cdot\,)$ *является абсолютно непрерывной с* непрерывной на $\mathbb{R}_+$ плотностью $d\Sigma_{\widetilde{M}}(\lambda)/d\lambda$ *максимального ранга, т.е.* $\operatorname{rank}(d\Sigma_{\widetilde{M}}(\lambda)/d\lambda) = m$ *при всех* $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Определение 2.6. Пусть $\mathcal{K}$ – измеримое подмножество $\mathbb{R}$, $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}$. Говорят, что самосопряженный оператор T в $\mathfrak{H}$ с разложением единицы $E_T(\,\cdot\,)$ имеет лебеговский спектр кратности d на $\mathcal{K}$, если его часть $TE_T(\mathcal{K})$ унитарно эквивалентна оператору умножения на λ в пространстве $\bigoplus_1^d L^2(\mathcal{K},\mu)$, где μ – мера Лебега.

В следующей теореме изучаются спектральные свойства произвольного самосопряженного расширения $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ оператора A. Для этого воспользуемся параметризацией (5.2) (см. Приложение).

Теорема 2.7. *Пусть выполнены условия* (2.1)–(2.3), $\Pi^D = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– граничная тройка вида* (2.11), *и* $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ *– произвольное самосопряженное расширение минимального оператора* A *вида* (2.8). *Тогда существуют матрицы* $C, D \in \mathbb{C}^{m\times m}$, *такие что*

$$\begin{aligned} \widetilde{A} = \widetilde{A}^* = A_{C,D} = A^* \upharpoonright \ker(D\Gamma_1 - C\Gamma_0),\\ CD^* = DC^*, \qquad 0 \in \rho(CC^* + DD^*), \end{aligned} \tag{2.23}$$

и справедливы следующие утверждения:
(i) *Неотрицательная часть* $E_{\widetilde{A}}(\overline{\mathbb{R}}_+)\widetilde{A}$ *оператора* $\widetilde{A}$ *имеет лебеговский спектр постоянной кратности* m, *т.е.*

$$\sigma_{ac}(\widetilde{A}) = [0,\infty), \quad \sigma_s(\widetilde{A}) \cap \mathbb{R}_+ = \varnothing \qquad u \quad N_{\widetilde{A}^{ac}}(t) = m, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Более того, положительные части $E_{\widetilde{A}}(\mathbb{R}_+)\widetilde{A}$ *и* $E_{L^D}(\mathbb{R}_+)L^D$ *операторов* $\widetilde{A}$ *и* L^D *унитарно эквивалентны.*
(ii) *Детерминант* $d_{C,D}(z) = \det\left(CN_0(\overline{z})^* - DN_1(\overline{z})^*\right)$ *является голоморфной в* $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ *функцией.*
(iii) *Оператор* $\widetilde{A}$ *полуограничен снизу и его отрицательный спектр совпадает с замыканием множества нулей функции* $d_{C,D}(z)$, *т.е.*

$$\sigma_{pp}(\widetilde{A}) = \sigma_{pp}(\widetilde{A}) \cap \overline{\mathbb{R}}_- = \Lambda_{C,D}, \quad \Lambda_{C,D} = \{z \in \mathbb{C} : d_{C,D}(z) = 0\}.$$

В частности, отрицательная часть $E_{\widetilde{A}}(\mathbb{R}_-)\widetilde{A}$ *оператора* $\widetilde{A}$ *компактна, т.е. ее спектр либо конечен, либо дискретен с единственной предельной точкой ноль.*

Поясним, что утверждение (i) Теоремы 2.7 вытекает из формулы (2.22) в силу отмеченного во введении результата о спектральной эквивалентности ортогональной и неортогональной спектральных мер $E_{\widetilde{A}}(\,\cdot\,)$ и $\Sigma_{\widetilde{M}}(\,\cdot\,)$ самосопряженной реализации $\widetilde{A}$ простого симметрического оператора A (см. [19]).

Замечание 2.8 ([16])**.** В условиях Теоремы 2.7 ноль всегда принадлежит абсолютно непрерывному спектру. Это не исключает включения $0 \in \sigma_p(\widetilde{A})$, т.е. ноль может быть и собственным значением кратности $k \leqslant m$. Например, это так для оператора, ассоциированного с выражением

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q,\\
&Q(x) := -\operatorname{diag}\left\{(x+a_1)^{-2}, \ldots, (x+a_m)^{-2}\right\} \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m}), a_j > 0,\\
&\qquad j \in \{1, \ldots, m\},
\end{aligned}$$

и граничным условием

$$y'(0) = Ty(0), \quad T := -\operatorname{diag}\{a_1, \ldots, a_m\}.$$

§3. Операторы Шредингера с дельта-взаимодействиями на полуоси

Здесь мы рассматриваем дифференциальное выражение Штурма-Лиувилля вида (1.1), предполагая, что для матричных коэффициентов $P(\,\cdot\,)$, $R(\,\cdot\,) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m})$ выполняются условия (2.1), а потенциальная матрица $Q(\,\cdot\,)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&Q(x) := Q_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta(x - x_k),\\
&\{x_k\}_1^{\infty} \subset \mathbb{R}_+, \quad \alpha_k = \alpha_k^* \in \mathbb{C}^{m\times m}, \qquad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Эти операторы при $P(\,\cdot\,) = R(\,\cdot\,) = I_m$ являются объектами многочисленных исследований последних четырех десятилетий (см., например, монографии [11, 12], приложение [15], обзор [18] и литературу в них).

Как и раньше, с выражением $\mathcal{L}(P, Q, R)$ будем ассоциировать минимальный симметрический оператор $A := L_{\min}$ в весовом гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m)$.

Напомним, что $|\alpha_k| := ||\alpha_k||_{\mathbb{C}^{m\times m}}$ обозначает матричную норму.

Предложение 3.1. *Пусть* $L^D := L^D(P, Q, R)$ *– реализация Дирихле выражения* (1.1) *в* $L^2(\mathbb{R}_+; R; \mathbb{C}^m)$. *Пусть также*

$$Q_1(\,\cdot\,) = Q_1(\,\cdot\,)^* \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m}) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty. \tag{3.2}$$

Тогда оператор L^D является самосопряженным, а его неотрицательная часть имеет лебеговский спектр постоянной кратности m, т.е.

$$\sigma_{ac}(L^D) = [0,\infty), \quad \sigma_s(L^D) \cap \mathbb{R}_+ = \varnothing \quad \textit{и} \quad N_{L^D,ac}(t) = m, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Кроме того, отрицательная часть $E_{L^D}(\mathbb{R}_-)L^D$ оператора L^D компактна.

Набросок доказательства. Применим Теорему 2.7 с $\widetilde{A} = L^D$. Для этого достаточно показать, что при условиях (3.2) потенциальная матрица $Q(\,\cdot\,)$ принадлежит классу $W^{-1,1}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$. Вначале проверим, что $\delta(\,\cdot\,)$ допускает следующее представление:

$$\delta(x) = \frac{2x\theta(x)}{(x^2+1)^2} + \left(\frac{\theta(x)}{x^2+1}\right)' =: q_1(x) + q_2'(x), \tag{3.3}$$

в котором $\theta(\,\cdot\,)$ – стандартная функция Хевисайда. Действительно, для произвольной функции $\varphi(\,\cdot\,) \in C_0^\infty$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
\left(\left(\frac{\theta(x)}{x^2+1}\right)', \varphi(x)\right) &= -\left(\theta(x), \frac{\varphi'(x)}{x^2+1}\right) \\
&= -\left(\theta(x), \frac{2x\varphi(x)}{(x^2+1)^2}\right) - \left(\theta(x), \left(\frac{\varphi(x)}{x^2+1}\right)'\right) \\
&= -\left(\theta(x), \frac{2x\varphi(x)}{(x^2+1)^2}\right) + \left(\delta(x), \frac{\varphi(x)}{x^2+1}\right) \\
&= -\left(\frac{2x\theta(x)}{(x^2+1)^2}, \varphi(x)\right) + (\delta(x), \varphi(x)).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Тождество (3.3) немедленно следует из (3.4) с $q_2(x) = (x^2+1)^{-1}\theta(x)$.

Ясно, что $q_1(\,\cdot\,) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и $q_2(\,\cdot\,) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ для всех $p \in [1,\infty]$. Поэтому включение $\delta(\,\cdot\,) \in W^{-1,p}(\mathbb{R}_+)$ следует из описания класса $W^{-1,p}(\mathbb{R}_+)$ (см. [9], гл. 3). В свою очередь, представление (3.3) с учетом условий (3.2) дает:

$$\begin{aligned}
Q_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta(x-x_k) &= Q_1(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{(x-x_k)\theta(x-x_k)}{\left((x-x_k)^2+1\right)^2} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{\theta(x-x_k)}{(x-x_k)^2+1}\right)' =: \sigma_1(x) + \sigma_2'(x).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Теперь несложно показать, что $\sigma_1(\,\cdot\,) \in L^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$, а $\sigma_2(\,\cdot\,) \in L^p(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$, $p \in [1,\infty]$. Поэтому, в соответствии с описанием (2.2), $Q(\,\cdot\,) = \sigma_1(\,\cdot\,) + \sigma_2'(\,\cdot\,) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$. Применение Теоремы 2.3 завершает доказательство.

Далее, применим Предложение 3.1 к дифференциальному выражению Шредингера с дельта-взаимодействиями, считая в (1.1) $P(\,\cdot\,) = R(\,\cdot\,) = I_m$, т.е. – к выражению

$$\mathbf{H}_{X_+,\alpha,Q} := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q(\,\cdot\,) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q_1(\,\cdot\,) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta(\,\cdot - x_k). \tag{3.6}$$

Здесь $X_+ = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ и $\alpha_k = \alpha_k^* \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $k \in \mathbb{N}$.

Следствие 3.2. *Пусть выполнены условия* (3.2). *Тогда реализация Дирихле* $\mathbf{H}^D$ *выражения* (3.6) *является самосопряженной, а ее неотрицательная часть* $\mathbf{E}_{\mathbf{H}^D}(\overline{\mathbb{R}}_+)\mathbf{H}^D$ *имеет лебеговский спектр постоянной кратности* m, *т.е.*

$$\sigma_{ac}(\mathbf{H}^D) = [0,\infty), \quad \sigma_s(\mathbf{H}^D) \cap \mathbb{R}_+ = \varnothing, \quad N_{\mathbf{H}^{D,ac}}(t) = m, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{3.7}$$

Кроме того, отрицательная часть $\mathbf{E}_{\mathbf{H}^D}(\mathbb{R}_-)\mathbf{H}^D$ *оператора* $\mathbf{H}^D$ *компактна.*

Замечание 3.3. В случае скалярного оператора Шредингера с суммируемым потенциалом $Q_1(\cdot) = q(\cdot) = \overline{q(\cdot)} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ без точек взаимодействия ($\alpha_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$) Следствие 3.2 было доказано Титчмаршем (см. [8, гл. 5]). Этот результат был обобщен на случай суммируемого матричного потенциала $Q_1(\,\cdot\,) \in L^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$ и конечного числа точек взаимодействий в [17], а в случае $Q_1(\,\cdot\,) \in L^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$, но без точек взаимодействий ($\alpha_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$), независимо и другим методом – в работе [21] (см. также монографию [10]). На случай конечных некомпактных квантовых графов с суммируемыми матричными потенциалами этот результат был распространен в [16].

§4. Операторы Шредингера с дельта-взаимодействиями на оси

В этом параграфе мы исследуем абсолютную непрерывность спектра минимального оператора Штурма-Лиувилля $L := L_{\min}(P,Q,R)$, порожденного выражением (1.1) на прямой $\mathbb{R}$. Для этого заметим, что с дифференциальным выражением $\mathcal{L}(P,Q,R)$ естественно связаны минимальные операторы $L_{\pm,\min}$, порождаемые дифференциальными выражениями $\mathcal{L}(P,Q,R)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_\pm}$ на полуосях $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ соответственно. Здесь, как и прежде, $\mathbf{1}_E(\,\cdot\,)$ – индикатор измеримого множества E.

Здесь мы ограничимся рассмотрением потенциальных матриц $Q(\,\cdot\,)$ вида

$$Q(x) := Q_1(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\delta(x-x_k), \quad Q_1(\,\cdot\,) = Q_1(\,\cdot\,)^* \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{C}^{m\times m}),$$
$$\alpha_k = \alpha_k^* \in \mathbb{C}^{m\times m}, \quad (4.1)$$

хотя основной результат (Теорема 4.1) остается верным и при общем условии $Q(\,\cdot\,)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\,\cdot\,) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$.

В следующей теореме мы исследуем абсолютно непрерывный спектр оператора $L = L_{\min}(P,Q,R)$ на оси $\mathbb{R}$, считая его самосопряженным, $L = L^*$, и предполагая выполнение на полуоси $\mathbb{R}_+$ условий Предложения 3.1.

Теорема 4.1. *Пусть минимальный оператор Шредингера*

$$L = L_{\min}(P,Q,R),$$

ассоциированный с выражением (1.1) *в* $L^2(\mathbb{R};R;\mathbb{C}^m)$, *– самосопряжен,* $L = L^*$. *Пусть также* $P(\,\cdot\,),\ R(\,\cdot\,) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{C}^{m\times m})$, *и для матричных функций* $P(\,\cdot\,)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\,\cdot\,)$ *и* $R(\,\cdot\,)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+(\,\cdot\,)}$ *выполнены условия* (2.1). *Если потенциальная матрица* $Q(\,\cdot\,)$ *вида* (4.1) *удовлетворяет условиям:*

$$Q_1(\,\cdot\,)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\,\cdot\,) \in L^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m}) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k| < \infty, \qquad (4.2)$$

то неотрицательная часть $E_L(\overline{\mathbb{R}}_+)L$ *оператора* L *имеет лебеговский спектр постоянной кратности* $2m$, *т.е.*

$$\sigma_{ac}(L)\cap\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty), \quad \sigma_s(L)\cap\mathbb{R}_+ = \varnothing \quad \text{и} \qquad N_{L^{ac}}(t) = 2m, \quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+.$$

Для доказательства Теоремы 4.1 мы ассоциируем с дифференциальным выражением $\mathcal{L}(P,Q,R)$ минимальные операторы $L_{\pm,\min}$, порождаемые дифференциальными выражениями $\mathcal{L}(P,Q,R)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_\pm}$ на полуосях $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ соответственно. Это позволяет рассматривать оператор $L = L^*$ в качестве расширения оператора $A = L_{+,\min}\oplus L_{-,\min}$ и исследовать его функцию Вейля, используя вид функции Вейля $M^D(\,\cdot\,)$ реализации Дирихле L^D из Теоремы 2.3 (iii) (см. формулы

(2.17)–(2.18)). Также существенно используются некоторые результаты работы [4].

Замечание 4.2.
(i) Заключение Теоремы 4.1 остается верным, если условия (4.2) заменить следующим:

$$Q(\,\cdot\,)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\,\cdot\,) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m}). \tag{4.3}$$

(ii) Более того, Теорема 4.1 остается верной, если условия (2.1) и (4.2) (или условие (4.3)) на полуоси $\mathbb{R}_+$ заменить аналогичными условиями на отрицательной полуоси $\mathbb{R}_-$.

Теперь сформулируем Теорему 4.1 в частном случае, предполагая, что $P(\,\cdot\,) = R(\,\cdot\,) = I_m$. Рассмотрим дифференциальное выражение Шредингера на оси следующего вида:

$$\begin{gathered} \mathbf{H}_{X,\alpha,Q} := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q_1(\,\cdot\,) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \delta(\,\cdot\, - x_k), \\ Q_1(\,\cdot\,) = Q_1(\,\cdot\,)^* \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{C}^{m\times m}), \end{gathered} \tag{4.4}$$

где $X = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ и $\alpha_k = \alpha_k^* \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $\mathbf{H} := \mathbf{H}_{\min}$ – минимальный оператор, ассоциированный в $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ с дифференциальным выражением (4.4).

Следствие 4.3. *Пусть минимальный оператор, ассоциированный в* $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^m)$ *с дифференциальным выражением* (4.4)*, самосопряжен,* $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$*, и выполнены условия* (4.2). *Тогда неотрицательная часть* $\mathbf{E}_{\mathbf{H}}(\overline{\mathbb{R}}_+)\mathbf{H}$ *оператора* $\mathbf{H}$ *имеет лебеговский спектр постоянной кратности* $2m$*, т.е.*

$$\sigma_{ac}(\mathbf{H})\cap\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty), \quad \sigma_s(\mathbf{H})\cap\mathbb{R}_+ = \varnothing, \quad N_{\mathbf{H}^{ac}}(t) = 2m, \quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+. \tag{4.5}$$

Более того, заключения (4.5) *остаются в силе при замене условий* (4.2) *аналогичными условиями на левой полуоси.*

Замечание 4.4. В скалярном случае ($m = 1$) весьма частный случай этого результата был получен в работе [20]. Именно, применяя другой метод, C. Shubin Christ и G. Stolz доказали Следствие 4.3 для скалярного гамильтониана $\mathbf{H}_{\mathbb{Z},\alpha,0}$, т.е. считая $X = \mathbb{Z}$, $Q_1(\,\cdot\,) = 0$, и предполагая выполненным условие $\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} |\alpha_k| < \infty$ (см. [20, Теорема 5]).

§5. Приложение: граничные тройки, функция Вейля, и параметризация

Здесь мы приведем некоторые факты из теории граничных троек и соответствующих функций Вейля, используемые в основном тексте.

Пусть A – плотно заданный замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}_z = \mathfrak{N}_z(A) := \mathfrak{H} \ominus \operatorname{ran}(A - z^*) = \ker(A^* - z)$, $z \in \mathbb{C}_\pm$ – его *дефектные подпространства*, а $\mathrm{n}_\pm(A) := \dim \mathfrak{N}_{\pm \mathrm{i}}(A)$ – его *индексы дефекта*. Пусть также $\mathrm{n}_+(A) = \mathrm{n}_-(A) \leqslant \infty$.

Определение 5.1 ([2], [3], гл. 7)**.** Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, а Γ_0 и Γ_1 – линейные отображения из $\operatorname{dom}(A^*)$ в $\mathcal{H}$, называется граничной тройкой оператора A^*, если:

(i) справедливо тождество Грина

$$(A^* f, g) - (f, A^* g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \operatorname{dom}(A^*); \tag{5.1}$$

(ii) отображение $\Gamma : f \mapsto \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\}$ из $\operatorname{dom}(A^*)$ в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ сюръективно.

Граничная тройка для оператора A^* существует, лишь при условии $\mathrm{n}_+(A) = \mathrm{n}_-(A)$. В этом случае $\mathrm{n}_\pm(A) = \dim \mathcal{H}$ и $\ker(\Gamma) = \ker(\Gamma_0) \cap \ker(\Gamma_1) = \operatorname{dom}(A)$. Понятие граничной тройки позволяет параметризовать все собственные расширения оператора A. В частности, справедлив следующий результат.

Предложение 5.2. *Пусть A – замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ с $\mathrm{n}_\pm(A) = m < \infty$. Пусть также $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка оператора A^*. Тогда множество всех самосопряженных расширений оператора A параметризуется следующим образом:*

$$\begin{gathered} \widetilde{A} = \widetilde{A}^* = A_{C,D} = A^* \upharpoonright \ker(D\Gamma_1 - C\Gamma_0), \\ CD^* = DC^*, \quad 0 \in \rho(CC^* + DD^*), \quad C, D \in \mathbb{C}^{m \times m}. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Определение 5.3 ([13])**.** Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для A^*. Функцией Вейля, соответствующей граничной тройке Π, называют оператор-функцию $M(\,\cdot\,)$, определяемую равенством

$$\Gamma_1 f_z = M(z) \Gamma_0 f_z, \quad f_z \in \mathfrak{N}_z, \quad z \in \rho(A_0). \tag{5.3}$$

Функция Вейля определена корректно и является $R[\mathcal{H}]$-функцией: $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} M(z) > 0$ и $M(\bar{z}) = M^*(z)$. Кроме того, $0 \in \rho(\operatorname{Im} M(i))$ (см. [13]).

Пусть A – простой симметрический оператор в $\mathfrak{H}$. Тогда функция Вейля $M(\,\cdot\,)$ определяет пару $\{A, A_0\}$ однозначно с точностью до унитарной эквивалентности (см. [13]).

Хорошо известно, что $M(\,\cdot\,)$ допускает интегральное представление (см., напр. [1]):

$$M(z) = C_0 + C_1 z + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\Sigma_M(t), \quad z \in \rho(A_0). \tag{5.4}$$

Здесь $\Sigma_M(\,\cdot\,)$ является операторнозначной борелевской мерой на $\mathbb{R}$, удовлетворяющей соотношение $\int\limits_{\mathbb{R}}(1+t^2)^{-1}d\Sigma_M(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, и $C_j = C_j^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $j \in \{0,1\}$, где $C_1 \geqslant 0$. Интеграл в (5.4) понимается в смысле сильной сходимости. Отметим, что $C_1 = 0$ в (5.4), если A является плотно определенным (см. [13]).

Список литературы

1. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* Т. II — Харьков, Вища школа (1978), 288 с.
2. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.* — К.: Наук. думка (1984), 284 с.
3. В. А. Деркач, М. М. Маламуд, *Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи* — К.: Институт математики НАН Украины (2017), 573 с.
4. М. М. Маламуд, *О сингулярном спектре конечномерных возмущений (к теории Ароншайна-Донохью-Каца)*, ДАН, **487**(4) (2019), 365–369.
5. М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы.* — М.: Наука (1969), 528 с.
6. А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами.* — Матем. заметки, **66**(6) (1999), 897–912.
7. А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями.* — Труды Московского математического общества, **64** (2003), 159 – 212.
8. Э. Ч. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.* Т. I — М.: Издательство иностранной литературы (1960), 277 с.
9. R. A. Adams, J. J. F. Fournier, *Sobolev spaces*, Academic Press, an imprint of Elsevier Science, Vancouver, 2003.
10. T. Aktosun, R. Weder, *Direct and Inverse Scattering for the Matrix Schrödinger Equation.* — Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag, New York, **203** (2020), 637pp.
11. S. Albeverio., F. Gesztesy., R. Hoegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics.* — AMS Chelsea Publ. (2005).

12. S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular perturbations of differential operators and Schrödinger type operators.* — Cambridge Univ. Press (2000).
13. V. Derkach, M. Malamud, *Generalised resolvents and the boundary value problems for Hermitian Operators with gaps.* — J. Funct. Anal., **95** (1991), 1–95.
14. J. Eckhardt, F. Gesztesy, R. Nichols, G. Teschl, *Weyl-Titchmarsh theory for Sturm-Liouville operators with distribution potentials.* — J. Opuscula Math., **33**(3) (2013), 467–563.
15. P. Exner, Appendix in [11]. *Solvable models in quantum mechanics* by S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden. Sec.Edition, AMS Chelsea Publ. (2005).
16. Ya. Granovskyi, M. Malamud, H. Neidhardt, *Non-compact qiantum graphs with summable matrix potentials.* — Ann. Henri Poincaré **22** (2021), 1–47.
17. Ya. Granovskyi, M. Malamud, H. Neidhardt, A. Posilicano, *To the spectral theory of vector-valued Sturm-Liouville operators with summable potentials and point interactions.* — Func. Anal. and Oper. Theory for Quantum Phys. Pavel Exner Anniversary V. EMS Series of Congress Reports **12** (2017), 271–313.
18. A. Kostenko, M. Malamud, *1–D Schrödinger operators with local point interactions: a review* — In Spectral Analysis, Differential Equations, and Mathematical Physics, H. Holden et al. (eds), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Amer. Math. Soc., **87** (2013), 235–262.
19. M. Malamud, H. Neidhardt, *On the unitary equivalence of absolutely continuous parts of self-adjoint extensions.* — J. Funct. Anal., **260**(3) (2011), 613–638.
20. C. Shubin Christ, G. Stolz, *Spectral theory of one-dimensional Schrödinger operators with point interactions.* — J. Math. Anal. Appl., **184** (1994), 491–516.
21. R. Weder, *Scattering theory for the matrix Schrödinger operator on the half line with general boundary conditions.* — J. Math. Phys. **56**, 092103 (2015); `doi:10.1063/1.4930293`; Erratum J. Math. Phys., **60**, 019901 (2019); `doi:10.1063/1.5086412`.

Granovskiy Ya. I., Malamud M. M. Sturm-Liouville operators with $W^{-1,1}$-matrix potentials.

In the present work the spectral structure of realizations of a matrix three-term Sturm-Liouville operator

$$\mathcal{L}(P,Q,R)y := R^{-1}(x)\big(-(P(x)y')' + Q(x)y\big), \qquad y = (y_1,\dots,y_m)^\top,$$

with singular potential $Q(\,\cdot\,) = Q(\,\cdot\,)^*$ on the half-line and line is investigated. It is shown that under certain conditions on the coefficients $P(\,\cdot\,)$ and $R(\,\cdot\,)$ the Dirichlet realization L^D (and other self-adjoint realizations) in the case of $Q(\,\cdot\,) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$ has Lebesgue non-negative spectrum of constant multiplicity m. In particular, Schrödinger operator with matrix potential $Q(\,\cdot\,) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^{m\times m})$ has Lebesgue non-negative spectrum of constant multiplicity m. This result is applied to the Sturm–Liouville expression $\mathcal{L}(P,Q,R)$ with delta-interactions on the line $\mathbb{R}$. It is shown that if the minimal operator $L := L_{\min}$ in $L^2(\mathbb{R}; R; \mathbb{C}^m)$ is selfadjoint, then the non-negative spectrum of the operator L is Lebesgue of constant multiplicity $2m$ whenever $Q(\,\cdot\,)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\cdot) \in W^{-1,1}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m})$. In particular, if the minimal Schrödinger operator $\mathbf{H}$ on the line with potential matrix $Q(\,\cdot\,) = Q_1(\,\cdot\,) + \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \delta(\,\cdot\, - x_k)$, is selfadjoint, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$, then its non-negative spectrum is Lebesgue one of constant multiplicity $2m$ whenever $Q_1(\,\cdot\,)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{m\times m})$ and $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$.

Донецкий национальный
технический университет (ДонНТУ)
ул. Артёма, 58, г. Донецк, ДНР
E-mail: yarvodoley@mail.ru

Российский Университет Дружбы Народов,
Математический институт им. С. М. Никольского,
ул. Орджоникидзе 3, Москва
E-mail: malamud3m@gmail.com

Поступило 26 октября 2022 г.