Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский, Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток с бесконечно дифференцируемыми весами, *Чебышевский сб.*, 2021, том 22, выпуск 3, 166–178

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-22-3-166-178

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-166-178

Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток с бесконечно дифференцируемыми весами[1]

Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Рарова Елена Михайловна — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: rarova82@mail.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе продолжены исследования авторов по оценке тригонометрических сумм алгебраической сетки с весами. Рассмотрен случай произвольной весовой функции бесконечного порядка.

Для параметра $\vec{m}$ тригонометрической суммы $S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(\vec{m})$ выделены три случая.

Если $\vec{m}$ принадлежит алгебраической решётке $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$, то для любого натурального r справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(t(m,\ldots,m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right).$$

Если $\vec{m}$ не принадлежит алгебраической решётке $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$, то определены два вектора $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1,\ldots,n_s)$ и $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ из условий $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})\in\Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ и произведение $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1}\cdot\ldots\cdot\overline{n_s}$ минимально. Для любого натурального r доказана асимптотическая оценка

$$|S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(\vec{m})| \leqslant B(r,\infty)\left(\frac{1-\delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{(q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right)\right).$$

Ключевые слова: алгебраические решётки, алгебраические сетки, тригонометрические суммы алгебраических сеток с весами, весовые функции.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток с бесконечно дифференцируемыми весами // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 166–178.

[1]Работа подготовлена по гранту РФФИ №19-41-710004_р_а

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-3-166-178

Trigonometric sums of grids of algebraic lattices with infinitely differentiable weights[2]

E. M. Rarova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Rarova Elena Mikhailovna — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: rarova82@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

The paper continues the authors ' research on the evaluation of trigonometric sums of an algebraic grid with weights. The case of an arbitrary weight function of infinite order is considered.

For the parameter $\vec{m}$ of the trigonometric sum $S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(\vec{m})$, three cases are highlighted.

If $\vec{m}$ belongs to the algebraic lattice $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$, then for any natural r the asymptotic formula is valid

$$S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(t(m,\ldots,m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right).$$

If $\vec{m}$ does not belong to the algebraic lattice $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$, then two vectors are defined $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1,\ldots,n_s)$ and $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ from the conditions $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{M}) + \vec{K}_\lambda(\vec{m})$ and the product $q(\vec{n}_\lambda(\vec{m})) = \overline{n_1}\cdot\ldots\cdot\overline{n_s}$ is minimal. Asymptotic estimation is proved

$$|S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(\vec{m})| \leqslant B(r,\infty)\left(\frac{1-\delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{(q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right)\right).$$

Keywords: algebraic lattices, algebraic net, trigonometric sums of algebraic net with weights, weight functions..

Bibliography: 15 titles.

For citation:

E. M. Rarova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "Trigonometric sums of grids of algebraic lattices with infinitely differentiable weights", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 166–178.

[2]The work has been prepared by the RFBR grant №19-41-710004_p_a

1. Введение

Роль тригонометрических сумм сеток в теоретико-числовом методе в приближенном анализе подробно освещена в монографии Н. М. Коробова [5]. Задача нахождения асимптотических формул для тригонометрических сумм алгебраических сеток поставлена в работе [3].

В данной работе используются обозначения и определения из работ [6]–[10].

Рассматриваются единичные $s-$мерные кубы

$$\overline{G}_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu \leqslant 1,\, \nu = 1,2,\ldots,s\}, \quad G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu < 1,\, \nu = 1,2,\ldots,s\}.$$

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\}=(\{x_1\},\ldots,\{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s = \vec{m}\cdot A\,|\vec{m} = (\,m_1,\ldots,m_s) \in \mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1\,1},\ldots,\lambda_{1\,s})$,...,$\vec{\lambda}_s = (\lambda_{s\,1},\ldots,\lambda_{s\,s})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x}\,|\,\forall\vec{y}\in\Lambda\ (\vec{x},\vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \frac{1}{q}\Lambda^*$.

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$. Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1;1)^s$.*

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x}\,|\,\vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s, \tag{1}$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x} \notin (-1;1)^s, \tag{2}$$

$$\left|\int_{-1}^{1}\ldots\int_{-1}^{1} \rho(\vec{x})e^{2\pi i(\vec{\sigma},\vec{x})}d\vec{x}\right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1\ldots\overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \tag{3}$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$. Простейшим примером весовой функции является функция $\rho_1(\vec{x}) = \rho_1(x_1)\cdot\ldots\cdot\rho_1(x_s)$, где

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Для неё выполняется следующая лемма:

Лемма 1. *Для любого действительного σ выполняется неравенство*

$$\left|\int\limits_{-1}^{1}(1-|x|)e^{2\pi i\sigma x}dx\right| \leqslant (\overline{\sigma})^{-2}, \tag{4}$$

где $\overline{\sigma} = \max(1, |\sigma|)$.

Доказательство. См. [12]. □

Кроме этого, в работах [1]–[2] была определена бесконечно дифференцируемая функция

$$\rho_\infty(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x=0,\\ e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}, & \text{при } 0<x<1,\\ 1-e^{\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{1+x}}}, & \text{при } -1<x<0,\\ 0, & \text{при } |x|\geqslant 1. \end{cases} \tag{5}$$

Использование бесконечно дифференцируемых весовых функций позволяет в методе Фролова [14, 15] избавиться от зависимости квадратурной формулы от класса E_s^α.

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{6}$$

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни $\Theta_\nu\,(\nu = 1, \ldots, s)$ многочлена (6) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\ldots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1\\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t\cdot T(\vec{a})) = \left\{\vec{x} = \left(t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_1^{\nu-1}m_\nu, \ldots, t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_s^{\nu-1}m_\nu\right) = t\cdot\vec{m}\cdot T(\vec{a}) \,\middle|\, \vec{m}\in\mathbb{Z}^s\right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t\cdot(\Theta_1^{\nu-1}, \ldots, \Theta_s^{\nu-1})$ $(\nu = 1, \ldots, s)$.

Нетрудно видеть, что для натурального t имеем: $\Lambda(t\cdot T(\vec{a})) \cap \mathbb{Z}^s = \{t\cdot(m, \ldots, m) | m \in \mathbb{Z}\}$.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\rho_k f(M_k) - R_N[f].$$

Совокупность $M \subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k))$ $(k = 1, \ldots, N)$ называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

В работах [6]–[10] использовалась весовая функция $\rho_r(x)$, определенная равенствами

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \geqslant 1, \\ 1-(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\sum\limits_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu}\dfrac{(-1)^{\nu}}{r+\nu}x^{r+\nu}, & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1-(-1)^r(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\sum\limits_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu}\dfrac{1}{r+\nu}x^{r+\nu}, & \text{при } -1 < x < 0 \end{cases}, \tag{8}$$

при этом для любого действительного числа σ и интеграла

$$I_r(\sigma) = \int\limits_{-1}^{1} \rho_r(x) e^{2\pi i \sigma x} dx$$

выполняется оценка

$$|I_r(\sigma)| \leqslant \frac{B(r)}{\overline{\sigma}^{r+1}} \tag{9}$$

и функция $\rho_r(x)$ — весовая функция порядка $r+1$ с некоторой константой $B(r)$.

Для произвольных целых $m_1,\ldots,m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\ldots+m_s\xi_s(k)]}, \tag{10}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Пусть матрица $T = T(\vec{a})$ и $t > 0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t) = M'(t\cdot\Lambda(T))$ из $N'(t\cdot\Lambda(T))$ узлов $\vec{x}_k$ $(k = 1,\ldots,N'(t\cdot\Lambda(T))$) с весами

$$\rho_k = \rho_{\vec{x}_k} = (\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1} \sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x}_k,\,\vec{y}\in M_1(t\cdot\Lambda(T))} \rho(\vec{y})$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t\cdot\Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x}\in M(t)} \left(\sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x},\,\vec{y}\in M_1(t\cdot\Lambda(T))} \rho(\vec{y}) \right) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Теорема 1. *Для алгебраической решётки $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ и произвольной весовой функции $\rho(\vec{x})$ справедливо равенство*[3]

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + {\sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}}' \int\limits_{-1}^{1}\ldots\int\limits_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m}-\vec{x})} d\vec{y}, \tag{11}$$

где

$$\delta(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \textit{при } \vec{m} = \vec{0}; \\ 0, & \textit{при } \vec{m} \neq \vec{0},\ \vec{m}\in\mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Доказательство. См. [9]. $\square$

С помощью леммы 1 доказываются следующие теоремы.

[3]Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

Теорема 2. *При $t \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \tag{12}$$

Доказательство. См. [9]. □

Теорема 3. *При $t \to \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^2\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \tag{13}$$

Доказательство. См. [9]. □

В работе [11] с помощью функции $\rho_r(x)$ эти теоремы были усилены:

Теорема 4. *Для любого целого $m \neq 0$ и натурального t справедливо равенство*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(t(m,\ldots,m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right). \tag{14}$$

Теорема 5. *При $t \to \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ и $\vec{m} \notin \Lambda$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(\vec{m}) \leqslant B(r)\begin{cases} \frac{1}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0},\\ O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}. \end{cases} \tag{15}$$

Цель данной работы — перенести теоремы 4 и 5 на случай бесконечно дифференцируемой весовой функции $\rho_\infty(x)$.

2. Разложение бесконечно дифференцируемой весовой функции в ряд Фурье

Начнём с вывода асимптотических оценок для коэффициентов Фурье.

Лемма 2. *Справедливо разложение на отрезке $[-1,1]$ в ряд Фурье:*

$$\rho_\infty(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_\infty(m)e^{\pi imx},$$

где $c_\infty(0) = \frac{1}{2}$ и $c_\infty(m) = \begin{cases} 0, & \text{при } m = 2n,\\ O\left(\frac{1}{\overline{m}^r}\right), & \text{при } m = 2n+1 \end{cases}$ при $m \neq 0$ и произвольном натуральном $r > 1$.

Доказательство. Действительно,

$$c_\infty(m) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\rho_\infty(x)e^{-\pi imx}dx, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

При $m = 0$ имеем:

$$c_\infty(0) = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}\left(1 - e^{\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{1+x}}}\right)dx + \int_{0}^{1}e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 \left(1 - e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}\right)dx + \int\limits_0^1 e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}dx\right) = \frac{1}{2}.$$

При $m \neq 0$ имеем:

$$c_\infty(m) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^0 \left(1 - e^{\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{1+x}}}\right)e^{-\pi imx}dx + \int\limits_0^1 e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}e^{-\pi imx}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 \left(1 - e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}\right)(-1)^m e^{-\pi imx}dx + \int\limits_0^1 e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}e^{-\pi imx}dx\right) = \frac{1}{2}\frac{(-1)^m e^{-\pi imx}}{-\pi im}\Bigg|_0^1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}(1-(-1)^m)e^{-\pi imx}}{-\pi im}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}(1-(-1)^m)e^{-\pi imx}e^{-\frac{1}{x}}}{-\pi im}\left(-\frac{x^2-x+1}{x^2(x-1)^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-(-1)^m}{-\pi im} - \frac{(-1)^m-1}{-2\pi im} + \int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}(1-(-1)^m)e^{-\pi imx}e^{-\frac{1}{x}}}{-\pi im}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2(x-1)^2}\right)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}(1-(-1)^m)e^{-\pi imx}e^{-\frac{1}{x}}}{-\pi im}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2(x-1)^2}\right)dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } m = 2n, \\ \int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}e^{-\pi imx}e^{-\frac{1}{x}}}{-\pi im}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2(x-1)^2}\right)dx, & \text{при } m = 2n+1. \end{cases}$$

Рассмотрим интеграл I, заданный равенством

$$I = \int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}e^{-\pi imx}e^{-\frac{1}{x}}}{-\pi im}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2(x-1)^2}\right)dx = \int\limits_0^1 \frac{e^{-\pi imx}}{-\pi im}f_1(x),$$

где $f_1(x) = e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2(x-1)^2}\right)$. Нетрудно видеть, что $\lim_{x\to 0^{+0}} f_1(x) = \lim_{x\to 1^{-0}} f_1(x) = 0$, поэтому, интегрируя по частям, получим

$$I = -\int\limits_0^1 \frac{e^{-\pi imx}}{(-\pi im)^2}f_1'(x).$$

Вычисления показывают, что $f_2(x) = f_1'(x) =$

$$= e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}e^{-\frac{1}{x}}\frac{-2x^5+6x^4-11x^3+11x^2-5x+1+e^{-\frac{1}{x}}(-x^4+2x^3-3x^2+2x-1)}{x^4(x-1)^4}.$$

Из вида функции $f_2(x)$ следует, что $\lim_{x\to 0^{+0}} f_2(x) = \lim_{x\to 1^{-0}} f_2(x) = 0$, поэтому, интегрируя по частям, получим

$$I = (-1)^2\int\limits_0^1 \frac{e^{-\pi imx}}{(-\pi im)^3}f_2'(x).$$

По индукции покажем, что справедливо равенство

$$I=(-1)^r\int\limits_0^1 \frac{e^{-\pi imx}}{(-\pi im)^{r+1}}f_r'(x),\quad \lim_{x\to 0^{+0}} f_r'(x)=\lim_{x\to 1^{-0}} f_r'(x)=0,$$

где $f_r(x)=\left(e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2(x-1)^2}\right)\right)^{(r-1)}$, $r\geqslant 1$. Для этого установим, что

$$f_r(x)=e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}e^{-\frac{1}{x}}\frac{\sum_{\nu=0}^{r-1}e^{-\frac{\nu}{x}}p_{r,\nu}(x)}{x^{2r}(x-1)^{2r}},$$

где $p_{r,\nu}(x)$ — некоторые многочлены от x. Действительно, для $r=1$ это выполнено с $p_{1,0}(x)=x^2-x+1$. Пусть утверждение справедливо для $r\geqslant 1$, тогда имеем:

$$f_{r+1}(x)=f_r'(x)=e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}e^{-\frac{1}{x}}\frac{-x^2+x-1}{x^2(x-1)^2}e^{-\frac{1}{x}}\frac{\sum_{\nu=0}^{r-1}e^{-\frac{\nu}{x}}p_{r,\nu}(x)}{x^{2r}(x-1)^{2r}}-e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}\frac{\sum_{\nu=0}^{r-1}e^{-\frac{\nu}{x}}p_{r,\nu}(x)}{x^{2r+2}(x-1)^{2r}}+$$

$$+e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}e^{-\frac{1}{x}}\frac{\left(\sum_{\nu=0}^{r-1}e^{-\frac{\nu}{x}}p_{r,\nu}(x)\right)'x^2(x-1)^2-2r\sum_{\nu=0}^{r-1}e^{-\frac{\nu}{x}}p_{r,\nu}(x)\left(x(x-1)^2+x^2(x-1)\right)}{x^{2r+2}(x-1)^{2r+2}}=$$

$$=e^{\frac{1}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}}e^{-\frac{1}{x}}\frac{\sum_{\nu=0}^{r}e^{-\frac{\nu}{x}}p_{r+1,\nu}(x)}{x^{2r+2}(x-1)^{2r+2}}$$

и утверждение справедливо для любого $r\geqslant 1$.

Положим

$$B(r,\infty)=\int\limits_0^1|f_{r+1}(x)|dx,$$

тогда

$$|I|\leqslant\frac{B(r,\infty)}{\overline{\pi m}^{r+1}},\quad r\geqslant 0,$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 3. *Пусть функция $\rho_\infty(x)$ определена равенствами (5). Тогда для любого действительного числа σ и интеграла*

$$I_\infty(\sigma)=\int\limits_{-1}^1\rho_\infty(x)e^{2\pi i\sigma x}dx$$

выполняется оценка

$$|I_\infty(\sigma)|\leqslant\begin{cases}(\overline{\sigma})^{-r}, & \text{при } |\sigma|\leqslant 1,\\ \frac{B(r,\infty)2\pi\|\sigma\|}{2\pi\overline{\sigma}^{r+1}}, & \text{при } |\sigma|>1\end{cases}\tag{16}$$

и функция $\rho_\infty(x)$ — весовая функция бесконечного порядка с константами $B(r,\infty)$ $(r\in\mathbb{N})$, где

$$B(r,\infty)=\int\limits_0^1|f_{r+1}(x)|dx.$$

Доказательство. Заметим, что для любого σ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{-1}^{1}\rho_\infty(x)e^{2\pi i\sigma x}dx\right|\leqslant\int\limits_{-1}^{1}\rho_\infty(x)dx=\|\rho_\infty(x)\|_1=1,$$

поэтому при $|\sigma|\leqslant 1$ и для любого натурального r выполняется соотношение

$$\left|\int\limits_{-1}^{1}\rho_\infty(x)e^{2\pi i\sigma x}dx\right|\leqslant(\overline{\sigma})^{-r}.$$

Пусть $|\sigma|>1$, тогда для интеграла $I_\infty(\sigma)$ справедливы преобразования

$$\begin{gathered}
I_\infty(\sigma)=\int\limits_0^1\rho_\infty(x)e^{2\pi i\sigma x}dx+\int\limits_0^1\rho_\infty(x-1)e^{2\pi i\sigma(x-1)}dx=\\
=\int\limits_0^1\rho_\infty(x)e^{2\pi i\sigma x}dx+\int\limits_0^1(1-\rho_\infty(x))e^{2\pi i\sigma(x-1)}dx=\\
=e^{-2\pi i\sigma}\int\limits_0^1 e^{2\pi i\sigma x}dx+\left(1-e^{-2\pi i\sigma}\right)\int\limits_0^1\rho_\infty(x)e^{2\pi i\sigma x}dx=\\
=e^{-2\pi i\sigma}\frac{e^{2\pi i\sigma}-1}{2\pi i\sigma}+\left(1-e^{-2\pi i\sigma}\right)\left(\frac{\rho_\infty(x)e^{2\pi i\sigma x}}{2\pi i\sigma}\bigg|_0^1-\int\limits_0^1\frac{\rho'_\infty(x)e^{2\pi i\sigma x}}{2\pi i\sigma}dx\right)=\\
=\frac{1-e^{-2\pi i\sigma}}{2\pi i\sigma}-\frac{1-e^{-2\pi i\sigma}}{2\pi i\sigma}-\left(1-e^{-2\pi i\sigma}\right)\int\limits_0^1\frac{\rho'_\infty(x)e^{2\pi i\sigma x}}{2\pi i\sigma}dx=\left(1-e^{-2\pi i\sigma}\right)\int\limits_0^1\frac{e^{2\pi i\sigma x}}{2\pi i\sigma}f_1(x)dx.
\end{gathered}\tag{17}$$

Повторяя рассуждения доказательства леммы 2, получим

$$I_\infty(\sigma)=\left(1-e^{-2\pi i\sigma}\right)(-1)^r\int\limits_0^1\frac{e^{2\pi i\sigma x}}{(2\pi i\sigma)^{r+1}}f'_r(x)dx.\tag{18}$$

Переходя в равенстве (18) к модулям, получим

$$|I_\infty(\sigma)|\leqslant\frac{|1-e^{-2\pi i\sigma}|B(r,\infty)}{\overline{2\pi\sigma}^{r+1}}.$$

Так как $4\|\sigma\|\leqslant|1-e^{-2\pi i\sigma}|\leqslant 2\pi\|\sigma\|$, то получаем утверждение леммы. □

3. Новые оценки тригонометрических сумм алгебраических сеток

Теперь перейдём к переносу теорем 4 и 5 на случай бесконечно дифференцируемой весовой функции $\rho_\infty(x)$.

Теорема 6. *Для любого целого $m \neq 0$ и натурального t справедливо равенство*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(t(m,\ldots,m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right). \tag{19}$$

Доказательство. Действительно, если $\vec{m} = t(m,\ldots,m)$, и $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$, то по теореме 1 имеем:

$$S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(t(m,\ldots,m)) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))\setminus\{t(m,\ldots,m)\}} \int\limits_{-1}^{1}\ldots\int\limits_{-1}^{1}\rho_\infty(\vec{y})e^{2\pi i(\vec{y},\vec{x})}d\vec{y},$$

где $\{t(m,\ldots,m)\}$ — одноэлементное множество, состоящее из вектора $\vec{m} = t(m,\ldots,m)$. Так как при $\vec{x} = \vec{0}$ имеем:

$$\int\limits_{-1}^{1}\ldots\int\limits_{-1}^{1}\rho_\infty(\vec{y})e^{2\pi i(\vec{y},\vec{x})}d\vec{y} = 1,$$

то

$$S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(t(m,\ldots,m)) = 1 + \sideset{}{'}\sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))\setminus\{t(m,\ldots,m)\}} \int\limits_{-1}^{1}\ldots\int\limits_{-1}^{1}\rho_\infty(\vec{y})e^{2\pi i(\vec{y},\vec{x})}d\vec{y}.$$

Поэтому по лемме 3 получим

$$|S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(t(m,\ldots,m)) - 1| \leqslant B(r,\infty)\zeta_H(\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))|r+1) = O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right),$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

Теперь рассмотрим случай, когда $\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ и, следовательно, $\vec{m} \neq t(m,\ldots,m)$ для любого $m \in \mathbb{Z}$.

Для решётки $\Lambda = \Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ определим два вектора $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1,\ldots,n_s)$ и $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ из условий $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ и произведение $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1}\cdot\ldots\cdot\overline{n_s}$ минимально. Ясно, что существует константа $C(\Lambda) \geqslant 1$ такая, что для любого вектора $\vec{m}$ имеем $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) \leqslant C(\Lambda)$.

Лемма 4. *Для любого действительного x справедливы неравенства*

$$\frac{1}{\overline{\overline{n-x}}} \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2\overline{x}}, & \textit{при } \overline{n-x} \geqslant 2\overline{x}, \\ \frac{1}{\overline{\overline{x}}}, & \textit{при } 2\overline{x} > \overline{n-x} \geqslant \overline{x}, \\ \frac{2}{\overline{\overline{x}}}, & \textit{при } \frac{\overline{x}}{2} \leqslant \overline{n-x} < \overline{x}, \\ \frac{2\overline{n}}{\overline{x}}, & \overline{n-x} < \frac{\overline{x}}{2}. \end{cases} \tag{20}$$

Доказательство. См. [11]. □

Теорема 7. *При $t \to \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ и $\vec{m} \notin \Lambda$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(\vec{m}) \leqslant B(r,\infty)\begin{cases} \frac{1}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right), & \textit{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}, \\ O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right), & \textit{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}. \end{cases} \tag{21}$$

Доказательство. Действительно, согласно теореме 1 и лемме 3 имеем:

$$\left|S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(\vec{m})\right| \leqslant B(r,\infty)\sideset{}{'}\sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{m_1-x_1}\ldots\overline{m_s-x_s})^{r+1}}.$$

Если $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})=\vec{0}$, то

$$\sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}{}^{'}\ \frac{1}{(\overline{m_1-x_1}\ldots\overline{m_s-x_s})^{r+1}}=\sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}{}^{'}\ \frac{1}{(\overline{n_1-x_1}\ldots\overline{n_s-x_s})^{r+1}}.$$

Если $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})\neq\vec{0}$, то

$$\sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}{}^{'}\ \frac{1}{(\overline{m_1-x_1}\ldots\overline{m_s-x_s})^{r+1}}=\frac{1}{(\overline{n_1}\ldots\overline{n_s})^{r+1}}+\sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))\setminus\{-\vec{k}_\Lambda(\vec{m})\}}{}^{'}\ \frac{1}{(\overline{n_1-x_1}\ldots\overline{n_s-x_s})^{r+1}}.$$

Для простоты изложения воспользуемся неравенством (20) в наиболее слабой форме $\frac{1}{\overline{n-x}}\leqslant\frac{2\overline{n}}{\overline{x}}$, получим

$$\left|S_{M(t),\vec{\rho}_\infty}(\vec{m})\right|\leqslant B(r,\infty)\left(\frac{1-\delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}}+\sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}{}^{'}\ \frac{2^{s(r+1)}(\overline{n_1}\ldots\overline{n_s})^{r+1}}{(\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^{r+1}}\right)=$$

$$=B(r,\infty)\left(\frac{1-\delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}}+2^{s(r+1)}(q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^{r+1}\zeta(\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))|r+1)\right).$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 6, получим доказываемое утверждение. □

4. Заключение

По-видимому, вместо оценки из теорем 6 и 7 со степенной правой частью и показателем $r+1$ имеет место оценка с экспоненциальной правой частью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6091–84.

2. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. / Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.

3. Н. М. Добровольский. О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.

4. Н. Н. Добровольский. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник. 2018. Т. 22, вып. 3, С. 109–134.

5. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.

6. Рарова Е. М. Разложение тригонометрической суммы сетки с весами в ряд по точкам решетки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 37–49.

7. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы сетки с весами для целочисленной решётки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 34–39.

8. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы алгебраических сеток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогичекий университет им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 356–359.

9. Рарова Е. М. О взвешенном числе точек алгебраической сетки // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 200–219.

10. Е. М. Рарова. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 399–405.

11. Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва. Асимптотическая оценка для тригонометрических сумм алгебраических сеток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 232–240.

12. Ребров Е. Д. Квадратурные формулы с модифицированными алгебраическими сетками // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 3(43). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 53–90.

13. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. I. – 232 с.

14. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

15. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

REFERENCES

1. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes E_s^α and H_s^α", Dep. v VINITI, no. 6091–84.

2. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Number-theoretic meshes and their applications", Ph.D. Thesis, Tula, Russia.

3. Dobrovol'skii, N. M. 2015, "On modern problems of the theory of hyperbolic Zeta function of lattices", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 16, no. 1, pp. 176–190.

4. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On two asymptotic formulas in the theory of hyperbolic Zeta function of lattices" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 109–134.

5. Korobov, N. M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

6. Rarova E. M., 2014, "Decomposition of the trigonometric sum of a grid with weights in a series by lattice points" , *Proceedings of Tula state University. Natural science*, vol. 1, part 1, pp. 37–49.

7. Rarova E. M., 2014, "Trigonometric grid sums with weights for integer lattice" , *Proceedings of Tula state University. Natural science*, № 3, pp. 34–39.

8. Rarova E. M., 2015, "Trigonometric sums of algebraic nets", *In the collection: Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications Proceedings of the XIII International conference dedicated to the eighty-fifth anniversary of the birth of Professor Sergei Sergeevich Ryshkov. Tula state pedagogical University. L. N. Tolstoy*, pp. 356–359.

9. Rarova E. M., 2018, "Weighted number of points of algebraic net", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 200–219.

10. E. M. Rarova, 2019, "Trigonometric sums of nets of algebraic lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 399–405.

11. E. M. Rarova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, 2020, "Asymptotic estimation for trigonometric sums of algebraic grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 232–240.

12. Rebrov E. D. 2012, "Quadrature formulas with modified algebraic grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 3(43), pp. 53 — 90.

13. Rebrova I. Yu., Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Balaba I. N., Yesayan A. R., Basalov Yu. A. numerical Theoretic method in approximate analysis and its implementation in POIVS "TMK": Monogr. In Under 2 hours. ed. — Tula: Publishing house of Tula. state PED. UN-TA im. L. N. Tolstoy, 2016. – Part I. – 232 p.

14. Frolov, K.K. 1976, "Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 231, no.4, pp. 818–821.

15. Frolov, K. K. 1979, Quadrature formulas on classes of functions, Ph.D. Thesis, Vychislitel'nyj tsentr Akademii Nauk SSSR, Moscow, USSR.

Получено 09.05.21 г.
Принято в печать 20.09.2021 г.