А. С. Макин

О структуре спектра несамосопряженного оператора Дирака

Исследуется спектральная задача для оператора Дирака с двухточечными краевыми условиями и произвольным комплекснозначным суммируемым по норме L_2 потенциалом $V(x)$. Найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять целая функция, чтобы являться характеристической функцией рассматриваемой краевой задачи. В случае регулярности краевых условий устанавливаются необходимые и достаточные условия на спектр указанного оператора.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: оператор Дирака, характеристическая функция, спектр.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9709

§ 1. Введение

Одним из важных классов обратных спектральных задач является задача о восстановлении системы дифференциальных уравнений по спектральным данным. Наиболее исследованными являются задачи для операторов Дирака и типа Дирака. В частности, для канонической системы Дирака на конечном интервале

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{y} = \operatorname{col}(y_1(x), y_2(x))$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

указанные задачи хорошо изучены, когда оператор является самосопряженным. В случае краевых условий Дирихле или Неймана восстановление непрерывного потенциала по двум спектрам было осуществлено в [1]. Аналогичные результаты для оператора Дирака с суммируемым потенциалом были установлены в [2]. Для неразделяющихся краевых условий, включая периодические, антипериодические и квазипериодические, сформулированные выше задачи были решены в [3], [4]. В несамосопряженном случае задача о восстановлении потенциала $V(x)$ по спектральным данным является значительно более сложной, так как многие методы, успешно используемые для изучения самосопряженных операторов, неприменимы. Например, характеристика спектров периодической (антипериодической) краевой задачи для оператора (1.1) дана в [3] в терминах специальных конформных отображений, которые не существуют для комплекснозначных потенциалов, а свойство перемежаемости собственных значений соответствующих задач Дирихле и Неймана, которое часто

© А. С. Макин, 2023

используется для доказательства разрешимости основного уравнения, теряет смысл в комплексном случае. Обратные задачи для несамосопряженных дифференциальных систем первого порядка были рассмотрены в [5], [6]. Среди недавних публикаций отметим [7].

В настоящей работе изучается система Дирака (1.1), где комплекснозначные функции p, q принадлежат $L_2(0,\pi)$ ($V \in L_2(0,\pi)$), с двухточечными краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{y}) &= a_{11}y_1(0) + a_{12}y_2(0) + a_{13}y_1(\pi) + a_{14}y_2(\pi) = 0, \\ U_2(\mathbf{y}) &= a_{21}y_1(0) + a_{22}y_2(0) + a_{23}y_1(\pi) + a_{24}y_2(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где коэффициенты a_{ij} являются произвольными комплексными числами, а строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Основной целью является изучение строения спектра задачи на собственные значения для системы (1.1) с краевыми условиями типа (1.2) и негладким комплекснозначным потенциалом $V(x)$.

Обозначим через $\|\mathbf{f}\| = (|f_1|^2 + |f_2|^2)^{1/2}$ норму произвольного вектора $\mathbf{f} = \operatorname{col}(f_1, f_2) \in \mathbb{C}^2$ и положим $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = f_1\overline{g}_1 + f_2\overline{g}_2$, а через $\|W\| = \sup_{\|\mathbf{f}\|=1} \|W\mathbf{f}\|$ обозначим норму произвольной матрицы W размера 2×2. Обозначим через $L_{2,2}(a,b)$ пространство двумерных вектор-функций $\mathbf{f}(t) = \operatorname{col}(f_1(t), f_2(t))$ с нормой $\|\mathbf{f}\|_{L_{2,2}(a,b)} = \left(\int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|\, dt \right)^{1/2}$ и через $L_{2,2}^{2,2}(a,b)$ пространство матриц-функций $W(t)$ размера 2×2 с нормой $\|W\|_{L_{2,2}^{2,2}(a,b)} = \left(\int_a^b \|W(t)\|\, dt \right)^{1/2}$. Оператор $\mathbb{L}\mathbf{y} = B\mathbf{y}' + V\mathbf{y}$ будем рассматривать как линейный оператор в пространстве $L_{2,2}(0,\pi)$ с областью определения $D(\mathbb{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi] \colon \mathbb{L}\mathbf{y} \in L_{2,2}(0,\pi), U_j(\mathbf{y}) = 0,\ j = 1,2\}$.

Обозначим через

$$E(x,\lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x,\lambda) & -s_2(x,\lambda) \\ s_1(x,\lambda) & c_2(x,\lambda) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

матрицу фундаментальной системы решений уравнения (1.1) с краевыми условиями $E(0,\lambda) = I$, где I – единичная матрица, и через $E_0(x,\lambda)$ фундаментальную систему решений невозмущенного уравнения $B\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{y}$ с краевыми условиями $E_0(0,\lambda) = I$. Очевидно,

$$E_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \cos\lambda x & -\sin\lambda x \\ \sin\lambda x & \cos\lambda x \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что элементы матрицы $E(x,\lambda)$ связаны соотношением

$$c_1(x,\lambda)c_2(x,\lambda) + s_1(x,\lambda)s_2(x,\lambda) = 1, \tag{1.4}$$

справедливым при любых x, λ.

Собственные значения задачи (1.1), (1.2) являются корнями характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0,$$

где

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(E^{[1]}(\cdot\,,\lambda)) & U_1(E^{[2]}(\cdot\,,\lambda)) \\ U_2(E^{[1]}(\cdot\,,\lambda)) & U_2(E^{[2]}(\cdot\,,\lambda)) \end{vmatrix},$$

$E^{[k]}(x,\lambda)$ – k-й столбец матрицы (1.3).

Обозначим через J_{ij} определитель, составленный из i-го и j-го столбцов матрицы A. Обозначим $J_0 = J_{12} + J_{34}$, $J_1 = J_{14} - J_{23}$, $J_2 = J_{13} + J_{24}$.

Хорошо известно, что характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ задачи (1.1), (1.2) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= J_{12} + J_{34} + J_{14}c_2(\pi,\lambda) - J_{23}c_1(\pi,\lambda) - J_{13}s_2(\pi,\lambda) - J_{24}s_1(\pi,\lambda) \\ &= \Delta_0(\lambda) + \int_0^\pi r_1(t)e^{-i\lambda t}\,dt + \int_0^\pi r_2(t)e^{i\lambda t}\,dt, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где функция

$$\Delta_0(\lambda) = J_0 + J_1\cos\pi\lambda - J_2\sin\pi\lambda = J_0 + \frac{J_1 + iJ_2}{2}\,e^{i\pi\lambda} + \frac{J_1 - iJ_2}{2}\,e^{-i\pi\lambda} \tag{1.6}$$

является характеристической функцией невозмущенной задачи

$$B\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{y}, \qquad U(\mathbf{y}) = 0, \tag{1.7}$$

а функции r_j принадлежат $L_2(0,\pi)$, $j = 1, 2$.

Краевые условия (1.2) могут быть разделены на четыре основных типа.

Определение 1. Краевые условия (1.2) называются *регулярными*, если

$$J_1^2 + J_2^2 = (J_{14} + J_{32})^2 + (J_{13} + J_{24})^2 \neq 0, \tag{1.8}$$

и *усиленно регулярными*, если дополнительно выполняется неравенство

$$J_0^2 \neq J_1^2 - J_2^2. \tag{1.9}$$

Определение 2. Краевые условия (1.2) называются *регулярными, но не усиленно регулярными*, если справедливо (1.8), но (1.9) не имеет места, т.е.

$$J_0^2 = J_1^2 - J_2^2.$$

Определение 3. Краевые условия (1.2) называются *нерегулярными*, если

$$\begin{aligned} &J_0 \neq 0, \quad J_1 + iJ_2 \neq 0, \quad J_1 - iJ_2 = 0; \\ &J_0 \neq 0, \quad J_1 + iJ_2 = 0, \quad J_1 - iJ_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Определение 4. Краевые условия (1.2) называются *вырожденными*, если

$$\begin{aligned} &J_1 = J_2 = 0; \qquad J_0 = 0, \quad J_1 + iJ_2 \neq 0, \quad J_1 - iJ_2 = 0; \\ &\qquad\qquad J_0 = 0, \quad J_1 + iJ_2 = 0, \quad J_1 - iJ_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что краевые условия (1.2) являются вырожденными тогда и только тогда, когда характеристическое уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ не имеет корней или $\Delta_0(\lambda) \equiv 0$.

Обозначим $c_j(\lambda) = c_j(\pi, \lambda)$, $s_j(\lambda) = s_j(\pi, \lambda)$, $j = 1, 2$. Обозначим также через PW_σ класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа, не превосходящего σ, таких, что $\|f\|_{L_2(R)} < \infty$. Известно (см. [8]), что функции $c_j(\lambda)$, $s_j(\lambda)$ допускают представление

$$c_j(\lambda) = \cos \pi\lambda + g_j(\lambda), \qquad s_j(\lambda) = \sin \pi\lambda + h_j(\lambda), \tag{1.10}$$

где $g_j, h_j \in \mathrm{PW}_\pi$, $j = 1, 2$.

Лемма (см. [3]). *Целые функции $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ допускают представления*

$$u(\lambda) = \sin \pi\lambda + h(\lambda), \qquad v(\lambda) = \cos \pi\lambda + g(\lambda), \tag{1.11}$$

где $h, g \in \mathrm{PW}_\pi$, тогда и только тогда, когда

$$u(\lambda) = -\pi(\lambda_0 - \lambda) \prod_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n},$$

где $\lambda_n = n + \epsilon_n$, $\{\epsilon_n\} \in l_2$,

$$v(\lambda) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n - 1/2},$$

где $\lambda_n = n - 1/2 + \kappa_n$, $\{\kappa_n\} \in l_2$.

Сходимость бесконечных произведений понимается в смысле главного значения.

§ 2. Характеристическая функция

В настоящей работе мы будем изучать задачу (1.1), (1.2) при выполнении условий

$$J_{13} \neq J_{24}, \quad J_{14} = 0, \quad J_{13} \neq 0, \quad J_{24} \neq 0. \tag{2.1}$$

Соотношениям (2.1) удовлетворяет широкий класс краевых условий, например:

– условия, задаваемые матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_1 d_1 b_2 c_2 \neq 0$, $b_2 d_1 \neq -a_1 c_2$, в том числе усиленно регулярные, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

• регулярные, но не усиленно регулярные, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

• нерегулярные, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-i & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

• вырожденные, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dfrac{1+3i}{2} & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему Дирака (1.1), (1.2), (2.1). Из (1.5), (1.6) следует, что характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ этой задачи может быть приведена к виду

$$\Delta(\lambda) = J_0 - J_{23}c_1(\lambda) - J_{13}s_2(\lambda) - J_{24}s_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + f(\lambda), \tag{2.2}$$

где $\Delta_0(\lambda) = J_0 - (J_{13} + J_{24})\sin\pi\lambda - J_{23}\cos\pi\lambda$, $f \in \mathrm{PW}_\pi$. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in \mathrm{PW}_\pi$ существует потенциал $V \in L_2(0,\pi)$ такой, что для характеристической функции $\Delta(\lambda)$ задачи (1.1), (1.2), (2.1) с потенциалом $V(x)$ справедливо равенство (2.2).*

Доказательство. Пусть f – произвольная функция из класса PW_π. Из теоремы Пэли–Винера и [9; лемма 1.3.1] следует, что

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-\pi|\operatorname{Im}\lambda|} f(\lambda) = 0. \tag{2.3}$$

Пусть $\{\lambda_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, – некоторая строго монотонно возрастающая последовательность вещественных чисел, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\lambda_n = n - \frac{1}{2}, \quad \text{если } n > N_0, \text{ и } \quad \lambda_n = -\lambda_{-n+1} \quad \text{для любого целого } n,$$

которые назовем *условиями* $(*)$.

Обозначим

$$c(\lambda) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n - 1/2}.$$

Из приведенной выше леммы следует, что

$$c(\lambda) = \cos\pi\lambda + g(\lambda), \tag{2.4}$$

где $g \in \mathrm{PW}_\pi$. Из теоремы Пэли–Винера и [9; лемма 1.3.1] следует, что

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-\pi|\operatorname{Im}\lambda|} g(\lambda) = 0,$$

следовательно,

$$|c(\lambda)| \geqslant c_0 e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|} \tag{2.5}$$

($c_0 > 0$) при $|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant M$, где M – некоторое достаточно большое число.

Дифференцируя (2.4), получаем

$$\dot{c}(\lambda) = -\pi\sin\pi\lambda + \dot{g}(\lambda). \tag{2.6}$$

Так как функция $\dot{g}$ принадлежит PW_π, то согласно [3] имеем

$$\dot{c}(\lambda_n) = -\pi\sin\pi\lambda_n + \tau_n,$$

где

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tau_n|^2 < \infty.$$

Из последнего равенства и определения чисел λ_n следует, что

$$\dot{c}(\lambda_n) = \pi(-1)^n + \rho_n, \tag{2.7}$$

где

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\rho_n|^2 < \infty.$$

Отсюда следует, что при всех достаточно больших по абсолютной величине четных n имеет место неравенство $\dot{c}(\lambda_n) > 0$. Легко видеть, что для всех $n \in \mathbb{Z}$ справедливо неравенство $\dot{c}(\lambda_n)\dot{c}(\lambda_{n+1}) < 0$. Отсюда вытекает, что при всех n

$$(-1)^n \dot{c}(\lambda_n) > 0. \tag{2.8}$$

Заметим, что из (2.7) следует

$$\frac{1}{\dot{c}(\lambda_n)} = \frac{(-1)^n}{\pi} + \sigma_n, \tag{2.9}$$

где

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\sigma_n|^2 < \infty.$$

Обозначим

$$\alpha = -J_{13}, \quad \beta = -J_{24}, \quad \gamma = -J_{23}, \quad u_+(\lambda) = (\alpha+\beta)\sin\pi\lambda + \gamma\cos\pi\lambda + f(\lambda).$$

Заметим, что

$$\alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0, \quad \alpha \neq \beta. \tag{2.10}$$

Рассмотрим уравнение

$$\alpha w^2 - u_+(\lambda_n) w + \beta = 0. \tag{2.11}$$

Оно имеет корни

$$s_n^{\pm} = \frac{u_+(\lambda_n) \pm \sqrt{u_+^2(\lambda_n) - 4\alpha\beta}}{2\alpha}.$$

Подставляя в последнее равенство выражение для $u_+(\lambda_n)$, находим

$$\begin{aligned}
s_n^{\pm} &= \frac{1}{2\alpha}\big((\alpha+\beta)\sin\pi\lambda_n + \gamma\cos\pi\lambda_n + f(\lambda_n)\big) \\
&\quad \pm \frac{1}{2\alpha}\big(((\alpha+\beta)\sin\pi\lambda_n + \gamma\cos\pi\lambda_n + f(\lambda_n))^2 - 4\alpha\beta\big)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2\alpha}\big((\alpha+\beta)\sin\pi\lambda_n + \gamma\cos\pi\lambda_n + f(\lambda_n)\big) \\
&\quad \pm \frac{1}{2\alpha}\big((\alpha-\beta)^2 + 2(\alpha+\beta)\sin\pi\lambda_n(\gamma\cos\pi\lambda_n + f(\lambda_n)) \\
&\qquad + (\gamma\cos\pi\lambda_n + f(\lambda_n))^2 - (\alpha+\beta)^2\cos^2\pi\lambda_n\big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
F^{\pm}(\lambda) &= \frac{1}{2\alpha}\big((\alpha+\beta)\sin\pi\lambda+\gamma\cos\pi\lambda+f(\lambda)\big)\\
&\quad\pm\frac{1}{2\alpha}\big(((\alpha+\beta)\sin\pi\lambda+\gamma\cos\pi\lambda+f(\lambda))^2-4\alpha\beta\big)^{1/2}\\
&= \frac{1}{2\alpha}\big((\alpha+\beta)\sin\pi\lambda+\gamma\cos\pi\lambda+f(\lambda)\big)\\
&\quad\pm\frac{1}{2\alpha}\big((\alpha-\beta)^2+2(\alpha+\beta)\sin\pi\lambda(\gamma\cos\pi\lambda+f(\lambda))\\
&\qquad+(\gamma\cos\pi\lambda+f(\lambda))^2-(\alpha+\beta)^2\cos^2\pi\lambda\big)^{1/2},\\
F_0^{\pm}(\lambda) &= \frac{1}{2\alpha}\big((\alpha+\beta)\sin\pi\lambda+\gamma\cos\pi\lambda\big)\\
&\quad\pm\frac{1}{2\alpha}\big(((\alpha+\beta)\sin\pi\lambda+\gamma\cos\pi\lambda)^2-4\alpha\beta\big)^{1/2}\\
&= \frac{1}{2\alpha}\big((\alpha+\beta)\sin\pi\lambda+\gamma\cos\pi\lambda\big)\\
&\quad\pm\frac{1}{2\alpha}\big((\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta)\gamma\sin\pi\lambda\cos\pi\lambda+(\gamma^2-(\alpha+\beta)^2)\cos^2\pi\lambda\big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Обозначим также через $\Gamma(z,r)$ круг с центром в точке z радиуса r. Далее рассмотрим ряд случаев.

1) $\operatorname{Im}(\beta/\alpha)\neq 0$. Пусть прямая l_0 проходит через точки -1 и β/α, а прямая l проходит через начало координат и параллельна l_0. Очевидно, существует число ε_0 такое, что круги $\Gamma(-1,\varepsilon_0)$ и $\Gamma(\beta/\alpha,\varepsilon_0)$ лежат строго по одну сторону от прямой l. Из (2.3) и (2.10) следует, что существует нечетное положительное $\widetilde{N}$ такое, что

$$
|F^{\pm}(\lambda)-F_0^{\pm}(\lambda)|<\frac{\varepsilon_0}{2} \tag{2.12}
$$

для любого λ, если $|\lambda|\geqslant\widetilde{N}-1$, $\lambda=k-1/2$, $k\in\mathbb{Z}$. Из (2.10) вытекает, что существует $0<\delta_0<1/4$ такое, что

$$
|F_0^{\pm}(\lambda)-F_0^{\pm}(\lambda+z)|<\frac{\varepsilon_0}{2} \tag{2.13}
$$

при $\lambda=\pm(\widetilde{N}-1/2)$, $|z|<\delta_0$. Определим последовательность $\{\lambda_n\}$, $n\in\mathbb{Z}$, следующим образом: $\lambda_n=n-1/2$, если $n\geqslant\widetilde{N}+1$, и пусть $\lambda_n=\widetilde{N}-1/2+\epsilon_n$, где $0<\epsilon_1<\dots<\epsilon_{\widetilde{N}}<\delta$, если $n=1,\dots,\widetilde{N}$, $\lambda_n=-\lambda_{-n+1}$. Очевидно, $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям $(*)$. Легко видеть, что если $n\geqslant\widetilde{N}+1$ или $n\leqslant-\widetilde{N}$, то все числа s_n^+ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$, если n нечетно, а все числа s_n^- лежат внутри круга $\Gamma(-1,\varepsilon_0)$, если n четно. Пусть $s_n=s_n^+$, если n нечетно, и $s_n=s_n^-$, если n четно, следовательно, числа $(-1)^n s_n$ лежат внутри круга $\Gamma(-1,\varepsilon_0)$.

Пусть $-\widetilde{N}+1\leqslant n\leqslant\widetilde{N}$, тогда из (2.12), (2.13) следует, что

$$
\left|F^{\pm}(\lambda_n)-F_0^{\pm}\left(\widetilde{N}-\frac{1}{2}\right)\right|<\varepsilon_0.
$$

Легко видеть, что в силу нечетности $\widetilde{N}$ все числа s_n^+ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$, а все числа s_n^- лежат внутри круга $\Gamma(\beta/\alpha,\varepsilon_0)$. Положим $s_n=s_n^+$, если n нечетно, тогда числа $(-1)^n s_n$ лежат внутри круга $\Gamma(-1,\varepsilon_0)$. Пусть $s_n=s_n^-$, если

n четно, тогда числа $(-1)^n s_n$ лежат внутри круга $\Gamma(\beta/\alpha, \varepsilon_0)$, Таким образом, все числа $(-1)^n s_n$, $n \in \mathbb{Z}$, лежат строго по одну сторону от прямой l.

2) $\operatorname{Im}(\beta/\alpha) = 0$, $\operatorname{Re}(\beta/\alpha) < 0$. Очевидно, существует число ε_0 такое, что круги $\Gamma(-1, \varepsilon_0)$ и $\Gamma(\beta/\alpha, \varepsilon_0)$ лежат строго левее мнимой оси. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем, то все числа $(-1)^n s_n$ лежат строго левее мнимой оси.

3) $\operatorname{Im}(\beta/\alpha) = 0$, $\operatorname{Re}(\beta/\alpha) > 0$. Обозначим $\widetilde{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}$, $\widetilde{\beta} = \beta\overline{\alpha}$, $\widetilde{\gamma} = \gamma\overline{\alpha}$, $\widetilde{f}(\lambda) = \overline{\alpha} f(\lambda)$, тогда $\widetilde{\alpha} > 0$, $\widetilde{\beta} > 0$.

Легко видеть, что

$$s_n^{\pm} = \frac{1}{2\widetilde{\alpha}}\big((\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta})\sin \pi\lambda_n + \widetilde{\gamma}\cos \pi\lambda_n + \widetilde{f}(\lambda_n)\big) \pm \frac{1}{2\widetilde{\alpha}}\big(((\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta})\sin \pi\lambda_n + \widetilde{\gamma}\cos \pi\lambda_n + \widetilde{f}(\lambda_n))^2 - 4\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\big)^{1/2}.$$

Обозначим

$$R^{\pm} = \frac{\widetilde{\gamma} \pm \sqrt{\widetilde{\gamma}^2 - 4\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}}{2\widetilde{\alpha}}.$$

Очевидно, $R^+R^- > 0$, следовательно, $\operatorname{Im} R^+ \operatorname{Im} R^- < 0$ или $\operatorname{Im} R^+ = 0 = \operatorname{Im} R^- = 0$.

3.1) $\operatorname{Im} R^+ \operatorname{Im} R^- < 0$. В этом случае

$$\widetilde{\gamma}^2 - 4\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta} \neq 0. \tag{2.14}$$

Пусть для определенности $\operatorname{Im} R^+ > 0$, тогда $\operatorname{Im} R^- < 0$. Из (2.14) следует, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что круги $\Gamma(R^+, \varepsilon_1)$ и $\Gamma(R^-, \varepsilon_1)$ лежат строго по разные стороны от некоторой прямой l, проходящей через начало координат и отличной от вещественной оси. Очевидно, что существует число ε_2, где $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, такое, что круг $\Gamma(-1, \varepsilon_2)$ не пересекается с l, следовательно, круг $\Gamma(-1, \varepsilon_2)$ расположен строго по одну сторону от прямой l. Из (2.3) и (2.10) вытекает, что существует нечетное положительное число $\widehat{N}$ такое, что

$$|F^{\pm}(\lambda) - F_0^{\pm}(\lambda)| < \frac{\varepsilon_1}{2} \tag{2.15}$$

для любого λ, если $|\lambda| \geqslant \widehat{N} - 1$, $\lambda = k - 1/2$, $k \in \mathbb{Z}$. В силу (2.14) существует $0 < \delta_1 < 1/4$ такое, что

$$|F_0^{\pm}(\lambda - F_0^{\pm}(\lambda + z)| < \frac{\varepsilon_2}{2}, \tag{2.16}$$

если $\lambda = \pm(\widehat{N} - 1)$, $|z| < \delta_1$.

Определим последовательность $\{\lambda_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, следующим образом: $\lambda_n = n - 1/2$, если $n \geqslant \widetilde{N} + 1$, и пусть $\lambda_n = \widehat{N} - 1 + \epsilon_n$, где $0 < \epsilon_1 < \cdots < \epsilon_{\widehat{N}} < \delta_1$, если $n = 1, \ldots, \widehat{N}$, $\lambda_n = -\lambda_{-n+1}$. Очевидно, что $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям $(*)$. Легко видеть, что если $n \geqslant \widetilde{N} + 1$ или $n \leqslant -\widetilde{N}$, то все числа s_n^+ лежат внутри круга $\Gamma(1, \varepsilon_1)$, если n нечетно, а все числа s_n^- лежат внутри круга $\Gamma(-1, \varepsilon_1)$, если n четно. Положим $s_n = s_n^+$, если n нечетно, и $s_n = s_n^-$, если n четно, следовательно, числа $(-1)^n s_n$ лежат внутри круга $\Gamma(-1, \varepsilon_1)$.

Пусть $-\widetilde{N} + 1 \leqslant n \leqslant \widetilde{N}$, тогда из (2.15), (2.16) следует, что

$$|F^{\pm}(\lambda_n) - F_0^{\pm}(\widehat{N} - 1)| < \varepsilon_1.$$

Тогда числа s_n^+ принадлежат $\Gamma(R^+,\varepsilon_1)$, а числа s_n^- принадлежат $\Gamma(R^-,\varepsilon_1)$. Предположим, например, что круг $\Gamma(R^-,\varepsilon_1)$ лежит по одну сторону от прямой l с кругом $\Gamma(-1,\varepsilon_0)$. Положим $s_n = s_n^+$, если n нечетно, и $s_n = s_n^-$, если n четно, тогда все числа $(-1)^n s_n$, $n\in\mathbb{Z}$, лежат строго по одну сторону от прямой l.

3.2) $\operatorname{Im} R^+ = \operatorname{Im} R^- = 0$. Очевидно, что существует число $\varepsilon_3 > 0$ такое, что круг $\Gamma(-1,\varepsilon_3)$ лежит строго ниже прямой $l_1\colon y=-x$, причем круг $\Gamma\Big(i\sqrt{\widetilde\beta/\widetilde\alpha},\varepsilon_3\Big)$ лежит строго выше прямой l_1, а круг $\Gamma\Big(-i\sqrt{\widetilde\beta/\widetilde\alpha},\varepsilon_3\Big)$ лежит строго ниже l_1. Очевидно, что $\widetilde\gamma/\widetilde\alpha$ вещественно, следовательно, $\widetilde\gamma$ вещественно. Рассмотрим уравнение

$$(\widetilde\alpha+\widetilde\beta)\sin t + \widetilde\gamma\cos t = 0.$$

Так как $\widetilde\alpha+\widetilde\beta\neq 0$, оно имеет корни $t_n = -\operatorname{arctg}(\widetilde\gamma/(\widetilde\alpha+\widetilde\beta)) + \pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$. Обозначим

$$h_0 = \frac{-\operatorname{arctg}(\widetilde\gamma/(\widetilde\alpha+\widetilde\beta))}{\pi}.$$

Из (2.3) и (2.10) вытекает, что существует положительное $\widehat N$ такое, что

$$|F^\pm(\lambda) - F_0^\pm(\lambda)| < \frac{\varepsilon_3}{2} \tag{2.17}$$

для любого λ, если $|\lambda|\geqslant \widetilde N - 1$, $\lambda = k-1/2$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\lambda_n = \widehat\lambda = t_{\widehat N-1}/\pi$, а также существует $\delta_3>0$ такое, что

$$|F_0^\pm(\lambda) - F_0^\pm(\lambda+z)| < \frac{\varepsilon_3}{2}, \tag{2.18}$$

если $\lambda = \pm\widehat\lambda$, $|z|<\delta$.

Определим последовательность $\{\lambda_n\}$, $n\in\mathbb{Z}$, следующим образом: $\lambda_n = n-1/2$ при $n\geqslant\widetilde N+1$, а если $1\leqslant n\leqslant\widehat N$, то $\lambda_n = \widehat\lambda+\epsilon_n$, где $0<\epsilon_1<\dots<\epsilon_{\widehat N}<\min(\delta,1/2-h_0)$, $\lambda_n = -\lambda_{-n+1}$. Очевидно, $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям $(*)$. Легко видеть, что если $n\geqslant\widetilde N+1$ или $n\leqslant-\widetilde N$, то все числа s_n^+ лежат внутри круга $\Gamma(1,\varepsilon_0)$, если n нечетно, а все числа s_n^- лежат внутри круга $\Gamma(-1,\varepsilon_0)$, если n четно. Положим $s_n = s_n^+$, если n нечетно, и $s_n = s_n^-$, если n четно, следовательно, числа $(-1)^n s_n$ лежат внутри круга $\Gamma(-1,\varepsilon_0)$.

Пусть $-\widetilde N+1\leqslant n\leqslant\widetilde N$, тогда $s_n^+\in\Gamma(i\sqrt{\beta/\alpha},\varepsilon_2)$, $s_n^-\in\Gamma(-i\sqrt{\beta/\alpha},\varepsilon_2)$. Пусть $s_n = s_n^+$, если n нечетно, и $s_n = s_n^-$, если n четно. Тогда все числа $(-1)^n s_n$ лежат строго ниже прямой l.

Так как (см. [10]) $\{f(\lambda_n)\}\in l_2$, то из определения чисел s_n следует, что всегда

$$s_n = (-1)^{n+1} + \vartheta_n, \tag{2.19}$$

где $\{\vartheta_n\}\in l_2$. Из определения чисел s_n и (2.8) также следует, что все числа $z_n = s_n/\dot c(\lambda_n)$ во всех случаях лежат строго по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало координат, а из (2.9) и (2.19) вытекает, что

$$z_n = -\frac{1}{\pi} + \rho_n, \tag{2.20}$$

где $\{\rho_n\}\in l_2$. Пусть $\beta_n = s_n - \sin\pi\lambda_n$, тогда из (2.19) следует, что $\{\beta_n\}\in l_2$. Обозначим

$$h(\lambda) = c(\lambda)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\beta_n}{\dot c(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)}.$$

Согласно [11; теорема 28] функция h принадлежит PW_π и $h(\lambda_n) = \beta_n$. Обозначим $s(\lambda) = \sin \pi\lambda + h(\lambda)$, тогда $s(\lambda_n) = s_n \neq 0$, следовательно, функции $s(\lambda)$ и $c(\lambda)$ не имеют общих корней.

Обозначим

$$Y_0(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos \lambda x \\ \sin \lambda x \end{pmatrix}.$$

В [7] было установлено, что система векторов $Y_0(x, \lambda_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, полна в $L_{2,2}(0, \pi)$.

Обозначим

$$F(x,t) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{s_n}{\dot{c}(\lambda_n)} \big(Y_0(x,\lambda_n) Y_0^T(t,\lambda_n)\big) + \frac{1}{\pi} Y_0\left(x, n-\frac{1}{2}\right) Y_0^T\left(t, n-\frac{1}{2}\right)\right). \tag{2.21}$$

Из [12] и (2.20) следует, что

$$\|F(\cdot,x)\|_{L^{2,2}_{2,2}(0,\pi)} + \|F(x,\cdot)\|_{L^{2,2}_{2,2}(0,\pi)} < C,$$

где C не зависит от x.

Докажем, что для каждого $x \in [0,\pi]$ однородное уравнение

$$\mathbf{f}^T(t) + \int_0^x \mathbf{f}^T(s) F(s,t)\, ds = 0, \tag{2.22}$$

где $\mathbf{f}(t) = \operatorname{col}(f_1(t), f_2(t))$, $\mathbf{f} \in L_{2,2}(0,x)$, $\mathbf{f}(t) = 0$ при $x < t \leqslant \pi$, имеет только тривиальное решение. Умножая уравнение (2.22) на $\overline{\mathbf{f}^T(t)}$ и интегрируя полученное уравнение на отрезке $[0,x]$, получаем

$$\|\mathbf{f}\|^2_{L_{2,2}(0,x)} + \int_0^x \left\langle \int_0^x \mathbf{f}^T(s) F(s,t)\, ds, \overline{\mathbf{f}^T(t)} \right\rangle dt = 0. \tag{2.23}$$

Исходя из равенства (2.21), несложными вычислениями находим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{f}^T(s) F(s,t) \\
&= -\Bigg\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Bigg\{ z_n \big[f_1(s) \cos\lambda_n s \cos\lambda_n t + f_2(s) \sin\lambda_n s \cos\lambda_n t, \\
&\qquad f_1(s) \cos\lambda_n s \sin\lambda_n t + f_2(s) \sin\lambda_n s \sin\lambda_n t \big] \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \Bigg[f_1(s) \cos\left(n-\frac{1}{2}\right) s \cos\left(n-\frac{1}{2}\right) t + f_2(s) \sin\left(n-\frac{1}{2}\right) s \cos\left(n-\frac{1}{2}\right) t, \\
&\qquad f_1(s) \cos\left(n-\frac{1}{2}\right) s \sin\left(n-\frac{1}{2}\right) t + f_2(s) \sin\left(n-\frac{1}{2}\right) s \sin\left(n-\frac{1}{2}\right) t \Bigg] \Bigg\} \Bigg\} \\
&= -\Bigg\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Bigg\{ z_n \big[f_1(s) \cos\lambda_n s \cos\lambda_n t + f_2(s) \sin\lambda_n s \cos\lambda_n t \big] \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \Bigg[f_1(s) \cos\left(n-\frac{1}{2}\right) s \cos\left(n-\frac{1}{2}\right) t + f_2(s) \sin\left(n-\frac{1}{2}\right) s \cos\left(n-\frac{1}{2}\right) t \Bigg], \\
&\qquad z_n \big[f_1(s) \cos\lambda_n s \sin\lambda_n t + f_2(s) \sin\lambda_n s \sin\lambda_n t \big] \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \Bigg[f_1(s) \cos\left(n-\frac{1}{2}\right) s \sin\left(n-\frac{1}{2}\right) t + f_2(s) \sin\left(n-\frac{1}{2}\right) s \sin\left(n-\frac{1}{2}\right) t \Bigg] \Bigg\} \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Подставляя правую часть (2.24) во второй член в левой части (2.23), преобразуя повторные интегралы в произведения интегралов и используя вещественность

всех чисел λ_n, получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \left\langle \int_0^x \mathbf{f}^T(s)F(s,t)\,ds, \overline{\mathbf{f}^T(t)} \right\rangle dt \\
&= -\Bigg\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^x \Bigg(\int_0^x \Bigg\{ z_n \big[f_1(s)\cos\lambda_n s \cos\lambda_n t + f_2(s)\sin\lambda_n s\cos\lambda_n t \big] \\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\Bigg[f_1(s)\cos\left(n-\frac12\right)s\cos\left(n-\frac12\right)t \\
&\qquad + f_2(s)\sin\left(n-\frac12\right)s\cos\left(n-\frac12\right)t \Bigg] \Bigg\} ds \Bigg) \overline{f_1(t)}\,dt \\
&\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^x \Bigg(\int_0^x \Bigg\{ z_n \big[f_1(s)\cos\lambda_n s \sin\lambda_n t + f_2(s)\sin\lambda_n s\sin\lambda_n t \big] \\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\Bigg[f_1(s)\cos\left(n-\frac12\right)s\sin\left(n-\frac12\right)t \\
&\qquad + f_2(s)\sin\left(n-\frac12\right)s\sin\left(n-\frac12\right)t \Bigg] \Bigg\} ds \Bigg) \overline{f_2(t)}\,dt \Bigg\} \\
&= -\Bigg\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Bigg(\int_0^x z_n \big[f_1(s)\cos\lambda_n s + f_2(s)\sin\lambda_n s \big]\,ds \int_0^x \cos\lambda_n t \overline{f_1(t)}\,dt \\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\int_0^x \Bigg[f_1(s)\cos\left(n-\frac12\right)s + f_2(s)\sin\left(n-\frac12\right)s \Bigg] ds \Bigg) \\
&\qquad\quad \times \int_0^x \cos\left(n-\frac12\right)t\overline{f_1(t)}\,dt \\
&\qquad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Bigg(\int_0^x z_n \big[f_1(s)\cos\lambda_n s + f_2(s)\sin\lambda_n s \big]\,ds \int_0^x \sin\lambda_n t \overline{f_2(t)}\,dt \\
&\qquad\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^x \Bigg[f_1(s)\cos\left(n-\frac12\right)s + f_2(s)\sin\left(n-\frac12\right)s \Bigg] ds \\
&\qquad\qquad \times \int_0^x \sin\left(n-\frac12\right)t\overline{f_2(t)}\,dt \Bigg) \Bigg\} \\
&= -\Bigg\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Bigg(\int_0^x z_n [f_1(s)\cos\lambda_n s + f_2(s)\sin\lambda_n s]\,ds \int_0^x \cos\lambda_n t \overline{f_1(t)}\,dt \\
&\qquad + \int_0^x z_n \big[f_1(s)\cos\lambda_n s + f_2(s)\sin\lambda_n s \big]\,ds \int_0^x \sin\lambda_n t \overline{f_2(t)}\,dt \Bigg) \\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Bigg(\int_0^x \Bigg[f_1(s)\cos\left(n-\frac12\right)s \\
&\qquad + f_2(s)\sin\left(n-\frac12\right)s \Bigg] ds \int_0^x \cos\left(n-\frac12\right)t\overline{f_1(t)}\,dt \\
&\qquad + \int_0^x \Bigg[f_1(s)\cos\left(n-\frac12\right)s + f_2(s)\sin\left(n-\frac12\right)s \Bigg] ds \\
&\qquad\quad \times \int_0^x \sin\left(n-\frac12\right)t\overline{f_2(t)}\,dt \Bigg) \Bigg\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\Bigg\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Bigg(\int_0^x z_n [f_1(t)\cos\lambda_n t + f_2(t)\sin\lambda_n t]\,dt \int_0^x \cos\lambda_n t \overline{f_1(t)}\,dt \\
&\quad + \int_0^x z_n \big[f_1(t)\cos\lambda_n t + f_2(t)\sin\lambda_n t\big]\,dt \int_0^x \sin\lambda_n t \overline{f_2(t)}\,dt \Bigg) \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Bigg(\int_0^x \Bigg[f_1(t)\cos\Big(n-\frac{1}{2}\Big)t \\
&\quad + f_2(t)\sin\Big(n-\frac{1}{2}\Big)t \Bigg]\,dt \int_0^x \cos\Big(n-\frac{1}{2}\Big)t \overline{f_1(t)}\,dt \\
&\quad + \int_0^x \Bigg[f_1(t)\cos nt + f_2(t)\sin\Big(n-\frac{1}{2}\Big)t \Bigg]\,dt \int_0^x \sin\Big(n-\frac{1}{2}\Big)t \overline{f_2(t)}\,dt \Bigg) \Bigg\} \\
&= -\Bigg\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n \int_0^x [f_1(t)\cos\lambda_n t + f_2(t)\sin\lambda_n t]\,dt \\
&\qquad \times \int_0^x \big[\overline{f_1(t)}\cos\lambda_n t + \overline{f_2(t)}\sin\lambda_n t\big]\,dt \\
&\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^x \Bigg[f_1(t)\cos\Big(n-\frac{1}{2}\Big)t + f_2(t)\sin\Big(n-\frac{1}{2}\Big)t \Bigg]\,dt \\
&\qquad \times \int_0^x \Bigg[\overline{f_1(t)}\cos\Big(n-\frac{1}{2}\Big)t + \overline{f_2(t)}\sin\Big(n-\frac{1}{2}\Big)t \Bigg]\,dt \Bigg\} \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n \Bigg| \int_0^x \langle \mathbf{f}(t), Y_0(t,\lambda_n)\rangle\,dt \Bigg|^2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \Bigg| \int_0^x \Bigg\langle \mathbf{f}(t), Y_0\Big(t, \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big)\Bigg\rangle\,dt \Bigg|^2.
\end{aligned}
$$

Из равенства Парсеваля вытекает, что

$$
\|\mathbf{f}\|^2_{L_{2,2}(0,x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \Bigg| \int_0^x \Bigg\langle \mathbf{f}(t), Y_0\Big(t, \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big)\Bigg\rangle\,dt \Bigg|^2,
$$

следовательно,

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n \Bigg| \int_0^x \langle \mathbf{f}(t), Y_0(t,\lambda_n)\rangle\,dt \Bigg|^2 = 0. \tag{2.25}
$$

Так как для любого n все числа z_n расположены строго по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало координат, то из (2.25) вытекает, что $\int_0^x \langle \mathbf{f}(t), Y_0(t,\lambda_n)\rangle\,dt = 0$. Отсюда и из полноты системы векторов $\{Y_0(t,\lambda_n)\}$ в $L_{2,2}(0,\pi)$ следует, что $\mathbf{f}(t) \equiv 0$.

Отсюда получаем (см. [8]), что функции $c(\lambda)$ и $-s(\lambda)$ являются элементами первой строки матрицы монодромии

$$
\widetilde{U}(\pi,\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_1(\pi,\lambda) & -\widetilde{s}_2(\pi,\lambda) \\ \widetilde{s}_1(\pi,\lambda) & \widetilde{c}_2(\pi,\lambda) \end{pmatrix}
$$

задачи (1.1), (1.2), (2.1) с некоторым потенциалом $\widetilde{V} \in L_2(0,\pi)$, т.е.

$$
c(\lambda) = \widetilde{c}_1(\pi,\lambda), \qquad s(\lambda) = \widetilde{s}_2(\pi,\lambda). \tag{2.26}
$$

Из (2.2) находим, что соответствующий характеристический определитель есть

$$\widetilde{\Delta}(\lambda) = J_0 + \gamma\widetilde{c}_1(\lambda) + \alpha\widetilde{s}_2(\lambda) + \beta\widetilde{s}_1(\lambda) = J_0 + (\alpha+\beta)\sin\pi\lambda + \gamma\cos\pi\lambda + \widetilde{f}(\lambda),$$

где $\widetilde{f} \in \mathrm{PW}_\pi$. Из (1.4), (2.11) и (2.26) вытекает, что

$$\widetilde{\Delta}(\lambda_n) = J_0 + \alpha\widetilde{s}_2(\pi,\lambda_n) + \beta\widetilde{s}_1(\pi,\lambda_n) = J_0 + \frac{\beta}{\widetilde{s}_2(\pi,\lambda_n)} + \alpha\widetilde{s}_2(\pi,\lambda_n)$$
$$= J_0 + \frac{\beta}{s(\lambda_n)} + \alpha s(\lambda_n) = J_0 + u_+(\lambda_n) = U(\lambda_n).$$

Отсюда следует, что функция

$$\Phi(\lambda) = \frac{U(\lambda) - \widetilde{\Delta}(\lambda)}{c(\lambda)} = \frac{f(\lambda) - \widetilde{f}(\lambda)}{c(\lambda)}$$

является целой функцией на всей комплексной плоскости. Так как

$$|f(\lambda) - \widetilde{f}(\lambda)| < c_1 e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}, \tag{2.27}$$

то из (2.5) вытекает, что $|\Phi(\lambda)| \leqslant c_2$, если $|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant M$. Обозначим через H объединение вертикальных отрезков $\{z\colon |\operatorname{Re} z| = n,\ |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant M\}$, где $|n| = N_0+1$, $N_0+2,\dots$. Так как функция $c(\lambda)$ является функцией типа синуса (см. [13]), то $|c(\lambda)| > \delta > 0$, если $\lambda \in H$. Из последнего неравенства, (2.27) и принципа максимума модуля аналитической функции находим, что $|\Phi(\lambda)| < c_3$ в полосе $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant M$, следовательно, функция $\Phi(\lambda)$ ограниченна во всей комплексной плоскости и в силу теоремы Лиувилля является постоянной. Пусть $|\operatorname{Im}\lambda| = M$. Тогда из (2.3) следует, что $\lim_{|\lambda|\to\infty}(f(\lambda) - \widetilde{f}(\lambda)) = 0$, следовательно, $\Phi(\lambda) \equiv 0$, значит, $U(\lambda) \equiv \widetilde{\Delta}(\lambda)$.

Теорема 1 доказана.

§ 3. Спектр

Дополнительно к соотношениям (2.1) предположим, что краевые условия (1.2) регулярны, стало быть, согласно (1.8)

$$|J_1 + iJ_2|\,|J_1 - iJ_2| \neq 0.$$

Теорема 2. *Для того чтобы множество Λ являлось спектром оператора Дирака (1.1), (1.2), (2.1) с комплекснозначным потенциалом $V \in L_2(0,\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы оно состояло из двух последовательностей собственных значений $\lambda_{n,j}$, удовлетворяющих условию*

$$\lambda_{n,j} = 2n + \frac{\ln z_j}{i\pi} + \varepsilon_{n,j}, \tag{3.1}$$

где z_j являются корнями уравнения

$$(J_1 + iJ_2)z^2 + 2J_0 z + (J_1 - iJ_2) = 0,$$

а значения ветви логарифма фиксируются в полосе $\operatorname{Im}\lambda \in (-\pi,\pi]$, $\{\varepsilon_{n,j}\} \in l_2$, $j = 1,2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Необходимость доказана в [14].

Достаточность. Пусть две последовательности $\lambda_{n,j}$ удовлетворяют условию (3.1). Очевидно, существует постоянная M такая, что

$$\sup|\varepsilon_{n,j}| < M, \qquad \sum_{j=1,2,\,n\in\mathbb{Z}} |\varepsilon_{n,j}|^2 < M. \tag{3.2}$$

Из [14] следует, что собственные значения задачи (1.1), (1.2), (2.1) с нулевым потенциалом $V(x)$ определяются формулами

$$\lambda^0_{n,j} = 2n + \frac{\ln z_j}{i\pi},$$

$j = 1, 2$, $n \in \mathbb{Z}$. Обозначим $t_j = \ln z_j/(i\pi)$. По теореме Адамара характеристическая функция $\Delta_0(\lambda)$ невозмущенной задачи (1.7), (2.1) имеет вид

$$\Delta_0(\lambda) = J_0 - (J_{13} + J_{24})\sin\pi\lambda - J_{23}\cos\pi\lambda = c\lambda^m \prod_{(n,j)\in T_1} \frac{\lambda^0_{n,j} - \lambda}{\lambda^0_{n,j}},$$

где $c \ne 0$, а T_1 – множество пар (n, j) таких, что $\lambda^0_{n,j} \ne 0$. Очевидно,

$$|\Delta_0(\lambda)| < c_1 e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}. \tag{3.3}$$

Пусть T_0 – множество пар (n, j) таких, что $\lambda^0_{n,j} = 0$, m – число элементов множества T_0. Из [14] следует, что $0 \leqslant m \leqslant 2$. Обозначим также $T = T_0 \cup T_1$,

$$\Delta(\lambda) = c \prod_{(n,j)\in T_0} (\lambda - \lambda_{n,j}) \prod_{(n,j)\in T_1} \frac{\lambda_{n,j} - \lambda}{\lambda^0_{n,j}}.$$

Пусть $f(\lambda) = \Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)$. Исследование свойств функции $f(\lambda)$ основывается на следующих утверждениях.

Предложение 1. *Функция $f(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа, не превышающего π.*

Доказательство. Обозначим Γ объединение кругов $\Gamma(2n + t_j, 1/4)$, $n \in \mathbb{Z}$. Если $\lambda \notin \Gamma$, то

$$f(\lambda) = -\Delta_0(\lambda)\left(1 - \frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_0}\right) = -\Delta_0(\lambda)(1 - \phi(\lambda)), \tag{3.4}$$

где

$$\phi(\lambda) = \prod_{(n,j)\in T_0}\left(1 - \frac{\lambda_{n,j}}{\lambda}\right) \prod_{(n,j)\in T_1}\left(1 + \frac{\varepsilon_{n,j}}{\lambda^0_{n,j} - \lambda}\right) = \prod_{(n,j)\in T}\left(1 + \frac{\varepsilon_{n,j}}{2n + t_j - \lambda}\right).$$

Оценим функцию $\phi(\lambda)$. Обозначим $\alpha_{n,j}(\lambda) = \varepsilon_{n,j}/(2n + t_j - \lambda)$. Из (3.2) следует, что

$$\sum_{(n,j)\in T} |\alpha_{n,j}(\lambda) \leqslant \sum_{(n,j)\in T} \frac{|\varepsilon_{n,j}|^2 + |2n + t_j - \lambda|^{-2}}{2} < c_3. \tag{3.5}$$

Легко видеть, что для всех $|n| > n_0$, где n_0 – достаточно большое число, справедливо неравенство

$$|\alpha_{n,j}(\lambda)| < \frac{1}{4} \tag{3.6}$$

для любого $\lambda \notin \Gamma$. Если $|n| \leqslant n_0$, то неравенство (3.6) имеет место для всех достаточно больших $|\lambda|$, следовательно, указанное неравенство справедливо для всех $|\lambda| \geqslant C_0$. Из (3.5), (3.6) и элементарного неравенства

$$|\ln(1+z)| \leqslant 2|z|, \tag{3.7}$$

справедливого при $|z| \leqslant 1/4$, следует, что

$$\sum_T |\ln(1+\alpha_{n,j}| \leqslant c_4.$$

Здесь и в дальнейшем мы выбираем ту ветвь $\ln(1+z)$, которая обращается в нуль при $z=0$. Согласно [15; гл. V, § 1, п. 72] перепишем последнее соотношение в виде

$$|\phi(\lambda)| \leqslant \prod_T |1+\alpha_{n,j}(\lambda)| \leqslant e^{c_4}. \tag{3.8}$$

Из (3.3), (3.4), (3.8) следует, что

$$|f(\lambda)| < c_5 e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|} \tag{3.9}$$

вне области $\Gamma' = \Gamma \cup \{|\lambda| < C_0\}$.

Обозначим

$$D = \bigcup_{(n,j)\in T} \left[2n + \operatorname{Re} t_j - \frac{1}{4},\, 2n + \operatorname{Re} t_j + \frac{1}{4}\right], \qquad D_0 = (0,2) \setminus D.$$

Легко видеть, что множество D_0 является объединением конечного числа интервалов, сумма длин которых не менее 1. Пусть x_0 – середина одного из этих интервалов. Тогда все точки $x_0 + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, лежат вне множества D. В частности, неравенство (3.9) справедливо, если λ принадлежит прямым $\operatorname{Im}\lambda = \pm\widehat{C}_0$, где $\widehat{C}_0 = C_0 + |t_1| + |t_2| + 1$, и вертикальным отрезкам с вершинами в точках $(x_0+2k, -\widehat{C}_0)$, $(x_0+2k, \widehat{C}_0)$, где $|2k-1| > C_0$, $k \in \mathbb{Z}$. Согласно принципу максимума неравенство (3.9) имеет место на всей комплексной плоскости, следовательно, функция $f(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа, не превышающего π.

Предложение 1 доказано.

Предложение 2. *Функция f принадлежит классу* PW_π.

Обозначим

$$W(\lambda) = \ln\phi(\lambda) = \sum_{(n,j)\in T} \ln(1+\alpha_{n,j}(\lambda)),$$

тогда

$$f(\lambda) = -\Delta_0(\lambda)\big(1 - e^{W(\lambda)}\big). \tag{3.10}$$

Оценим функцию $W(\lambda)$, если $\lambda \notin \Gamma'$. Из (3.2), (3.6), (3.7) следует, что

$$\begin{aligned}
|W(\lambda)| &\leqslant \sum_{(n,j)\in T} |\ln(1+\alpha_{n,j}(\lambda))| \\
&\leqslant \frac{2M}{|\lambda|} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{|\varepsilon_n,1|^2 + |\varepsilon_{n,2}|^2}{10M} + \frac{10M}{|2n-\lambda|^2} \right) \\
&\leqslant \frac{2M}{|\lambda|} + \frac{1}{10} + 20M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + |\operatorname{Im}\lambda|^2} \\
&\leqslant \frac{2M}{|\lambda|} + \frac{1}{10} + 20M \left(\frac{2}{|\operatorname{Im}\lambda|^2} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + |\operatorname{Im}\lambda|^2} \right) \\
&\leqslant \frac{2M}{|\operatorname{Im}\lambda|} + \frac{1}{10} + 20M \left(\frac{2}{|\operatorname{Im}\lambda|^2} + \frac{\pi}{2|\operatorname{Im}\lambda|} \right).
\end{aligned}$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$|W(\lambda)| < \frac{1}{4}, \tag{3.11}$$

если $|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant M_1 = 10(\pi + 2 + 22M) + \widehat{C}_0$. Из элементарного неравенства

$$\frac{|z|}{2} \leqslant |1 - e^z| \leqslant 2|z|,$$

справедливого при $|z| \leqslant 1/4$, получаем неравенство $|1 - e^{W(\lambda)}| \leqslant 2|W(\lambda)|$. Из последнего неравенства и (3.3), (3.10) находим, что

$$|f(\lambda)| \leqslant c_6 |W(\lambda)| \tag{3.12}$$

для $\lambda \in l$, где l – прямая $\operatorname{Im}\lambda = M_1$. Докажем, что

$$\int_l |W(\lambda)|^2 \, d\lambda < \infty. \tag{3.13}$$

Из элементарного неравенства $|\ln(1+z) - z| \leqslant |z|^2$, справедливого при $|z| \leqslant 1/2$, получаем

$$\ln(1+z) - z = r(z),$$

где $|r(z)| \leqslant |z|^2$, следовательно,

$$W(\lambda) = S_1(\lambda) + S_2(\lambda),$$

где

$$S_1(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_{n,1}(\lambda) + \alpha_{n,2}(\lambda)), \qquad |S_2(\lambda)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|\alpha_{n,1}(\lambda)|^2 + |\alpha_{n,2}(\lambda)|^2).$$

Очевидно,

$$|W(\lambda)| \leqslant |S_1(\lambda)| + |S_2(\lambda)|. \tag{3.14}$$

Положим

$$I_m = \int_l |S_m(\lambda)|^2\, d\lambda$$

$(m = 1, 2)$. Вначале рассмотрим интеграл I_1. Из [16] вытекает, что

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_l \Big| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\varepsilon_{n,1}}{2n + t_1 - \lambda} + \frac{\varepsilon_{n,2}}{2n + t_2 - \lambda} \Big) \Big|^2 d\lambda \\ &\leqslant 2 \Big(\int_l \Big| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,1}}{2n + t_1 - \lambda} \Big|^2 d\lambda + \int_l \Big| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,2}}{2n + t_2 - \lambda} \Big|^2 d\lambda \Big) \\ &= 2 \Big(\int_{l_1} \Big| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,1}}{2n - \lambda} \Big|^2 d\lambda + \int_{l_2} \Big| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,2}}{2n - \lambda} \Big|^2 d\lambda \Big) < \infty, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где l_j являются прямыми $\operatorname{Im} \lambda = M_1 - t_j$, $j = 1, 2$.

Легко видеть, что

$$|S_2(\lambda)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\varepsilon_{n,1}|^2}{|2n + t_1 - \lambda|^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\varepsilon_{n,2}|^2}{|2n + t_2 - \lambda|^2} \leqslant c_7,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant c_7 \int_l \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\varepsilon_{n,1}|^2}{|2n + t_1 - \lambda|^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\varepsilon_{n,2}|^2}{|2n + t_2 - \lambda|^2} \Big) d\lambda \\ &\leqslant c_8 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|\varepsilon_{n,1}|^2 + |\varepsilon_{n,2}|^2) \int_{\widetilde{l}} \frac{d\lambda}{|2n - \lambda|^2} \leqslant c_9 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|\varepsilon_{n,1}|^2 + |\varepsilon_{n,2}|^2) \leqslant c_{10}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

где $\widetilde{l} = l_1 \cup l_2$. Из (3.14)–(3.16) вытекает (3.13). Из (3.12), (3.13) и [12; гл. 3, п. 3.2.2] следует, что

$$\int_R |f(\lambda)|^2\, d\lambda < \infty.$$

Предложение 2 доказано.

Таким образом, функция $\Delta(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и, стало быть, существует потенциал $V \in L_2(0, \pi)$ такой, что спектр соответствующей задачи(1.1), (1.2), (2.1) определяется формулой (3.1).

Теорема 2 доказана.

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за ценные замечания.

Список литературы

[1] М. Г. Гасымов, Т. Т. Джабиев, “Решение обратной задачи по двум спектрам для уравнения Дирака на конечном отрезке”, *Докл. АН Азерб. ССР*, **22**:7 (1966), 3–7.

[2] S. Albeverio, R. Hryniv, Y. Mykytyuk, “Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials”, *Russ. J. Math. Phys.*, **12**:4 (2005), 406–423.

[3] Т. В. Мисюра, “Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. II”, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, **31**, Изд-во Харьк. ун-та, Харьков, 1979, 102–109.

[4] И. М. Набиев, “Решение обратной квазипериодической задачи для системы Дирака”, *Матем. заметки*, **89**:6 (2011), 885–893; англ. пер.: I. M. Nabiev, “Solution of the inverse quasiperiodic problem for the Dirac system”, *Math. Notes*, **89**:6 (2011), 845–852.

[5] В. А. Юрко, “Обратная спектральная задача для сингулярных несамосопряженных дифференциальных систем”, *Матем. сб.*, **195**:12 (2004), 123–156; англ. пер.: V. A. Yurko, “An inverse spectral problem for singular non-self-adjoint differential systems”, *Sb. Math.*, **195**:12 (2004), 1823–1854.

[6] V. Yurko, “Inverse spectral problems for differential systems on a finite interval”, *Results Math.*, **48**:3-4 (2005), 371–386.

[7] А. С. Макин, “О спектре двухточечных краевых задач для оператора Дирака”, *Дифференц. уравнения*, **57**:8 (2021), 1023–1031; англ. пер.: A. S. Makin, “On the spectrum of two-point boundary value problems for the Dirac operator”, *Differ. Equ.*, **57**:8 (2021), 993–1002.

[8] V. Tkachenko, “Non-self-adjoint periodic Dirac operators”, *Operator theory, system theory and related topics* (Beer-Sheva/Rehovot, 1997), Oper. Theory Adv. Appl., **123**, Birkhäuser, Basel, 2001, 485–512.

[9] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова Думка, Киев, 1977, 331 с.; англ. пер.: V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville operators and applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **22**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986, xii+367 pp.

[10] V. Tkachenko, “Non-selfadjoint periodic Dirac operators with finite-band spectra”, *Integral Equations Operator Theory*, **36**:3 (2000), 325–348.

[11] Б. Я. Левин, *Целые функции*, Курс лекций, МГУ, М., 1971, 124 с.; англ. пер.: B. Ya. Levin, *Lectures on entire functions*, Transl. Math. Monogr., **150**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, xvi+248 pp.

[12] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, 2-е изд., Наука, М., 1977, 455 с.; англ. пер. 1-го изд.: S. M. Nikol’skiĭ, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Grundlehren Math. Wiss., **205**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975, viii+418 pp.

[13] Б. Я. Левин, И. В. Островский, “О малых возмущениях множества корней функций типа синуса”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:1 (1979), 87–110; англ. пер.: B. J. Levin, I. V. Ostrovskii, “On small perturbations of the set of zeros of functions of sine type”, *Math. USSR-Izv.*, **14**:1 (1980), 79–101.

[14] P. Djakov, B. Mityagin, “Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions”, *Indiana Univ. Math. J.*, **61**:1 (2012), 359–398.

[15] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, 4-е изд., Наука, М., 1973, 736 с.; нем. пер. 3-го изд.: M. A. Lawrentjew, B. W. Schabat, *Methoden der komplexen Funktionentheorie*, Math. Naturwiss. Tech., **13**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967, x+846 pp.

[16] J.-J. Sansuc, V. Tkachenko, “Characterization of the periodic and anti-periodic spectra of nonselfadjoint Hill’s operators”, *New results in operator theory and its applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **98**, Birkhäuser, Basel, 1997, 216–224.

Александр Сергеевич Макин
(Alexander S. Makin)
МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва
E-mail: alexmakin@yandex.ru

Поступила в редакцию
15.12.2021 и 31.08.2022