ОЦЕНКИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ L^p НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

А. М. Седлецкий

Пусть $p \in (0, \infty)$, $\sigma \in (0, \infty)$, $\|f(x+iy)\|_p = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx\right)^{1/p}$; W_σ^p есть класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, для которых $\|f(x)\|_p < \infty$, $z = x+iy$. Для $f \in W_\sigma^p$ имеют место следующие ([1], стр. 102) неравенства: 1) $\|f(x+iy)\|_s \leqslant \leqslant |\pi y|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}} \|f\|_p \exp(\sigma|y|)$, $1 \leqslant p < s$ (см. [2]); 2) $|f(z)|^p \leqslant A_p y^{-1} \|f\|_p^p \operatorname{sh}(p\sigma y)$, $p \in [1, \infty)$ (см. [3]). Эти оценки не являются асимптотическими. В настоящей работе исследуется поведение $\|f(x+iy)\|_s$ и $|f(z)|$ соответственно при $|y| \to \infty$ и $|z| \to \infty$.

Теорема 1. *Если* $f \in W_\sigma^p$, *то* 1) *для* $\forall s \in (p, \infty)$ *при* $|y| \to \infty$ $\|f(x+iy)\|_s = = o\left(|y|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}} \exp(\sigma|y|)\right)$; 2) *при* $|z| \to \infty$ $|f(z)| = o\left\{(|y|+1)^{-\frac{1}{p}} \exp(\sigma|y|)\right\}$ *равномерно относительно* $\arg z$.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(r)$ *определена на* $(0, \infty)$ *и* $\varphi(r) \downarrow 0$ *при* $r \uparrow \infty$. *Тогда* 1) *для* $\forall s \in [p, \infty) \exists F \in W_\sigma^p$ *такая, что* $\|F(x \pm ir_k)\|_s \geqslant \varphi(r_k) r_k^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}} \exp(\sigma r_k)$ *для некоторой* $\{r_k\} \uparrow \infty$; 2) $\exists F \in W_\sigma^p$ *такая, что* $|F(\pm ir_k)| \geqslant \varphi(r_k) r_k^{-1/p} \exp(\sigma r_k)$ *для некоторой* $\{r_k\} \uparrow \infty$.

Впредь H^p обозначает класс функций, голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Im} z = y > 0$ и таких, что $\sup\limits_{y>0} \|f(x+iy)\|_p < \infty$.

Лемма 1. *Если* $f \in H^p$, *то* 1) *при* $y \to \infty$ $\|f(x+iy)\|_s = o\left(y^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}}\right)$, $p < s < \infty$; 2) *при* $|z| \to \infty$ $|f(x+iy)|^p = o(y^{-1})$ *равномерно в* $\forall$ *полуплоскости вида* $\operatorname{Im} z \geqslant \delta > 0$.

Если $p = 2$, то по теореме Пэли—Винера $f(z) = \int \exp(izt) g(t)\, dt$, где $g \in L^2(0, \infty)$, $g = 0$ на $(-\infty, 0)$. Для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a \in (0, \infty)$ так, что $\|g\|_{L^2(a, \infty)} \leqslant \varepsilon$; $\exists$—многочлен P такой, что $\|g - P\|_{L^2(0, a)} \leqslant \varepsilon$. Записав

$$f(z) = \int\limits_0^a e^{izt}\{g(t) - P(t)\}\, dt + \int\limits_0^a e^{izt} P(t)\, dt + \int\limits_a^\infty e^{izt} g(t)\, dt,$$

во втором интеграле проинтегрируем по частям, а к остальным применим неравенство Шварца. Получим $|f(z)| \leqslant 2\varepsilon(2y)^{-1/2} + O(|z|^{-1})$, что дает утверждение 2) леммы. При $p \neq 2$ запишем $f = EB$, где B—произведение Бляшке, $E \in H^p$ и не имеет корней. К функции $E^{p/2} \in H^2$ достаточно применить только что доказанное.

Теперь рассмотрим $\|f(x+iy)\|_s = \left(\int |f(x+iy)|^p |f(x+iy)|^{s-p} dx\right)^{1/s}$, $s > p$.

Простая оценка дает $\|f(x+iy)\|_s \leqslant \|f(x+iy)\|_p^{p/s} \sup\limits_x |f(x+iy)|^{1-\frac{p}{s}}$. Так как $f \in H^p$, то первый сомножитель ограничен при $y \uparrow \infty$; если ко второму применить утверждение 2), то полностью получим лемму.

Лемма 2. *Если* $f(z) \in W_\sigma^p$, *то* 1) $f(z+ih) \in W_\sigma^p$ $\forall h \in (-\infty, \infty)$; 2) $f(z) \exp(i\sigma z) \in H^p$.

Лемма 3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \{t^2 + h^2\}^{-r} dt \leqslant c|h|^{1-2r}$, $r > 1/2$.

Доказательство теоремы 1. 1) следует из лемм 1, 2. При доказательстве 2) достаточно считать, что $y \geqslant 0$. Пусть $f(w) \in W^p_\sigma$, $w = u + iv$. По лемме 2 $f(w-i) \in W^p_\sigma$ и $e^{i\sigma w} f(w-i) \in H^p$. К функции $e^{i\sigma w} f(w-i)$ надо применить лемму 1 с $\delta = 1$, а затем положить $w - i = z$.

Доказательство теоремы 2. 2) При $p \in [2, \infty)$ ищем F в виде $F(z) = \int \exp(-izt) f(t)\,dt$, где $\operatorname{supp} f \subseteq [-\sigma, \sigma]$. Построим $\{r_k\} \uparrow \infty$ так, чтобы 1) $\varphi(r_k) \leqslant k^{-1}$, 2) $t_k = -r_k^{-1} > 2^{-1} t_{k-1}$, 3) $t_1 > -\sigma$. Пусть $I_k = [t_k, 2^{-1} t_k]$. Ясно, что все $I_k \subset (-\sigma, 0)$ и $I_k \cap I_n = \varnothing$ при $k \neq n$. При $t \leqslant 0$ определим $g(t) = f(t + \sigma) = 0$ вне $\bigcup I_k$. если $t \in I_k$, то положим $g(t) = f(t+\sigma) = r_k^{1/q} \varphi(r_k)$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Пусть $f(t) = f(-t)$ Легко видеть, что $f \in L^q(-\sigma, \sigma)$, по теореме Хаусдорфа—Юнга $F \in W^p_\sigma$. Теперь

$$e^{i\sigma z} F(z) = \int_{-2\sigma}^{0} e^{-izt} f(t+\sigma)\,dt = \int_{-2\sigma}^{-\sigma} + \int_{-\sigma}^{0} = G(z) + H(z).$$

Ясно, что $|G(ir_k)| = O(\exp(-\sigma r_k))$, а $|H(ir_k)| = \int_{-\sigma}^{0} \exp(r_k t)\, g(t)\,dt \geqslant \int_{t_k}^{2^{-1}t_k} \geqslant$ $\geqslant C r_k^{-1/p} \varphi(r_k)$. Поэтому для $r_k > N$ $\exp(-\sigma r_k) |F(ir_k)| \geqslant M r_k^{-1/p} \varphi(r_k)$. В силу четности f полученное неравенство верно и для $|F(-ir_k)|$. Итак, для $p \in [2, \infty)$ F построена. Если $p < 2$, то $\exists$ — целое n так, что $np \geqslant 2$. По доказанному $\exists F \in W^{pn}_{\sigma/n}$ так, что $|F(\pm ir_k)| \geqslant \varphi^{1/n}(r_k)\, r_k^{-1/pn} e^{\frac{\sigma}{n} r_k}$. В качестве искомой функции можно взять F^n.

1) Если $p \in [1, \infty)$, а F — только что построенная функция, то функция $e^{i\sigma(z+ih)} F(z+ih) \in H^p$ и, следовательно, представима интегралом Пуассона:

$$\exp(i\sigma(x+2ih))\, F(x+2ih) = \pi^{-1} h \int \{(t-x)^2 + h^2\}^{-1} \exp(i\sigma(t+ih))\, F(t+ih)\,dt, \quad h > 0.$$

Применим к интегралу неравенство Гёльдера и лемму 3:

$$e^{-2\sigma h} |F(x+2ih)| \leqslant c \cdot h^{-1/s} e^{-\sigma h} \|F(t+ih)\|_s, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Положим $x = 0$, $h = 2^{-1} r_k$. Тогда

$$(1) \quad \|F(t + ir_k/2)\|_s \geqslant c_1 (r_k/2)^{1/s} \exp(-\sigma r_k/2)\, |F(ir_k)| \geqslant$$
$$\geqslant c_2 (r_k/2)^{1/s - 1/p} \varphi(r_k)\, e^{\sigma r_k/2}.$$

Ясно, что можно ограничиться рассмотрением медленно убывающей $\varphi(r)$, т. е. такой, для которой условие $\varphi(r_k) \geqslant c_3 \varphi(r_k/2)$ не будет противоречить условиям 1), 2) при построении $\{r_k\}$. Значит, с учетом четности F (1) дает требуемое.

Пусть $p < 1$, $p \leqslant s$. Для некоторого натурального n $pn \geqslant 1$; $\exists\, F \in W^{pn}_{\sigma/n}$ так, что $\|F(x \pm ir_k)\|_{sn} \geqslant r_k^{1/sn - 1/pn} \varphi^{1/n}(r_k) \exp(\sigma r_k/n)$. В качестве искомой функции теперь можно взять F^n.

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. P. Boas, Entire functions, New York, 1954.

[2] С. М. Никольский, Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 38 (1951), 244—278.

[3] J. Korevaar, An inequality for entire functions of exponential type, Niew. Arch. Wiskunde (2), 23 (1949), 55—62.

Поступило в Правление общества 21 февраля 1974 г.