A. I. Martikaynen, Remark on the strong law of large numbers for sums of pairwise independent random variables, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1992, Volume 194, 114–118

А.И.Мартикайнен

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СУММ ПОПАРНО НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

I. Введение.

Хорошо известен следующий вариант усиленного закона больших чисел [I]. Пусть $\{X_n\}$ – последовательность взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\{b_n\}$ – возрастающая последовательность положительных чисел, $\sum_{k=n}^{\infty} b_k^{-2} = O(nb_n^{-2})$ (пределы здесь и далее при $n \to \infty$). Если $\sum_n P(|X_1| > b_n) < \infty$, то $(S_n - a_n)/b_n \longrightarrow 0$ п.н. для некоторой числовой последовательности $\{a_n\}$. При $\sum_{k=n}^{\infty} b_k^{-1} = O(nb_n^{-1})$ это утверждение остается верным [2] и без предположения независимости X_n (причем с $a_n = 0$). Если же X_n – попарно независимы, то, как показал Этемади, оно справедливо и при $b_n = n$ [3]: $E|X_1| < \infty \Rightarrow (S_n - ES_n)/n \to 0$ п.н. Отметим, что обратная импликация

$$(S_n - a_n)/b_n \to 0 \text{ п.н.} \Longrightarrow \sum_n P(|X_1| > b_n) < \infty, \qquad (I)$$

справедлива при попарно независимых X_n для любой последовательности $b_n \uparrow \infty$. В [4] отмечено, что утверждения слева и справа в (I) эквивалентны и в сепарабельном гильбертовом пространстве (с нормой $|\cdot|$) при попарно независимых X_n, $a_n = 0$ и $b_n = n^{1/\gamma}$, $0 < \gamma < 1$. Однако при $1 < \gamma < 2$ в [4] показано лишь, что

$$E|X_1|^{\gamma}(\log^+|X_1|)^{\gamma} < \infty \Longrightarrow (S_n - ES_n)/n^{1/\gamma} \longrightarrow 0 \qquad \text{п.н.}$$

с $\log^+ x = \log(2 \vee x)$. По существу, для b_n, растущих медленнее, чем n, используется лишь ортогональность X_n (сохраняющаяся и после усечения X_n). Примеры, иллюстрирующие разницу между случаем попарно независимых X_n и случаем независимых X_n, можно найти в [5].

В настоящей заметке мы покажем, что в случае, когда b_n/n стремится к 0 с логарифмической скоростью, эквивалентность утверждений в (I) все же сохраняется.

2. ТЕОРЕМА. Пусть $\{X_n\}$ – последовательность попарно независимых случайных величин, $\gamma > 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Если

$E|X_1|(\log^+|X_1|)^\gamma < \infty$, то $(S_n - ES_n)/(n(\log n)^{-\gamma}) \to 0$ п.н.

Если для некоторой последовательности постоянных $\{a_n\}$ справедливо соотношение $(S_n - a_n)/(n(\log n)^{-\gamma}) \longrightarrow 0$ п.н., то $E|X_1|(\log^+|X_1|)^\gamma < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе утверждение теоремы вытекает непосредственно из леммы Бореля-Кантелли, которая, как известно, применима и к последовательностям попарно независимых событий. Докажем первое утверждение теоремы. Поскольку $E|X_1| < \infty$, имеем $X_n = X_n^+ - X_n^- = (X_n^+ - EX_n^+) - (X_n^- - EX_n^-)$ с $X_n^+ = X_n I(X_n \geq 0)$. Достаточно доказать теорему отдельно для последовательностей попарно независимых случайных величин $\{X_n^+ - EX_n^+\}$ и $\{X_n^- - EX_n^-\}$. Поэтому с самого начала можно считать, что $X_n \geq -C$ при некотором $C > 0$ и $EX_n = 0$. Введем обозначения: $F(x) = P(X_1 < x)$, $\tau \geq 2 + \gamma$, $d_n = n(\log^+ n)^{-\tau}$,

$$Y_{n,i} = X_i I(X_i < d_n), \quad Z_{n,i} = X_i I(d_n \leq X_i < b_n),$$

$$U_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} Y_{n,i}, \quad V_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} Z_{n,i}, \quad b_n = n/(\log^+ n)^\gamma.$$

Заметим, что $\int_x^\infty y\, dF(y) \leq (\log x)^{-\gamma} \int_x^\infty y(\log y)^\gamma dF(y)$ при $x > 1$ и, следовательно, $\int_{d_n}^\infty y\, dF(y) = o((\log n)^{-\gamma})$.

Поэтому

$$\max_{1\leq k\leq n} |EV_{n,k}| = n|EZ_{n,1}| = n\int_{d_n}^{b_n} x\, dF(x) = o(b_n)$$

и при всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$P_n \equiv P(\max_{1\leq k\leq n} |S_k - ES_k| > \varepsilon b_n) \leq$$

$$\leq P(\max_{1\leq k\leq n} |U_{n,k} - EU_{n,k}| > \tfrac{\varepsilon}{3} b_n) + P(\max_{1\leq k\leq n} |V_{n,k}| > \tfrac{\varepsilon}{3} b_n) + \quad (2)$$

$$+P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}\{X_k \neq u_{n,k}+v_{n,k}\}\Big) \equiv q_n + r_n + t_n .$$

Применяя неравенство Радемахера к ортогональной системе случайных величин $\{y_{n,i}-Ey_{n,i}\}_{i=1}^{n}$, получаем

$$q_n \le \frac{9}{\varepsilon^2} b_n^{-2} E \max_{1\le k\le n} (u_{n,k}-Eu_{n,k})^2 \le$$

$$\le C_1 b_n^{-2}(\log n)^2 n \mathcal{D} y_{n,1} \le C_1 n^{-1}(\log n)^{2\gamma+2}\int_{-c}^{d_n} x\, dF(x) .$$

Отсюда при $f_n = P(2^{n-1}\le |X_1|<2^n)$, $n\ge 2$, $f_1=P(|X_1|<2)$, $j_n = n-\tau\log n$, $l_k = k+\tau\log k-1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_{2^n} \le C_1\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{2\gamma+2}\sum_{k\le j_n} 2^{2k} f_k \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} C_1 2^{2k} f_k \sum_{n\ge l_k} 2^{-n} n^{2\gamma+2} \le C_2\sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k-l_k} l_k^{2\gamma+2} f_k = C_2\sum_{k=1}^{\infty} 2^k k^{\gamma} f_k < \infty . \tag{3}$$

Используя монотонность сумм $v_{n,k}$ по k при $1\le k\le n$ и соотношение $0\le Ev_{n,n}\le n\int_{d_n}^{\infty} x\, dF(x) = o(b_n)$, получаем при всех достаточно больших n

$$r_n \le P\Big(v_{n,n} > \frac{\varepsilon}{3} b_n\Big) \le P\Big(v_{n,n} - Ev_{n,n} > \frac{\varepsilon}{6} b_n\Big) \le$$

$$\le C_3 b_n^{-2}\mathcal{D} v_{n,n} \le C_3 n b_n^{-2} E Z_{n,1}^2 \le C_3(\log n)^{2\gamma} n^{-1}\int_0^{b_n} x^2 dF(x) .$$

Традиционным изменением порядка суммирования записываем с $i_n = n-\gamma\log n$, $m_k = k+\gamma\log k-1$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} r_{2^n} \le C_3\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{2\gamma}\sum_{k\le i_n} 2^{2k} f_k \le$$

$$\le C_3\sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} f_k \sum_{n\ge m_k} 2^{-n} n^{2\gamma} \le C_4\sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k-m_k} m_k^{2\gamma} f_k \le$$

$$\le C_5\sum_{k=1}^{\infty} 2^k k^{\gamma} f_k < \infty ,$$

так что

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_{2^n} < \infty . \qquad (4)$$

Наконец,

$$t_n \leq \sum_{k=1}^{n} P(X_k \neq u_{n,k} + v_{n,k}) = nP(X_1 > b_n)$$

и аналогичным изменением порядка суммирования получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_{2^n} < \infty . \qquad (5)$$

Собирая оценки (2), (3), (4) и (5), доказываем, что $\sum_{n=1}^{\infty} P_{2^n} < \infty$. С помощью леммы Бореля-Кантелли заключаем

$$P(|S_n|/b_n > 2\varepsilon \text{ б.ч.}) = P(\max_{2^{n-1} \leq k \leq 2^n} |S_k|/b_k > 2\varepsilon \text{ б.ч.}) \leq$$

$$\leq P(\max_{1 \leq k \leq 2^n} |S_k| > \varepsilon b_{2^n} \text{ б.ч.}) = 0.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Небольшим усложнением доказательства можно перенести теорему на случай сепарабельного гильбертова пространства. В этом случае представление $X_n = X_n^+ - X_n^-$ использовать уже не удается. Основанная на нем монотонность сумм $v_{n,k}$ по k заменяется оценкой

$$\max_{1 \leq k \leq n} |v_{n,k}| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_{n,i}| = \sum_{i=1}^{n} (|z_{n,i}| - E|z_{n,i}|) + o(b_n) ,$$

а неравенство Радемахера – соответствующим его обобщением (см., например, [4]). Остальные изменения не заслуживают упоминания.

Литература

1. F e l l e r W. A limit theorem for random variables with infinite moments. – Amer.J.Math., 1946, v.68, N 2, p.257-262.
2. М а р т и к а й н е н А.И., П е т р о в В.В. Об одной теореме Феллера – Теория вероятн. и ее примен., 1980, т.25, № 1, с.194-197.
3. E t e m a d i N. An elementary proof of the strong law of large numbers. – Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.,

1981, bd.55, N 1, S.119-122.

4. L i G a n g. On the strong convergence of random elements in Banach spaces. - Sichuan Daxue Xuebao - Сычуань дасюэ сюэбао, 1988, v.25, N 4, p.381-389 (кит.).

5. B r a d l e y R. A stationary, pairwise independent, absolutely regular sequence for which the central limit theorem fails. - Probab.Theory and relat. Fields, 1989, v.81, N 1, p.1-10.