Сибирский математический журнал
Июль—август, 2022. Том 63, № 4

УДК 512.815.1

ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ $3j$–СИМВОЛОВ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathfrak{gl}_3$ В БАЗИСЕ ГЕЛЬФАНДА — ЦЕТЛИНА

Д. В. Артамонов

Аннотация. Приводится явная и простая формула для произвольного $3j$-символа для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_3$. Он выражается через значения некоторых гипергеометрических функций при подстановке ± 1 вместо всех аргументов. Задача нахождения произвольного $3j$-символа, в сущности, эквивалентна задаче нахождения произвольного коэффициента Клебша — Гордана для алгебры $\mathfrak{gl}_3$. Данные коэффициенты играют важную роль в квантовой механике в теории кварков.

DOI 10.33048/smzh.2022.63.401

Ключевые слова: коэффициенты Клебша — Гордана, $3j$-символы, гипергеометрические функции.

1. Введение

Пусть имеется разложение тензорного произведения представлений V и W алгебры $\mathfrak{gl}_3$ в прямую сумму неприводимых:

$$V \otimes W = \sum_{U,s} U^s, \tag{1}$$

где U обозначает типы неприводимых представлений, возникающих при разложении, а индекс s перечисляет неприводимые представления U^s данного типа U, возникающие при разложении[1)].

Пусть в этих представлениях выбраны базисы $\{v_\mu\}$, $\{w_\nu\}$, $\{u^s_\rho\}$ соответственно. *Коэффициентами Клебша — Гордана* называют числовые коэффициенты $C^{U,\rho,s}_{V,W;\mu,\nu} \in \mathbb{C}$, возникающие в разложении

$$v_\mu \otimes w_\nu = \sum_{s,\rho} C^{U,\rho,s}_{V,W;\mu,\nu} u^s_\rho. \tag{2}$$

Также коэффициентами Клебша — Гордана называют коэффициенты $D^{U,\rho,s}_{V,W;\mu,\nu} \in \mathbb{C}$, возникающие в разложении

$$u^s_\rho = \sum_{\mu,\nu} D^{U,\rho,s}_{V,W;\mu,\nu} v_\mu \otimes w_\nu. \tag{3}$$

[1)] Аккуратное определение индекса s таково. Мы записываем разложение так: $V \otimes W = \sum\limits_U M_U \otimes U$, где M_U — некоторое линейное пространство, называемое пространством кратности. Пусть $\{e_i\}$ — его базис, тогда $U^s := e_s \otimes U$.

© 2022 Артамонов Д. В.

Данные коэффициенты в случае алгебр $\mathfrak{gl}_2$, $\mathfrak{gl}_3$ играют важную роль в квантовой механике, а именно, коэффициенты Клебша — Гордана для алгебры $\mathfrak{gl}_2$ — в теории спина (см. [1]), для $\mathfrak{gl}_3$ — в теории кварков (см. [2]). Задача их вычисления в случае $\mathfrak{gl}_2$ довольно проста, имеются явные формулы, впервые полученные Ван-дер-Варденом [3]. Коэффициенты Клебша — Гордана для алгебры $\mathfrak{sl}_2$ дают возможность построить новые реализации представлений групп Ли, связанных с вещественной формой этой алгеброй Ли ($SU(2)$ в [1, 4, 5]; $SO(3)$ в [4–6]). Кроме того, они возникают при решении задач в теории эластичности (см. [7, 8], где также идет речь о коэффициентах для группы $SO(3)$).

При этом для приложений в квантовой механике особенно важно вычислить коэффициенты Клебша — Гордана в случае, когда в представлениях используется базис Гельфанда — Цетлина.

Задача вычисления коэффициентов Клебша — Гордана для $\mathfrak{gl}_n$ при $n \geq 3$ существенно усложняется по сравнению со случаем $n = 2$. Впервые при $n = 3$ они были вычислены в [9–13]. В этих работах рассматривается случай $\mathfrak{gl}_n$, но именно в случае $n = 3$ вычисления, проведенные в этих работах, позволяют в принципе получить значение произвольного коэффициента Клебша — Гордана. Вычисления в [9–13] основаны на следующем принципе. Рассматриваются тензорные операторы между представлениями $\mathfrak{gl}_n$, т. е. наборы $\{f_u\}$ отображений

$$f_u : V \to W$$

между представлениями $\mathfrak{gl}_n$, отображения $\{f_u\}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с векторами представления U алгебры $\mathfrak{gl}_n$. При этом должно выполняться некоторое условие согласованности с действием $\mathfrak{gl}_n$. Матричные элементы тензорных операторов тесно связаны с коэффициентами Клебша — Гордана (теорема Вигнера — Эккарта). В [9–13] дается некоторая явная реализация тензорных операторов (в разных работах рассматриваются случаи разных представлений U). Эта явная реализация не позволяет вычислить матричные элементы тензорного оператора явно, но приводит к алгоритму индуктивного типа, согласно которому матричные элементы тензорного оператора для рассматриваемого U выражаются через матричные элементы тензорных операторов для U, рассмотренных в предыдущих работах. Таким образом, явной итоговой формулы в этих работах нет, ясно лишь, что она может в принципе быть получена.

Так что проблема получения *явной и простой* формулы для коэффициентов Клебша — Гордана для алгебры $\mathfrak{gl}_3$ оставалась нерешенной. Обзор работ на эту тему может быть найден в [14]. В этой работе впервые *явно* вычисляются коэффициенты Клебша — Гордана для случая $\mathfrak{gl}_3$ для разложения (3). А именно, в этой работе получена явная формула вида $D^{U,\gamma,s}_{V,W;\alpha,\beta} = \dots$. Для вычисления тензорное произведение реализуется в пространстве функций на декартовом произведении $GL_3 \times GL_3$ и явно находятся функции на этом произведении, соответствующие векторам u^s_ρ в (2). Эти функции раскладываются в линейную комбинацию произведений функций на отдельных сомножителях, коэффициенты в этом разложении и является $D^{U,\gamma,s}_{V,W;\alpha,\beta}$.

К сожалению, формула весьма громоздка, так что задача получения *простой* формулы осталась нерешенной.

Отметим, что для вычисления коэффициентов Клебша — Гордана необходимо подобрать правильную явную реализацию представлений $\mathfrak{gl}_3$. Явная реализация представления, подходящая для исследования разложения тензор-

ного произведения, была найдена еще в [9], где, в частности, показано следующее. При использовании реализации представления в пространстве функций на группе GL_3 функции, отвечающие базисным векторам Гельфанда — Цетлина, могут быть явно выражены через гипергеометрическую функцию Гаусса (см. более современный взгляд в [15]). Эта идея и была использована в [14].

В настоящей работе по сравнению с [14] меняется точка зрения, это позволяет получить более простой результат. В отличие от [14] вычисляются не непосредственно коэффициенты Клебша — Гордана, а $3j$-символы (см. их определение и связь с коэффициентами Клебша — Гордана в разд. 4.1). Само вычисление несложными рассмотрениями сводится к тому, что нужно описать разложение инвариантных функций на $GL_3 \times GL_3 \times GL_3$ в линейную комбинацию произведений функций на сомножителях. Для нахождения коэффициентов этой линейной комбинации используется явное описание инвариантного скалярного произведения в пространстве функций. В результате $3j$-символы выражаются через значения гипергеометрических функций (см. также заключительную часть работы [15]). Так что удается полностью решить проблему — получить *явные и простые* формулы для коэффициентов Клебша — Гордана для произвольной алгебры $\mathfrak{gl}_3$. Основной результат сформулирован в теореме 2, в которой дается формула для $3j$-символа в этом случае (см. (33)).

В дополнении 6 приводим правила отбора для коэффициентов Клебша — Гордана.

2. Предварительные сведения

2.1. A-гипергеометрические функции. Подробная информация о Г-ряде может быть найдена в [16].

Пусть $B \subset \mathbb{Z}^N$ — решетка, $\mu \in \mathbb{Z}^N$ — фиксированный вектор. Определим *гипергеометрический* Г-*ряд* от переменных $z_1, \dots, z_N$ формулой

$$\mathscr{F}_\mu(z, B) = \sum_{b \in B} \frac{z^{b+\mu}}{\Gamma(b+\mu+1)}, \tag{4}$$

где $z = (z_1, \dots, z_N)$, в числителе и знаменателе используются мультииндексные обозначения

$$z^{b+\mu} := \prod_{i=1}^{N} z_i^{b_i+\mu_i}, \quad \Gamma(b+\mu+1) := \prod_{i=1}^{N} \Gamma(b_i+\mu_i+1).$$

Заметим, что если хотя бы одна из компонент вектора $b+\mu$ целая отрицательная, то соответствующее слагаемое в (4) обращается в нуль. Благодаря этому в рассматриваемых в работе Г-рядах будет иметься только конечное число членов. Для простоты будем писать факториалы вместо Г-функций.

Г-ряд удовлетворяет системе Гельфанда — Капранова — Зелевинского (ГКЗ).

Выпишем ее явно в случае, когда $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, $B = \mathbb{Z}\langle(1, -1, -1, 1)\rangle$:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_4} - \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_3}\right) F_{\mu,B} = 0,\\
&z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} F_{\mu,B} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} F_{\mu,B} = (\mu_1 + \mu_2) F_{\mu,B},\\
&z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} F_{\mu,B} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} F_{\mu,B} = (\mu_1 + \mu_3) F_{\mu,B},\\
&z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} F_{\mu,B} - z_4 \frac{\partial}{\partial z_4} F_{\mu,B} = (\mu_1 - \mu_4) F_{\mu,B}.
\end{aligned} \tag{5}$$

2.2. Функциональная реализация и базис Гельфанда — Цетлина. В работе рассматриваются группы и алгебры Ли над полем $\mathbb{C}$.

Функции на группе GL_3 образуют представление группы GL_3. На функцию $f(g)$, $g \in GL_3$, элемент группы $X \in GL_3$ действует с помощью правых сдвигов по правилу

$$(Xf)(g) = f(gX).$$

Переходя к инфинитезимальному действию, получаем, что на пространстве всех функций на GL_3 имеется действие $\mathfrak{gl}_3$.

Любое конечномерное неприводимое представление может быть реализовано как подпредставление в пространстве функций. А именно, если $[m_1, m_2, m_3]$ — старший вес, то в пространстве всех функций имеется старший вектор с таким весом, который явно записывается следующим образом.

Пусть a_i^j, $i, j = 1, 2, 3$, — функция матричного элемента на группе GL_3. Здесь j — номер строки, а i — номер столбца. Кроме того, положим

$$a_{i_1,\dots,i_k} := \det\left(a_i^j\right)_{i=i_1,\dots,i_k}^{j=1,\dots,k},$$

где берется минор подматрицы в матрице $\left(a_i^j\right)$, образованный строками с номерами $1, \dots, k$ и столбцами $i_1, \dots, i_k$. Оператор $E_{i,j}$ действует на определитель путем действия на столбцовые индексы

$$E_{i,j} a_{i_1,\dots,i_k} = a_{\{i_1,\dots,i_k\}\setminus_{j\mapsto i}}, \tag{6}$$

где $\cdot|_{j\mapsto i}$ означает операцию замены индекса j на i; если индекс j отсутствует среди $\{i_1, \dots, i_k\}$, то получается нуль.

Видно, что повышающие операторы $E_{i,j}$, $i < j$, стараются заменить индекс меньшим, так что вектор

$$v_0 = \frac{a_1^{m_1-m_2}}{(m_1-m_2)!} \frac{a_{1,2}^{m_2-m_3}}{(m_2-m_3)!} \frac{a_{1,2,3}^{m_3}}{m_3!}$$

аннулируется всеми повышающими операторами. Значит, v_0 является старшим для алгебры $\mathfrak{gl}_3$, при этом вес его равен $[m_1, m_2, m_3]$.

Приведем формулу для функции, отвечающей диаграмме Гельфанда — Цетлина $\mathfrak{gl}_3$ (см. определение этого базиса в [17]). Сама диаграмма выглядит как целочисленная таблица, в которой выполнены условия промежуточности:

$$\begin{pmatrix} m_1 & & m_2 & & 0 \\ & k_1 & & k_2 & \\ & & s & & \end{pmatrix}.$$

Формула для функции, соответствующей этой диаграмме, приведена в следующей теореме, доказанной в [9].

Теорема 1. *Положим* $B_{GC} = \mathbb{Z}\langle(0,1,-1,-1,1,0)\rangle$, $\mu = (m_1-k_1, s-m_2, k_1-s, m_2-k_2, 0, k_2)$. *Тогда диаграмме соответствует*

$$\mathscr{F}_\mu(a_3, a_1, a_2, a_{1,3}, a_{2,3}, a_{1,2}, B_{GC}).$$

В [9] приведено выражение данной функции через гипергеометрическую функцию Гаусса, а более современный взгляд с использованием Г-рядов приведен в [15].

Для краткости при использовании Г-рядов, отвечающих решетке B_{BG} из теоремы 1, будем опускать решетку B_{GC} и писать просто $\mathscr{F}_\mu(a)$. При использовании других решеток будем их писать явно.

Отметим еще, что первое уравнение из системы ГКЗ в этом случае выглядит так:

$$\mathscr{O}\mathscr{F} = 0, \quad \mathscr{O} = \frac{\partial^2}{\partial a_1 \partial a_{2,3}} - \frac{\partial^2}{\partial a_2 \partial a_{1,3}}. \tag{7}$$

2.3. Система А-ГКЗ и пространство ее решений. А-ГКЗ реализация.

2.3.1. Система А-ГКЗ. Базисы F_μ и $\widetilde{F}_\mu$ в пространстве решений. Вместо определителей a_X, $X \subset \{1,2,3\}$, подчиняющихся соотношениям Плюккера, введем независимые переменные A_X, $X \subset \{1,2,3\}$, предполагаем, что A_X кососимметрично по индексам множества X.

Вернемся к системе ГКЗ (7) и изменим операторы, ее задающие. Рассмотрим функции $F(A)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\overline{\mathscr{O}}_A F = 0, \overline{\mathscr{O}}_A = \frac{\partial^2}{\partial A_1 \partial A_{2,3}} - \frac{\partial^2}{\partial A_2 \partial A_{1,3}} + \frac{\partial^3}{\partial A_3 \partial A_{1,2}} \tag{8}$$

Эту систему будем называть *антисимметризованной системой Гельфанда — Капранова — Зелевинского* (или А-ГКЗ для краткости).

Найдем базис в пространстве полиномиальных решений этой системы. Используя равенство (65) из [14], можно показать, что решением является функция

$$F_\mu(A) := \sum_{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} q_s^\mu \zeta_A^s \mathscr{F}_{\mu - s(e_3 + e_{1,2})}(A), \tag{9}$$

где

$$t_0^\mu = 1, \quad t_s^\mu = \frac{1}{s(s+1) + s(\mu_1 + \mu_2 + \mu_{1,3} + \mu_{2,3})} \text{ при } s > 0,$$

$$q_\mu^s = \frac{t_s^\mu}{\sum\limits_{s' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} t_{s'}^\mu}, \quad \zeta_A = A_1 A_{2,3} - A_2 A_{1,3}.$$

При этом $F_\mu = \mathscr{F}_\mu \cdot \mathrm{const}$ по модулю соотношений Плюккера.

В пространстве решений системы (8) можно найти и другой базис. Для этого положим

$$v = e_1 + e_{2,3} - e_2 - e_{1,3}, \quad r = e_3 + e_{1,2} - e_1 - e_{2,3} \tag{10}$$

и для всех $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ рассмотрим функции

$$\mathscr{F}_\mu^s(A) := \sum_{t \in \mathbb{Z}} \frac{\binom{t+s}{s} A^{\mu + tv}}{\Gamma(\mu + tv + 1)}.$$

Непосредственно проверяется, что функция

$$\widetilde{F}_\mu(A) = \sum_{s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} (-1)^s \mathscr{F}^s_{\mu-sr}(A)$$

также является решением (8). Введем на векторах сдвига, рассматриваемых $\mathrm{mod}\ B_{GC}$, порядок

$$\mu \preceq \nu \Leftrightarrow \mu = \nu - sr \mod B_{GC}, \quad s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{11}$$

Рассматривая носители[2)] функций $F_\mu(A)$, $\widetilde{F}_\mu(A)$, приходим к выводу, что набор функций $\widetilde{F}_\mu$ связан с F_μ нижне-унитреугольным относительно порядка (11) линейным преобразованием, т. е.

$$\widetilde{F}_\mu = \sum_{s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} d_s F_{\mu-sr}, \quad d_0 = 1.$$

Значит, функции $\widetilde{F}_\mu(A)$ также образуют базис в пространстве решений системы (8).

2.3.2. Реализация представлений в пространстве решений системы А-ГКЗ. Определим действие на переменные A_X алгебры $\mathfrak{gl}_3$ по правилу:

$$E_{i,j}A_X = \begin{cases} A_{X|_{j\mapsto i}}, & \text{если } j \in X, \text{ см. (6)}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Несложно проверяется, что эти формулы действительно задают действие алгебры Ли. На полиномы от A_X это действие распространяется по правилу Лейбница.

Оператор $\overline{\mathscr{O}}_A$ коммутирует с действием $\mathfrak{gl}_3$. Из этого следует, что пространство решений системы (8) образует представление (даже без применения соотношений Плюккера). При этом после применения соотношений Плюккера (т. е. при замене $A_X \mapsto a_X$) рассматриваемая реализация переходит в функциональную. Из этого следует, что функции F_μ, рассматриваемые для векторов сдвига μ, отвечающих всевозможным диаграммам Гельфанда — Цетлина неприводимого представления старшего веса $[m_1, m_2, 0]$ (см. теорему 1), образуют неприводимое представление данного старшего веса.

Эту реализацию представления будем называть А-ГКЗ-*реализацией.*

Несложно проверить, что вычитание из μ вектора r соответствует преобразованию диаграммы $k_1 \mapsto k_1 - 1$, $k_2 \mapsto k_2 + 1$. Таким образом, $\widetilde{F}_\mu$ для указанных выше μ также образуют базис в А-ГКЗ-реализации неприводимого представления.

2.3.3. Явный вид инвариантного скалярного произведения в А-ГКЗ реализации. А-ГКЗ реализация имеет то преимущество, что в ней можно явно записать инвариантное скалярное произведение. А именно, имеется скалярное произведение, определяемое на мономах следующим правилом:

$$\left\langle A_{X_1}^{\alpha_1} \dots A_{X_n}^{\alpha_n}, A_{Y_1}^{\beta_1} \dots A_{Y_m}^{\beta_m} \right\rangle$$

[2)] Носитель $\operatorname{supp} F$ функции, представленной в виде суммы степенного ряда, есть множество векторов показателей, входящих в ряд мономов.

отлично от нуля при условии, что $n = m$, и с точностью до перестановки $X_1 = Y_1$ и $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, X_n = Y_n, \alpha_n = \beta_n$. В этом случае

$$\left\langle A_{X_1}^{\alpha_1} \ldots A_{X_n}^{\alpha_n}, A_{X_1}^{\alpha_1} \ldots A_{X_n}^{\alpha_n} \right\rangle = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!.$$

Непосредственно проверяется, что это скалярное произведение инвариантно.

Функцию от всевозможных переменных A_X, $X \subset \{1, 2, 3\}$, будем обозначать просто через $f(A)$. Тогда скалярное произведение может быть (с использованием мультииндексных обозначений) записано так. Определим действие

$$f(A) \curvearrowright h(A) := f\left(\frac{d}{dA}\right) h(A), \tag{12}$$

тогда

$$\langle f(A), h(A) \rangle = f(A) \curvearrowright h(A) \mid_{A=0} .$$

В силу симметрии скалярного произведения можно также написать $\langle f(A), h(A) \rangle = h(A) \curvearrowright f(A) \mid_{A=0}$.

2.3.4. Связь между базисами F_μ и $\widetilde{F}_\mu$ А-ГКЗ реализации. Используем введенное скалярное произведение для нахождения связи двух построенных базисов А-ГКЗ реализации.

Сначала заметим, что $\mathscr{F}_\mu = \mathrm{const}\, F_\mu + pl$, где $pl = 0$ по модулю соотношений Плюккера. Но тогда для любой функции $g(A)$, являющейся решением системы А-ГКЗ, имеем

$$\langle h, \mathscr{F}_\mu \rangle = \mathrm{const} \langle h, F_\mu \rangle.$$

Поэтому для того чтобы установить, что

$$\widetilde{F}_\mu = \sum_{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} d_s^\mu F_{\mu - sr},$$

достаточно доказать, что

$$\langle \widetilde{F}_\mu, \mathscr{F}_\nu \rangle = \sum_{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} d_s^\mu \langle F_{\mu - sr}, \mathscr{F}_\nu \rangle. \tag{13}$$

Используя формулу (12) и определения функций $\widetilde{F}_\mu$, $\mathscr{F}_\nu$, получаем, что скалярное произведение этих функций отлично от нуля лишь в случае $\nu \preceq \mu$, т. е. $\nu = \mu - sr \mod B_{GC}$, причем

$$\langle \widetilde{F}_\mu, \mathscr{F}_{\mu - sr} \rangle = (-1)^s \mathscr{F}_{\mu - sr}^s(1),$$

где справа написан результат подстановки 1 вместо всех аргументов в $\mathscr{F}_{\mu - sr}^s(A)$.

Найдем скалярное произведение $\langle F_\mu, \mathscr{F}_\nu \rangle$. Заметим, что скалярное произведение вида $\langle \zeta^k h(A), \mathscr{F}_\nu \rangle$, где $k > 0$, равно нулю (используется формула (12) и тот факт, что ζ действует как оператор ГКЗ, который обращает в 0 функцию $\mathscr{F}_\nu$). Значит, отлично от нуля лишь скалярное произведение с первым слагаемым в (10), т. е.

$$\langle F_\mu, \mathscr{F}_\nu \rangle = \langle \mathscr{F}_\mu, \mathscr{F}_\nu \rangle.$$

Используя формулу (12), получаем, что выражение отлично от нуля лишь при $\mu = \nu \bmod B_{GC}$ и в этом случае оно равно $\mathscr{F}_\mu(1)$. Тогда (13) дает

$$(-1)^{s+1} \mathscr{F}_{\mu - sr}^s(1) = d_s^\mu \mathscr{F}_{\mu - sr}(1) \Rightarrow d_s^\mu = \frac{(-1)^s \mathscr{F}_{\mu - sr}^s(1)}{\mathscr{F}_{\mu - sr}(1)}.$$

Нам понадобится также обратное выражение

$$F_\mu = \sum_{s\in\mathbb{Z}_{s\geq 0}} f_s^\mu \widetilde{F}_{\mu-sr}, \tag{14}$$

т. е. фактически надо обратную матрицу для упоминавшейся нижнетреугольной унипотентной матрицы. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\dots \\ \frac{-\mathscr{F}^1_{\mu-r}(1)}{\mathscr{F}_{\mu-r}(1)} & 1 & 0\dots \\ \frac{\mathscr{F}^2_{\mu-2r}(2)}{\mathscr{F}_{\mu-2r}(1)} & \dots & 1 \\ \dots & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\dots \\ \frac{\mathscr{F}^1_{\mu-r}(1)}{\mathscr{F}_{\mu-r}(1)} & 1 & 0\dots \\ \frac{-\mathscr{F}^2_{\mu-2r}(2)}{\mathscr{F}_{\mu-2r}(1)} & \dots & 1 \\ \dots & & \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в силу произвольности μ, s в (14)

$$f_s^\mu = \frac{(-1)^{s+1}\mathscr{F}^s_{\mu-sr}(1)}{\mathscr{F}_{\mu-sr}(1)}. \tag{15}$$

3. Решение проблемы кратности для коэффициентов Клебша — Гордана

В случае алгебры $\mathfrak{gl}_2$ различные возникающие в разложении (1) представления U^s имеют различные старшие веса. Поэтому в качестве индекса s может выступать старший вес представления U. В случае $\mathfrak{gl}_3$ ситуация усложняется — возникает проблема кратности, состоящая в том, что в разложении (1) представление U заданного старшего веса может встретиться многократно.

В [14] приведено следующее решение проблемы явного описания представлений U^s, возникающих в разложении (1). А именно, тензорное произведение $V\otimes W$ может быть реализовано в пространстве функций на произведении групп $GL_3\times GL_3$. Матричные элементы на первом сомножителе будем обозначать через a_i^j, а на втором — через b_i^j. Введем следующие функции на $GL_3\times GL_3$:

$$(ab)_{i_1,i_2} := \det\begin{pmatrix} a_i^1 \\ b_i^1 \end{pmatrix}_{i=i_1,i_2}, \quad (aabb)_{i_1,i_2,i_3,i_4} := a_{i_1,i_2}b_{i_3,i_4} - a_{i_3,i_4}b_{i_1,i_2},$$

$$(aab) = det\begin{pmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \\ b_i^1 \end{pmatrix}_{i=1,2,3}, \quad (abb) = det\begin{pmatrix} a_i^1 \\ b_i^1 \\ b_i^2 \end{pmatrix}_{i=1,2,3}. \tag{16}$$

Рассмотрим тензорное произведение $V\otimes W$ представлений со старшими весами $[m_1,m_2,0]$ и $[m_1',m_2',0]$[3]. Тогда базис в пространстве $\mathfrak{gl}_3$-старших векторов образован такими функциями. Положим

$$f(\omega,\varphi,\psi,\theta) := a_1^\alpha b_1^\beta a_{1,2}^\gamma b_{1,2}^\delta (ab)_{1,2}^\omega (abb)^\varphi (aab)^\psi (aabb)^\theta_{1,2,1,3}, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha+\omega+\varphi = m_1-m_2, \quad \gamma+\theta+\psi = m_2, \\ \beta+\omega+\psi = m_1'-m_2', \quad \delta+\varphi+\theta = m_2'. \end{aligned} \tag{18}$$

В обозначении функции (17) участвуют не все показатели. Дело в том, что неуказанные показатели $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ определяются из условий (18).

[3] В дальнейшем будем рассматривать только представления с $m_3=0$, $m_3'=0$.

Предложение 1 (см. предложение 2 в [14]). *В пространстве $\mathfrak{gl}_3$-старших векторов имеется базис, состоящий из функций вида $f(0,\varphi,\psi,\theta)$ и $f(\omega,\varphi,\psi,0)$.*

Таким образом, индекс s из формулы (1) пробегает множество функций $f(0,\varphi,\psi,\theta)$ и $f(\omega,\varphi,\psi,0)$, где f определяется в (17), причем показатели обязаны удовлетворять условиям (18). Разумеется, можно отождествить функцию с набором ее показателей $\alpha,\dots,\theta$.

4. Коэффициенты Клебша — Гордана и 3j-символы

4.1. Связь с коэффициентами Клебша — Гордана. Пусть даны представления V, W, U алгебры Ли $\mathfrak{gl}_3$. Предположим, что в них выбраны базисы $\{v_\mu\}$, $\{w_\nu\}$, $\{u_\rho\}$. Тогда 3*j*-*символом* называется набор чисел

$$\begin{pmatrix} V & W & U \\ v_\mu & w_\nu & u_\rho \end{pmatrix}^s \tag{19}$$

таких, что величина

$$\sum_{\mu,\nu,\rho} \begin{pmatrix} V & W & U \\ v_\mu & w_\nu & u_\rho \end{pmatrix}^s v_\mu \otimes w_\nu \otimes u_\rho$$

$\mathfrak{gl}_3$-полуинвариантна. При этом 3*j*-символы с одинаковыми внутренними индексами образуют линейное пространство. Индекс s индексирует базисные 3*j*-символы с одинаковыми внутренними индексами.

Эти коэффициенты тесно связаны с коэффициентами Клебша — Гордана. Действительно, пусть имеется разложение тензорного произведения представлений в прямую сумму неприводимых:

$$V \otimes W = \sum_s U^s.$$

Пусть в этих представлениях выбраны базисы $\{v_\mu\}$, $\{w_\nu\}$, $\{u^s_\rho\}$. Коэффициенты Клебша — Гордана определяются как коэффициенты в разложении

$$u^s_{\rho'} = \sum_{\mu,\nu} D^{U,\rho',s}_{V,W;\mu,\nu} v_\mu \otimes w_\nu.$$

Рассмотрим представление $\overline{U}$, сопряженное к U, и в $\overline{U}$ базис $\overline{u}_\rho$, двойственный к u_ρ. Имеет место отображение $U \otimes \overline{U} \to \mathbf{1}$ в тривиальное представление, действующее по формуле $u_{\rho'} \otimes \overline{u}_\rho \mapsto \delta_{\rho,\rho'}$, где $\delta_{\rho,\rho'}$ — символ Кронекера.

Умножим равенство (13) на $\overline{u}_\rho$, просуммируем по ρ, получим

$$\mathbf{1} = \sum_{\mu,\nu,\rho} D^{U,\rho',s}_{V,W;\mu,\nu} v_\mu \otimes w_\nu \otimes \overline{u}_\rho.$$

Как следствие получаем

$$D^{U,\gamma,s}_{V,W;\mu,\nu} = \begin{pmatrix} V & W & \overline{U} \\ v_\mu & w_\nu & \overline{u}_\rho \end{pmatrix}^s.$$

Данная формула позволяет также отождествить пространство кратностей для коэффициентов Клебша — Гордана и для 3*j*-символов.

Таким образом, задачи вычисления коэффициентов Клебша — Гордана и 3*j*-символов, в сущности, эквивалентны.

4.2. $3j$-символы в функциональной реализации. В функциональной реализации $3j$-символ описывается для представлений V, W, U следующим образом. Пусть представления реализованы в пространстве функций на произведении $GL_3 \times GL_3 \times GL_3$. Без ограничения общности можно предполагать, что $m_3 = 0$, $m_3' = 0$. Функции матричных элементов на этих экземплярах GL_n будем обозначать через a_i^j, b_i^j, c_i^j. Аналогичные буквы будут обозначать определители матриц, составленных из этих матричных элементов.

Разложим тензорное произведение $V \otimes W \otimes U$ в прямую сумму неприводимых и выделим одно из возникающих тривиальных представлений

$$V \otimes W \otimes U = \mathbf{1}^s \oplus \dots,$$

где $\mathbf{1}^s$ — одно из тривиальных представлений, встречающихся в этом разложении. Точнее, можно написать $V \otimes W \otimes U = (\mathbf{1} \otimes M) \oplus \dots$, где M — некоторое линейное пространство, называемое пространством кратности. Выберем в M некоторый базис $\{e_i\}$ и обозначим $\mathbf{1}^s := \mathbf{1} \otimes e_s$. В этом разложении, возможно, возникает несколько тривиальных представлений и s есть индекс, их перечисляющий[4)].

Пусть базисные векторы кодируются следующими диаграммами:

$$v_\mu = \begin{pmatrix} m_1 & & m_2 & & 0 \\ & k_1 & & k_2 & \\ & & s & & \end{pmatrix}, \quad w_\nu = \begin{pmatrix} m_1' & & m_2' & & 0 \\ & k_1' & & k_2' & \\ & & s' & & \end{pmatrix},$$
$$u_\rho = \begin{pmatrix} M_1 & & M_2 & & 0 \\ & K_1 & & K_2 & \\ & & S & & \end{pmatrix}. \tag{20}$$

В этом случае с точностью до добавления одного и того же числа ко всем элементам диаграммы можно считать, что

$$\overline{u}_\rho = \begin{pmatrix} -M_3 & & -M_2 & & -M_1 \\ & -K_2 & & -K_1 & \\ & & -S & & \end{pmatrix}.$$

4.3. Явный вид $\mathfrak{gl}_3$-полуинварианта в $V \otimes W \otimes U$. Покажем, что старший вектор представления $\mathbf{1}^s$ обязан иметь вид

$$g = \prod_i (\underbrace{a \cdots a}_{k_1^i} \underbrace{b \cdots b}_{k_2^i} \underbrace{c \cdots c}_{k_3^i}), \tag{21}$$

где по аналогии с (16) как определители вводятся выражения (abc), (aac), (acc), (bcc), (bbc). Кроме того, положим

$$(aabbcc) := (\widetilde{a}\widetilde{b}\widetilde{c}), \quad \widetilde{a}_1^1 := a_{2,3}, \quad \widetilde{a}_2^1 := -a_{1,3}, \quad \widetilde{a}_3^1 := a_{1,2},$$

$\widetilde{b}_i^1$, $\widetilde{c}_i^1$ определяются аналогично. При этом должны выполняться требования

$$m_1 = \#\{i : k_1^i = 1\}, \quad m_2 = \#\{i : k_1^i = 2\}, \quad 0 = \#\{i : k_1^i = 3\},$$
$$m_1' = \#\{i : k_2^i = 1\}, \quad m_2' = \#\{i : k_2^i = 2\}, \quad 0 = \#\{i : k_2^i = 3\},$$

[4)] Отметим работы [18–20], где используется аналогичный подход к разложению двойного тензорного произведения.

$$M_1 = \#\{i : k_1^i = 1\}, \quad M_2 = \#\{i : k_1^i = 2\}, \quad M_3 = \#\{i : k_1^i = 3\}.$$

обеспечивающие соотношение $g \in V \otimes W \otimes U$ (см. [17]).

Действительно, с одной стороны, индекс s, нумерующий различные $3j$-символы

$$\begin{pmatrix} V & W & U \\ v_\mu & w_\nu & u_\rho \end{pmatrix}^s$$

с одинаковыми внутренними индексами, совпадает с индексом, нумерующим различные коэффициенты Клебша — Гордана $C^{\overline{U},\overline{\gamma},s}_{V,W;\alpha,\beta}$.

С другой стороны, так как для коэффициентов Клебша — Гордана индексу s соответствует функция (17), ей же соответствует выражение типа (21), конструируемое путем следующего сопоставления сомножителям (17) сомножителей для формирования (21) по следующему принципу:

$$a_1 \mapsto (acc),\ a_{1,2} \mapsto (aac),\ b_1 \mapsto (bcc),\ b_{1,2} \mapsto (bbc),\ (ab) \mapsto (abc),$$
$$(aabb)_{1,2,1,3} \mapsto (aabbcc),\ (aab) \mapsto (aab),\ (abb) \mapsto (abb).$$

Таким образом, явно по выражению (17) построили выражение (21), причем это сопоставление обратимо. Значит, это сопоставление есть изоморфизм. Стало быть, описаны все $\mathfrak{gl}_3$-полуинварианты тройного тензорного произведения.

5. Формула для 3j-символа

Найдем выражение для $3j$-символа. Рассматриваемый $3j$-символ имеет индекс кратности s, который фактически есть функция (17). Этой функции мы сопоставили тривиальное подпредставление в тройном тензорном произведении со старшим вектором

$$g(\omega,\varphi,\psi,\theta) := \frac{(acc)^\alpha (bcc)^\beta (aac)^\gamma (bbc)^\delta (abc)^\omega (abb)^\varphi (aab)^\psi (aabbcc)^\theta}{\alpha!\beta!\gamma!\omega!\varphi!\psi!\theta!}. \tag{22}$$

Мы немного изменили выражение (21), добавив деление на факториалы степеней. При этом (см. предложение 1) можно считать, что в данном выражении либо $\omega = 0$, либо $\theta = 0$. Тем самым в (22) отсутствует либо (abc), либо $(aabbcc)$.

5.1. Решетки B_1' и B_1''. Рассмотрим независимые переменные, соответствующие слагаемым в определителях $(caa), (acc), \ldots, (aabbcc)$. Эти переменные обозначим символами типа $[xyy]$ так:

$$Z = \{[c_1a_{2,3}],\ [c_2a_{1,3}],\ [c_3a_{1,2}],\ [a_1c_{2,3}],\ [a_2c_{1,3}],\ [a_3c_{1,2}],\ [c_1b_{2,3}],\ [c_2b_{1,3}],$$
$$[c_3b_{1,2}],\ [b_1c_{2,3}],\ [b_2c_{1,3}],\ [b_3c_{1,2}],\ [b_1a_{2,3}],\ [b_2a_{1,3}],\ [b_3a_{1,2}],\ [a_1b_{2,3}],\ [a_2b_{1,3}],$$
$$[a_3b_{1,2}],\ [a_1b_2c_3],\ [a_2b_3c_1],\ [a_3b_1c_2],\ [a_2b_1c_3],\ [a_1b_3c_2],\ [a_3b_2c_1]$$
$$[a_{2,3}b_{1,3}c_{1,2}],\ [a_{1,3}b_{1,2}c_{2,3}],\ [a_{1,2}b_{2,3}c_{1,3}],\ [a_{1,3}b_{2,3}c_{1,2}],\ [a_{2,3}b_{1,2}c_{1,3}],\ [a_{1,2}b_{1,3}c_{2,3}]\}. \tag{23}$$

Эти переменные суть координаты в 30-мерном пространстве. При раскрытии скобок в определителях, входящих в g, возникают фактически мономы от переменных (23). Векторы показателей этих мономов являются также векторами в 30-мерном пространстве.

Рассмотрим вектор

$$v_0 = (\gamma, 0, 0, \alpha, 0, 0, \delta, 0, 0, \beta, 0, 0, \psi, 0, 0, \varphi, 0, 0, \omega, 0, 0, 0, 0, 0, \theta, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Такой вектор показателей получается, если при раскрытии скобок в каждом из определителей берется первое слагаемое. При этом мы договорились, что либо $\omega = 0$, либо $\theta = 0$.

Изменение выбора слагаемых соответствует прибавлению к v_0 следующих векторов:

$$p_1 = e_{[c_1a_{2,3}]} - e_{[c_2a_{1,3}]}, \quad p_2 = e_{[c_1a_{2,3}]} - e_{[c_3a_{1,2}]}, \quad p_3 = e_{[a_1c_{2,3}]} - e_{[a_2c_{1,3}]},$$
$$p_4 = e_{[a_1c_{2,3}]} - e_{[a_3c_{1,2}]}, \quad p_5 = e_{[c_1b_{2,3}]} - e_{[c_2b_{1,3}]}, \quad p_6 = e_{[c_1b_{2,3}]} - e_{[c_3b_{1,2}]},$$
$$p_7 = e_{[b_1c_{2,3}]} - e_{[b_2c_{1,3}]}, \quad p_8 = e_{[b_1c_{2,3}]} - e_{[b_3c_{1,2}]}, \quad p_9 = e_{[a_1b_{2,3}]} - e_{[a_2b_{1,3}]},$$
$$p_{10} = e_{[a_1b_{2,3}]} - e_{[a_3b_{1,2}]}, \quad p_{11} = e_{[b_1a_{2,3}]} - e_{[b_2a_{1,3}]}, \quad p_{12} = e_{[b_1a_{2,3}]} - e_{[b_3a_{1,2}]},$$
$$p_{13} = e_{[a_1b_2c_3]} - e_{[a_2b_3c_1]}, \quad p_{14} = e_{[a_1b_2c_3]} - e_{[a_3b_1c_2]}, \quad p_{15} = e_{[a_1b_2c_3]} - e_{[a_2b_1c_3]}$$
$$p_{16} = e_{[a_1b_2c_3]} - e_{[a_1b_3c_2]}, \quad p_{17} = e_{[a_1b_2c_3]} - e_{[a_3b_2c_1]},$$
$$p_{18} = e_{[a_{2,3}b_{1,3}c_{1,2}]} - e_{[a_{1,3}b_{1,2}c_{2,3}]}, \quad p_{19} = e_{[a_{2,3}b_{1,3}c_{1,2}]} - e_{[a_{1,2}b_{2,3}c_{1,3}]},$$
$$p_{20} = e_{[a_{2,3}b_{1,3}c_{1,2}]} - e_{[a_{1,3}b_{2,3}c_{1,2}]}, \quad p_{21} = e_{[a_{2,3}b_{1,3}c_{1,2}]} - e_{[a_{1,2}b_{1,3}c_{2,3}]},$$
$$p_{22} = e_{[a_{2,3}b_{1,3}c_{1,2}]} - e_{[a_{2,3}b_{1,2}c_{1,3}]}.$$

Имеются три проекции

$$\mathrm{pr}_a, \mathrm{pr}_b, \mathrm{pr}_c : \mathbb{C}^{30} \to \mathbb{C}^6,$$

которые по вектору показателей монома от переменных (23) строят векторы показателей по переменным a_X, b_X, c_X соответственно.

Рассмотрим теперь вектор v показателей монома от переменных (23), отвечающий произвольному выбору слагаемых от определителей. Найдем, какие векторы сдвига $\tau \in \mathbb{Z}\langle p_1, \dots, p_{22}\rangle$ обладают тем свойством, что при прибавлении их к v проекции pr_a, pr_b, pr_c сдвигаются на векторы, пропорциональные $(0, 1, -1, -1, 1, 0)$.

Определение 1. Назовем *элементарным циклом* следующий объект. Берем два разных определителя из $(caa), \dots, (aabbcc)$ и проводим две стрелки от символа $x = a, b, c$ в одном определителе к символу $xx = aa, bb, cc$ в другом определителе или от символа x в одном к символу x в другом, или от символа xx в одном к символу xx в другом. При этом должно выполняться следующее. Одна из стрелок идет от первого определителя во второй, а вторая — наоборот. Одна из стрелок идет от символа x в одном к символу xx в другом.

Примеры циклов:

$$(abb) \leftrightarrows (aab), \quad (abc) \leftrightarrows (aabbcc), \quad (abb) \leftrightarrows (abc), \quad (abb) \leftrightarrows (aabbcc)$$

При этом все другие варианты циклов получаются перестановками символов a, b, c.

Элементарному циклу сопоставим вектор $\tau \in \mathbb{Z}\langle p_1, \dots, p_{22}\rangle$ по следующему принципу. Выписанным выше элементарным циклам сопоставим векторы

$$u_1 = -e_{[a_1b_{2,3}]} + e_{[a_2b_{1,3}]} - e_{[b_1a_{2,3}]} + e_{[b_2a_{1,3}]},$$
$$u_2 = -e_{[a_1b_2c_3]} + e_{[a_2b_1c_3]} - e_{[a_{2,3}b_{1,3}c_{1,2}]} + e_{[a_{1,3}b_{2,3}c_{1,2}]},$$
$$u_3 = -e_{[a_1b_{2,3}]} + e_{[a_2b_{1,3}]} - e_{[a_{2,3}b_{1,3}c_{1,2}]} + e_{[a_{1,3}b_{2,3}c_{1,2}]},$$
$$u_4 = -e_{[a_1b_{2,3}]} + e_{[a_2b_{1,3}]} - e_{[a_{2,3}b_{1,3}c_{1,2}]} + e_{[a_{1,3}b_{2,3}c_{1,2}]}.$$

Пусть B_1 — целочисленная решетка, натянутая на векторы, отвечающие элементарным циклам. Имеет место

Предложение 2. *Решетка B_1 порождается векторами, отвечающими элементарным циклам типа*

$$(abb) \leftrightarrows (aabbcc), \quad (abb) \leftrightarrows (abc).$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что векторы, отвечающие произвольному элементарному циклу, выражаются через данные векторы. $\square$

В предложении 2 перечислены две серии образующих решетки B_1. Пусть B_1' — подрешетка B_1, порожденная элементарными циклами первого типа. Соответственно B_1'' — подрешетка B_1, порожденная элементарными циклами второго типа. Тогда данные образующие будут базисами B_1' и B_1'' соответственно. Линейная независимость данных векторов следует из того, что в каждом векторе имеются координатные векторы, не участвующие в других.

Таким образом, B_1' имеет базис

$$\begin{aligned}
v_1^a &= -e_{[a_1b_{2,3}]} + e_{[a_2b_{1,3}]} - e_{[a_{2,3}b_{1,3}c_{1,2}]} + e_{[a_{1,3}b_{2,3}c_{1,2}]},\\
v_2^a &= -e_{[a_1c_{2,3}]} + e_{[a_2c_{1,3}]} - e_{[a_{2,3}b_{1,2}c_{1,3}]} + e_{[a_{1,3}b_{1,2}c_{2,3}]}\\
v_1^b &= -e_{[b_1a_{2,3}]} + e_{[b_2a_{1,3}]} - e_{[a_{1,3}b_{2,3}c_{1,2}]} + e_{[a_{2,3}b_{1,3}c_{1,2}]},\\
v_2^b &= -e_{[b_1c_{2,3}]} + e_{[b_2c_{1,3}]} - e_{[a_{1,2}b_{2,3}c_{1,3}]} + e_{[a_{1,2}b_{1,3}c_{2,3}]},\\
v_1^c &= -e_{[c_1a_{2,3}]} + e_{[c_2a_{1,3}]} - e_{[a_{1,3}b_{1,2}c_{2,3}]} + e_{[a_{2,3}b_{1,2}c_{1,3}]},\\
v_2^c &= -e_{[c_1b_{2,3}]} + e_{[c_2b_{1,3}]} - e_{[a_{1,2}b_{1,3}c_{2,3}]} + e_{[a_{1,2}b_{2,3}c_{1,3}]}.
\end{aligned}$$

В случае, если (22) содержит $(aabbcc)$ и не содержит (abc), будем использовать B_1', а если (18) содержит (abc) и не содержит $(aabbcc)$, то будем использовать B_1''.

Предложение 3. *Пусть* (22) *содержит* $(aabbcc)$ *и не содержит* (abc). *Возьмем* 30*-мерные векторы* ϖ , ϖ' *показателей двух мономов от переменных* Z, *получаемых при раскрытии скобок в* (22). *Пусть* $[\mu,\nu,\rho] = [\mathrm{pr}_a(\varpi), \mathrm{pr}_b(\varpi), \mathrm{pr}_c(\varpi)]$, $[\mu',\nu',\rho'] = [\mathrm{pr}_a(\varpi'), \mathrm{pr}_b(\varpi'), \mathrm{pr}_c(\varpi')]$.

Тогда $[\mu',\nu',\rho'] = [\mu,\nu,\rho] + b_1$, $b_1 \in B_1'$ *в том и только в том случае, если одновременно*

$$\mu = \mu' \bmod B_{GC}, \quad \nu = \nu' \bmod B_{GC}, \quad \rho = \rho' \bmod B_{GC}.$$

В случае, когда (22) *содержит* (abc) *и не содержит* $(aabbcc)$, *верно то же самое, но с заменой* B_1' *на* B_1''.

Доказательство. Для определенности будем рассматривать случай, когда (22) содержит $(aabbcc)$ и не содержит (abc).

Тот факт, что $[\mu',\nu',\rho'] = [\mu,\nu,\rho] + b_1$, $b_1 \in B_1'$, влечет $\mu = \mu' \bmod B_{GC}$, $\nu = \nu' \bmod B_{GC}$, $\rho = \rho' \bmod B_{GC}$ проверяется непосредственной проверкой на образующих B_1.

Докажем обратное. Действительно, вектор $[\mu,\nu,\rho]$ есть результат применения набора проекций pr_a, pr_b, pr_c к некоторому вектору ϖ показателей монома от переменных (23), полученного при раскрытии скобок в (22). Вектор $[\mu',\nu',\rho']$ получается как набор проекций pr_a, pr_b, pr_c вектора показателей ϖ' другого монома, полученного при раскрытии скобок. Для его получения мы выбрали другие слагаемые в определителях. Пусть в результате, например, слагаемое

$a_1b_{2,3}$ из определителя (abb) меняется на $a_2b_{1,3}$. Чтобы уменьшение степени $b_{2,3}$ на 1 и увеличение степени $b_{1,3}$ на 1 не привело к тому, что показатели определителей b не вышли из множества показателей $\delta+(0,-1,1,1,-1,0)$, нужно, чтобы степень b_1 уменьшилась на 1, а степень b_2 увеличилась бы на 1. Это может произойти от того, что в другом определителе, скажем в (bcc), произошла замена слагаемого $b_1c_{2,3}$ на $b_2c_{1,3}$. Далее рассматриваем изменение степеней $c_{2,3}$, $c_{1,3}$ и т. д. В итоге мы должны вернуться в начальный определитель (abb) и получить, что на предыдущем шаге требовалось изменение степени определителей a_1 и a_2, которое как раз и происходит за счет изменения выбора слагаемого в первом определителе.

Все это соответствует тому, что вектор показателей сдвигается на вектор из B_1'. $\square$

5.1.1. Скалярные произведения. Для определенности будем рассматривать случай, когда (22) содержит $(aabbcc)$ и не содержит (abc).

Приступим к вычислению скалярных произведений. Для $s_1,s_2,s_3\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ введем ряд гипергеометрического типа от переменных Z:

$$\mathscr{F}_{\varpi}^{s_1,s_2,s_3}(Z,B_1') := \sum_{t\in\mathbb{Z}^6}\binom{t_1^a+t_2^a+s_1}{s_1}\binom{t_1^b+t_2^b+s_2}{s_2}\binom{t_1^c+t_2^c+s_3}{s_3}\frac{Z^{\varpi+tv^{abc}}}{(\varpi+tv^{abc})!},$$

$$t=(t_1^1,t_2^a,t_1^b,t_2^b,t_1^c,t_2^c),\quad tv^{abc}:=t_1^av_1^a+t_2^av_2^a+\dots. \tag{24}$$

Введем векторы

$$f_a=-e_{[a_1c_{2,3}]}+e_{[a_3c_{1,2}]}-e_{[a_{2,3}b_{1,3}c_{1,2}]}-e_{[a_{1,2}b_{1,3}c_{2,3}]},$$
$$f_b=-e_{[b_1c_{2,3}]}+e_{[b_3c_{1,2}]}-e_{[a_{1,3}b_{2,3}c_{1,2}]}-e_{[a_{1,3}b_{1,2}c_{2,3}]},$$
$$f_c=-e_{[a_1b_{2,3}]}+e_{[a_3b_{1,2}]}-e_{[a_{1,2}b_{2,3}c_{1,3}]}-e_{[a_{2,3}b_{1,2}c_{1,3}]}.$$

Тогда имеют место соотношения (см. (9))

$$\mathrm{pr}_a(\tau+f_a)=\mathrm{pr}(\tau)+r,\quad \mathrm{pr}_b(\tau+f_a)=\mathrm{pr}(\tau),\quad \mathrm{pr}_c(\tau+f_a)=\mathrm{pr}(\tau), \tag{25}$$

и аналогичные условия для f_b,f_c.

Далее рассматриваем векторы $\varphi\in\mathbb{Z}^{30}$ и векторы μ,ν,ρ, связанные соотношениями

$$\varpi=v_0+tv^{abc}+s_1f_a+s_2f_b+s_3f_c,\quad t\in\mathbb{Z}^9,\ s_1,s_2,s_3\in\mathbb{Z},$$
$$\mu=\mathrm{pr}_a(\varphi),\quad \nu=\mathrm{pr}_b(\varpi),\quad \rho=\mathrm{pr}_c(\varpi). \tag{26}$$

Предложение 4. *Пусть ϖ,μ,ν,ρ удовлетворяют соотношениям* (26). *Тогда*

$$\big\langle g,\mathscr{F}_{\mu}^{s_1}(A)\mathscr{F}_{\nu}^{s_2}(B)\mathscr{F}_{\rho}^{s_3}(C)\big\rangle=\mathscr{F}_{\varpi}^{s_1,s_2,s_3}(\pm1,B_1'). \tag{27}$$

При этом вместо тех переменных из Z (см. (23)*), которые входят в определитель со знаком $+$, подставляется $+1$, а вместо тех, которые входят в определитель со знаком $-$, подставляется -1.*

Доказательство. Рассмотрим входящее в $\mathscr{F}_{\mu}^{s_1}(A)\mathscr{F}_{\nu}^{s_2}(B)\mathscr{F}_{\rho}^{s_3}(C)$ произведение $\frac{A^x}{x!}\frac{B^y}{y!}\frac{C^z}{z!}$. Коэффициент при этом произведении определяется так: если $x=\mu+\tau_1v$, $y=\nu+\tau_2v$, $z=\rho+\tau_3v$, то коэффициент равен

$$\binom{\tau_1+s_1}{s_1}\binom{\tau_2+s_2}{s_2}\binom{\tau_3+s_3}{s_3}. \tag{28}$$

Найдем скалярное произведение

$$\left\langle g, \frac{A^x}{x!}\frac{B^y}{y!}\frac{C^z}{z!}\right\rangle. \tag{29}$$

Данное скалярное произведение вычисляется так. В (22) раскрываются скобки. При этом получается выражение, являющееся Г-рядом от переменных Z, где переменные, входящие в определители со знаком $-$, также берутся со знаком $-$. После этого переменные Z очевидным образом превращаются в произведение переменных A_X, B_X, C_X.

Пусть h — вектор показателей некоторого монома от переменных Z, возникающего при раскрытии скобок в (22). Этот моном делится на факториал своей степени и перед ним стоит знак $\pm$. Тогда скалярное произведение (29) отлично от нуля, лишь если для некоторого v имеем $[\mathrm{pr}_a(h), \mathrm{pr}_b(h), \mathrm{pr}_c(h)] = [x, y, z]$. При этом в данном случае (29) получается заменой в подходящем мономе от переменных Z всех переменных на 1 и суммированием результатов по всем подходящим мономам.

Наконец, напишем, что $x = \mu + \tau_1 v$, $y = \nu + \tau_2 v$, $z = \rho + \tau_3 v$. При $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ по условию $[\mu, \nu, \rho] = [\mathrm{pr}_a(\varpi), \mathrm{pr}_b(\varpi), \mathrm{pr}_c(\varpi)]$. Благодаря предложению 3 $[x, y, z] = [\mathrm{pr}_a(\varpi'), \mathrm{pr}_b(\varpi'), \mathrm{pr}_c(\varpi')]$, где

$$\varpi' = \varpi + t_1^a v_1^a + t_2^a v_2^a + t_1^b v_1^b + t_2^b v_2^b + t_1^c v_1^c + t_2^c v_2^c,$$

$$\tau_1 = t_1^a + t_2^a, \quad \tau_2 = t_1^b + t_2^b, \quad \tau_3 = t_1^c + t_2^c.$$

Учтем коэффициент (28) при $\frac{A^x}{x!}\frac{B^y}{y!}\frac{C^z}{z!}$, входящем в $\mathscr{F}_\mu^{s_1}(A)\mathscr{F}_\nu^{s_2}(B)\mathscr{F}_\rho^{s_3}(C)$. В результате получим выражение, стоящее справа в (26). $\square$

Предложение 5. *Пусть ϖ, μ, ν, ρ удовлетворяют соотношениям* (26). *Тогда*

$$\left\langle g, \mathscr{F}_{\mu - s_1 r}^{s_1}(A)\mathscr{F}_{\nu - s_2 r}^{s_2}(B)\mathscr{F}_{\rho - s_3 r}^{s_3}(C)\right\rangle = \mathscr{F}_{\varpi - s_1 f_a - s_2 f_b - s_3 f_c}^{s_1, s_2, s_3}(\pm 1, B_1).$$

Вместо тех переменных из Z (см. (23)*), которые входят в свой определитель со знаком $+$, подставляется $+1$, а вместо тех, которые входят в определитель со знаком $-$, подставляется -1.*

Доказательство прямо следует из предложения 4 и формулы (25). $\square$

Введем функцию

$$\widetilde{F}_\varpi(Z, B_1') := \sum_{s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (-1)^{s_1 + s_2 + s_3} \mathscr{F}_{\varpi - s_1 f_a - s_2 f_b - s_3 f_c}^{s_1, s_2, s_3}(Z, B_1'). \tag{30}$$

Отметим, что функция $\mathscr{F}_\varpi^{0,0,0}(Z, B_1')$ удовлетворяет уравнениям ГКЗ, а функция $\widetilde{F}_\varpi(Z, B_1')$ — системе типа А-ГКЗ, составленной из 3-х уравнений вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial[a_1 c_{2,3}]\partial[a_{2,3} b_{1,2} c_{1,3}]} - \frac{\partial^2}{\partial[a_2 c_{1,3}]\partial[a_{1,3} b_{1,2} c_{2,3}]} + \frac{\partial^2}{\partial[c_3 a_{1,2}]\partial[a_{1,2} b_{1,3} c_{2,3}]}\right)\widetilde{F}_\varphi(Z, B_1') = 0.$$

В качестве прямого следствия предложения 5 получаем

Предложение 6. *Пусть* ϖ, μ, ν, ρ *удовлетворяют соотношениям* (26),

$$\langle g, \widetilde{F}_\mu(A)\widetilde{F}_\nu(B)\widetilde{F}_\rho(C)\rangle = \widetilde{F}_\varpi(\pm 1, B_1').$$

Вместо тех переменных из Z (*см.* (23)), *которые входят в свой определитель со знаком* $+$, *подставляется* $+1$, *а вместо тех, которые входят в определитель со знаком* $-$, *подставляется* -1.

Введем функцию

$$F_\varpi(Z, B_1') := \sum_{s_1,s_2,s_3\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} f_{s_1}^{\mathrm{pr}_a(\varpi)} f_{s_2}^{\mathrm{pr}_b(\varpi)} f_{s_3}^{\mathrm{pr}_c(\varpi)} F_{\varpi - s_1 f^a - s_2 f^b - s_3 f^c}(Z, B_1'), \qquad (31)$$

где коэффициенты f определены в формуле (15). Используя соотношение (14), получаем итоговое

Предложение 7. *Пусть* ϖ, μ, ν, ρ *удовлетворяют соотношениям* (26). *Пусть* (22) *содержит* $(aabbcc)$ *и не содержит* (abc). *Тогда*

$$\langle g, F_\mu(A)F_\nu(B)F_\rho(C)\rangle = F_\kappa(\pm 1, B_1').$$

Если (22) *содержит* (abc) *и не содержит* $(aabbcc)$, *то*

$$\langle g, F_\mu(A)F_\nu(B)F_\rho(C)\rangle = F_\kappa(\pm 1, B_1'').$$

Вместо тех переменных из Z (*см.* (23)), *которые входят в свой определитель со знаком* $+$, *подставляется* $+1$, *а вместо тех, которые входят в определитель со знаком* $-$, *подставляется* -1.

5.2. $3j$**-символ. Правила отбора для** $3j$**-символов.** Ответим на следующий вопрос: какие произведения $\mathscr{F}_\mu(a)\mathscr{F}_\nu(b)\mathscr{F}_\rho(c)$ имеют ненулевое скалярное произведение с функцией g, задаваемой (22).

Скалярное произведение явно описано выше в А-ГКЗ реализации. В этой реализации $\mathscr{F}_\mu(a)\mathscr{F}_\nu(b)\mathscr{F}_\rho(c)$ представляется выражением $F_\mu(A)F_\nu(A)F_\rho(C)$. Функция g представляется выражением вида $g + pl$, где pl пропорционально $A_1A_{2,3} - A_2A_{1,3} + A_3A_{1,2}, \ldots$. Так как функции $F_\mu(A), F_\nu(A), F_\rho(C)$ являются решениями уравнений А-ГКЗ, то

$$\langle F_\mu(A)F_\nu(A)F_\rho(C), g + pl\rangle = \langle F_\mu(A)F_\nu(A)F_\rho(C), g\rangle.$$

Соответственно необходимо привести необходимое условие для того, чтобы $\langle F_\mu(A)F_\nu(A)F_\rho(C), g\rangle$ было отлично от 0.

Заметим, что носитель функции g, определенной в (22) и рассматриваемой как функция от определителей a_X, b_X, c_X, имеет вид

$$\mathrm{supp}(g) = (\kappa + B) \cap \left(\mathbb{Z}_{\geq 0}^{18}\right)$$

для некоторого вектора $\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{18}$ и некоторой решетки B. А именно, вектор κ и порождающие решетки B можно явно выписать так:

$$\kappa = [\mathrm{pr}_a(v_0), \mathrm{pr}_b(v_0), \mathrm{pr}_c(v_0)],\ B = \mathbb{Z}\langle \pi_1, \ldots, \pi_{22}\rangle,\ \pi_i = [\mathrm{pr}_a(p_i), \mathrm{pr}_b(p_i), \mathrm{pr}_c(p_i)].$$

Чтобы функция $F_\mu(A)F_\nu(A)F_\rho(C)$ имела ненулевое скалярное произведение с g, непустым должно быть пересечение

$$\mathrm{supp}(F_\mu(A)F_\nu(A)F_\rho(C)) \cap \mathrm{supp}(g).$$

Явно это условие записывается так:

$$\Big(\bigcup_{s_1,s_2,s_3\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} [\mu+B_{GC}-s_1r,\nu+B_{GC}-s_1r,\rho+B_{GC}-s_2r]\cap\big(\mathbb{Z}^{18}_{\geq 0}\big)\Big)\cap\operatorname{supp}(g)\neq\varnothing. \tag{32}$$

Заметим, что условие на вектор φ, обеспечивающее то, что вектор $[\mu,\nu,\rho]=[\mathrm{pr}_a(\varpi),\mathrm{pr}_b(\varpi),\mathrm{pr}_c(\varpi)]$ удовлетворяет условию (32), есть в точности условие (26).

5.3. Формула для $3j$-символа. Напишем

$$g=\sum_{\mu\nu\rho} c_{\mu',\nu',\rho'}\mathscr{F}_{\mu'}(a)\mathscr{F}_{\nu'}(b)\mathscr{F}_{\rho'}(c),$$

где $c_{\mu',\nu',\rho'}$ есть $3j$-символ (19). Заменим определители a_X, b_X, c_X независимыми переменными A_X, B_X, C_X. Тогда написанное равенство выполняется лишь по модулю соотношений Плюккера. Умножим это равенство скалярно на $F_\mu(A)\mathscr{F}_\nu(B)\mathscr{F}_\rho(C)$. Так как эти функции являются решениями системы А-ГКЗ, можно игнорировать тот факт, что предыдущее равенство выполняется лишь по модулю соотношений Плюккера.

С учетом предыдущих вычислений получаем, что верна

Теорема 2. *Пусть даны представления со старшими весами* $[m_1,m_2,0]$, $[m_1',m_2',0]$, $[M_1,M_2,M_3]$. *Пусть даны базисные векторы Гельфанда — Цетлина, так что* Г*-ряды, им отвечающие, имеют векторы сдвига* μ,ν,ρ (*по правилу, описанному в теореме* 1). *Пусть зафиксирована определяющая кратность функция* (22) *вида, указанного в предложении* 1.

Найдем вектор ϖ, *связанный соотношениями* (26) *с векторами* μ,ν,ρ (*если это невозможно, то* $3j$*-символ нулевой*).

Тогда $3j$*-символ* (22) *равен*

$$\begin{aligned}&\frac{F_\varpi(\pm1,B_1')}{\mathscr{F}_\mu(1)\mathscr{F}_\nu(1)\mathscr{F}_\rho(1)},\quad \text{если (22) не содержит } (abc),\\ &\frac{F_\varpi(\pm1,B_1'')}{\mathscr{F}_\mu(1)\mathscr{F}_\nu(1)\mathscr{F}_\rho(1)},\quad \text{если (22) не содержит } (aabbcc),\end{aligned} \tag{33}$$

где функция, стоящая в числителе, определена в (31) (*см. также* (30), (24)).

В числителе в функцию F_ϖ *вместо тех аргументов* Z (*см.* (23)), *которые входят в соответствующий определитель из* (22) *с коэффициентом* $+$, *подставляется* $+1$, *а вместо тех, которые входят в определитель со знаком* $-$, *подставляется* -1.

В знаменателе стоят Г*-ряды, введенные в теореме* 1, *при этом вместо всех аргументов подставляется* 1.

6. Дополнение: правила отбора для коэффициентов Клебша — Гордана

Установим правила отбора для коэффициентов Клебша — Гордана, необходимые условия на диаграммы (20) для того, чтобы коэффициент Клебша — Гордана $C^{U,\gamma,s}_{V,W;\alpha,\beta}$ был ненулевой.

Сначала найдем условия на верхние строки, которые представляют собой $\mathfrak{gl}_3$-старшие веса. Пусть индекс s отвечает функции (17). В терминах показателей функции (17) эти верхние строки записываются следующим образом:

$$[m_1,m_2,0]=[\alpha+\gamma+\omega+\varphi+\psi+\theta,\gamma+\psi+\theta,0],$$

$$[m_1', m_2', 0] = [\beta + \delta + \omega + \varphi + \psi + \theta, \delta + \varphi + \theta, 0], \tag{34}$$

$$[M_1, M_2, M_3] = [\alpha + \beta + \gamma + \delta + \omega + \varphi + \psi + 2\theta, \gamma + \delta + \omega + \varphi + \psi + \theta, \varphi + \psi + \theta].$$

Видно, что между этими строками есть соотношение

$$[m_1, m_2, 0] + [m_1', m_2', 0] + \omega[-1, 1, 0] + (\varphi + \psi)[-1, 0, 1] + \theta[0, -1, 1] = [M_1, M_2, M_3]. \tag{35}$$

Более того, выполнение этого соотношения достаточно для существования $\alpha, \ldots, \omega$, для которых выполняются соотношения (34).

Найдем правила отбора для вторых строк диаграмм (20). Их можно получить, рассматривая правила отбора коэффициентов Клебша — Гордана для алгебры $\mathfrak{gl}_2$. Итак, имеется тензорное произведение представлений $\mathfrak{gl}_2$ со старшими весами $[k_1, k_2]$ и $[\overline{k}_1, \overline{k}_2]$. Какие старшие веса $[K_1, K_2]$ имеют неприводимые представления, возникающие при разложении этого тензорного произведения?

Базис в пространстве $\mathfrak{gl}_2$-старших векторов в функциональной реализации тензорного произведения составляют функции

$$f = a_1^\alpha a_{1,2}^\beta b_1^\gamma b_{1,2}^\delta (ab)^\omega.$$

Тогда

$$[k_1, k_2] = [\alpha+\beta+\omega, \beta], [k_1', k_2'] = [\gamma+\delta+\omega, \delta], [K_1, K_2] = [\alpha+\beta+\gamma+\delta+\omega, \beta+\delta+\omega]. \tag{36}$$

Видно, что между старшими весами имеется соотношение

$$[k_1, k_2] + [k_1', k_2'] + \omega[-1, 1] = [K_1, K_2]. \tag{37}$$

При этом соотношение (37) является и достаточным условием существования $\alpha, \ldots, \omega$, для которых выполняются условия (36).

Наконец, рассматривая $E_{1,1}$-веса диаграмм, приходим к выводу, что для третьих строк верно соотношение

$$s + s' = S. \tag{38}$$

Таким образом, доказано

Предложение 8. *Для того чтобы коэффициент Клебша — Гордана был ненулевой, необходимо выполнение условий* (35), (37), (38) *для некоторых неотрицательных целых* ω, φ, ψ, θ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биденхарн Л., Лаук Дж.* Угловой момент в квантовой физике. М.: Мир, 1984.
2. *Greiner W., Muller B.* Quantum mechanics. Symmetries. 2nd ed. Berlin: Springer-Verl., 1994.
3. *van der Waerden B. L.* Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. Berlin: Julius Springer-Verl., 1932.
4. *Годунов С. К., Михайлова Т. Ю.* Представления группы вращений и сферические функции. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
5. *Годунов С. К., Гордиенко В. М.* Коэффициенты Клебша — Гордана при различных выборах базисов унитарных и ортогональных представлений групп $SU(2)$, $SO(3)$ // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 540–557.
6. *Гордиенко В. М.* Матрицы из коэффициентов Клебша — Гордана // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 6. С. 1276–1291.
7. *Селиванова С. В.* Инвариантная запись уравнений теории упругости // Журн. прикл. математики и техн. физики. 2008. Т. 49, № 5. С. 127–142.

8. *Baid G. E., Biedenharn L. C.* On the representations of semisimple Lie groups II // J. Math. Phys. 1963. V. 4, N 12. P. 1449–1466.

9. *Biedenharn L. C., Louck J. D.* A pattern calculus for tensor operators in the unitary groups // Comm. Math. Phys. 1968. V. 8, N 2. P. 89–131.

10. *Biedenharn L. C., Louck J. D.* A pattern calculus for tensor operators in the unitary groups // Comm. Math. Phys. 1968. V. 8, N 2. P. 89–131.

11. *Biedenharn L. C., Louck J. D.* Canonical adjoint tensor operators in $U(n)$ // J. Math. Phys. 1970. V. 11, N 8. P. 2368–2411.

12. *Biedenharn L. C., Ciftan M., Chacón E.* On the evaluation of the multiplicity-free Wigner coefficients of $U(n)$ // J. Math. Phys. 1972. V. 13, N 5. P. 577–589.

13. *Biedenharn L. C., Louck J. D.* On the structure of the canonical tensor operators in the unitary groups. II. An extension of the pattern calculus rules and the canonical splitting in $U(3)$ // J. Math. Phys. 1972. V. 13, N 12. P. 1957–1984.

14. *Артамонов Д. В.* Коэффициенты Клебша — Гордана для $\mathfrak{gl}_3$ и гипергеометрические функции // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33, № 1. С. 1–29.

15. *Artamonov D. V.* Formula for the product of Gauss hypergeometric functions and applications // J. Math. Sci. 2020. V. 249. P. 1–29.

16. *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления. М.: МЦНМО, 2007.

17. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С.* Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // Успехи мат. наук. 1992. Т. 47, № 4. С. 3–82.

18. *Klyachko A. A.* Stable vector bundles and Hermitian operators. University of Marne-la-Vallee, 1994. (Preprint).

19. *Knutson A., Tao T.* The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products I: Proof of the saturation conjecture // J. Amer. Math. Soc. 1999. V. 12, N 4. P. 1055–1090.

20. *Manon C., Zhou Z.* Semigroups of $sl_2(\mathbb{C})$ tensor product invariants // J. Algebra. 2014. V. 400. P. 94–104.

Поступила в редакцию 19 апреля 2021 г.
После доработки 9 апреля 2022 г.
Принята к публикации 15 апреля 2022 г.

Артамонов Дмитрий Вячеславович (ORCID 0000-0001-5921-1513)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
3-й новый учебный корпус,
экономический факультет, кафедра ММАЭ,
Ленинские горы, Москва 119991, ГСП-1
artamonov@econ.msu.ru