А. М. Седлецкий, Ряды Дирихле на системе отрезков, исходящих из начала координат, *Матем. заметки*, 1980, том 27, выпуск 2, 197–208

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 2 (1980)

РЯДЫ ДИРИХЛЕ НА СИСТЕМЕ ОТРЕЗКОВ, ИСХОДЯЩИХ ИЗ НАЧАЛА КООРДИНАТ

А. М. Седлецкий

Введение. Пусть $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{m} [0, a_j]$, где a_j $(j = 1, 2, \ldots, m, m \geqslant 3)$ — вершины выпуклого многоугольника $D \supset 0$, $\arg a_{j+1} \geqslant \arg a_j$. Через $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(|\lambda_n| \leqslant |\lambda_{n+1}|)$ обозначаем последовательность корней квазиполинома

$$L(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} h_j e^{\lambda a_j} \qquad \left(\prod_{j=1}^{m} h_j \neq 0\right). \tag{1}$$

Кратных корней у $L(\lambda)$ конечное число, поэтому не снижая общности, считаем, что все корни $L(\lambda)$ просты. И. С. Галимов [1] построил биортогональный ряд на Γ по системе $\{\exp(\lambda_n z)\}_{n=1}^{\infty}$. Он выглядит так: если $f \in L^1(\Gamma)$, то

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k z},$$

$$c_k = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \sum_{j=1}^{m} h_j \int_0^{a_j} f(a_j - v)\, e^{\lambda_k v} dv. \tag{2}$$

Относительно этого ряда в [1], [2] доказаны теорема единственности ($f \in C(\Gamma)$ и все $c_n = 0 \Rightarrow f(z) \equiv 0$) и теорема о разложении аналитической функции (если $f(z)$ аналитична на Γ, то ряд (2) сходится к $f(z)$ равномерно в некоторой окрестности точки $z = 0$). Интерес к ряду (2) вызван невыпуклостью Γ — обычно ряды экспонент изучаются на выпуклых областях в $\mathbf{C}^1$ и на интервалах в $\mathbf{R}^1$. Простой пример (он приводится в § 2) показывает, что $\forall n \in \{1, 2, \ldots\}$ $\exists f \in C^n(\Gamma)$ такая, что ряд (2) расходится $\forall z \neq 0$. Это побудило автора рассмотреть поведение ряда (2) в точке $z = 0$, т. е. ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f). \tag{3}$$

Кроме того, мы вернемся к вопросу о разложении аналитической функции в ряд (2).

Пусть $S_r(f) = \Sigma_{|\lambda_n| \leqslant r} c_n(f)$. Ясно, что S_r есть линейный непрерывный функционал над $L^p(\Gamma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, его норму обозначаем через $\| S_r \|_p$.

ТЕОРЕМА 1. *Для всех* $p \in [1, \infty]$ $\| S_r \|_p \asymp r^{1/p}$.

Здесь символ $\varphi(r) \asymp g(r)$ означает, что $0 < \delta \leqslant \varphi(r)/g(r) \leqslant M < \infty$, $r \geqslant r_0$. В частности, если $f \in L^\infty(\Gamma)$, то частичные суммы ряда (3) ограничены в совокупности. В чем же состоят условия сходимости ряда (3)? Пусть $f_j \in L^1(0, a_j)$; рассмотрим оператор

$$(Ff_j)(t) = (1/t)\int_0^t f(v e^{i \arg a_j})\, dv, \qquad 0 < t < |a_j|,$$

ставящий в соответствие функции f_j функцию средних значений. Под F^n понимаем обычную степень оператора. Оператор F^2 примени́м уже не ко всем функциям из $L^1(\Gamma)$ (пример: $f(t) = (t \ln^2 t)^{-1}$, $0 < t < 1/2$), однако к ограниченной функции применима любая степень оператора F. По определению $(F^0 f_j)(t) = f_j(t\, e^{i \arg a_j})$, $0 < t < |a_j|$. Ясно, что если $(F^n f_j)(t) \to A_0$ при $t \to 0 + 0$, то и $(F^k f_j)(t) \to A_0$ для любого $k > n$; обратное неверно. Сужение $f \in L^1(\Gamma)$ на $(0, a_j)$ обозначаем через f_j; пусть, наконец, $\varphi_j = \arg(a_j - a_{j-1}) - \pi/2$ $(a_{m+1} = a_1)$.

ТЕОРЕМА 2. *Если найдутся целые* $n_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *такие, что существуют пределы*

$$\lim_{t \to 0+0} (F^{n_j} f_j)(t) = A_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m,$$

то ряд (3) *сходится к значению*

$$(2\pi)^{-1} \sum_{j=1}^{m} (\varphi_{j+1} - \varphi_j) A_j.$$

В частности, если $f(z)$ *непрерывна в точке* $z = 0$, *то ряд* (3) *сходится к значению* $f(0)$.

С применением теоремы 2 будет показано, что существует $f \in L^\infty(\Gamma)$, для которой ряд (3) расходится; это утверждение полезно сопоставить с утверждением теоремы 1 при $p = \infty$.

Последовательность $\{\lambda_n\}$ может быть разбита [3, стр. 56] на m подпоследовательностей $\{\lambda_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ ($j = 1, 2, \ldots, m$), где

$$\lambda_n^{(j)} = (\pi n/l_j) \exp(-i\varphi_j) + p_j + o(1),$$
$$2l_j = |a_j - a_{j-1}|, \tag{4}$$

а p_j — некоторые фиксированные числа. В соответствии с этим перенумеруем последовательность коэффициентов, т. е. под $c_n^{(j)}$ понимаем коэффициент ряда (2), отвечающий точке $\lambda_n^{(j)}$. Через $D(R_1, R_2, \ldots, R_m)$ обозначаем многоугольник с вершинами $ha_1, ha_2, \ldots, ha_m$, $0 < h < 1$, причем R_j — это расстояние от точки $z = 0$ до стороны ha_{j-1}, ha_j. Исследуем связь между следующими условиями:

1) $f(z)$ аналитична в многоугольнике $D(R_1, R_2, \ldots, R_m)$;

2) $\forall\delta \in (0, \min[R_1, R_2, \ldots, R_m])$

$$|c_n^{(j)}| \leqslant K(\delta) \exp\{-(R_j - \delta) |\lambda_n^{(j)}|\},$$
$$n = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots, m;$$

3) ряд (2) сходится к $f(z)$ равномерно внутри $D(R_1, R_2, \ldots, R_m)$.

ТЕОРЕМА 3. 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3).

В импликации 1) $\Rightarrow$ 3) содержится теорема И. С. Галимова [2].

§ 1. Доказательство теоремы 1. Через $k(\varphi; B)$ обозначаем опорную функцию множества B; пишем $k(\varphi)$ вместо $k(\varphi; D)$. Комплексно сопряженные множества снабжаем звездочкой. Введем множества

$$V_j(\varepsilon) = \{\lambda\colon |\arg\lambda - \varphi_j| < \varepsilon\} \cup \{\lambda\colon |\arg\lambda - \varphi_{j+1}| < \varepsilon\},$$
$$U_j(\varepsilon) = \{\lambda\colon \varphi_j + \varepsilon < \arg\lambda < \varphi_{j+1} - \varepsilon\},$$
$$W_j(\varepsilon) = \mathbf{C}^1 \setminus \{U_j(\varepsilon) \cup V_j(\varepsilon)\}.$$

Число $\varepsilon > 0$ фиксируется так, чтобы при $\exp(i\varphi) \in V_j(\varepsilon)$, $v \in [0, a_j]$

$$k(\varphi; v) \leqslant k(\varphi; a_j) - \delta |a_j - v|, \quad \delta > 0. \tag{5}$$

Это можно сделать, ибо угол между лучом $\arg\lambda = \varphi_j$ ($\arg\lambda = \varphi_{j+1}$) и отрезком $[0, a_j]$ — острый, и при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ $|\arg a_j - (\varphi_k \pm \varepsilon)| < \pi/2 - \delta(\varepsilon_0)$, $\delta(\varepsilon_0) > 0$, $k = j$,

$j+1$. Значит, достаточно положить

$$\delta = \min \{\cos [\arg a_j - (\varphi_j \pm \varepsilon_0)], \\ \cos [\arg a_j - (\varphi_{j+1} \pm \varepsilon_0)]\}. \qquad (6)$$

Отметим, что при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ δ от ε не зависит.

Полагая, что на окружности $C_r = \{\lambda: \ |\lambda| = r\}$ нет корней $L(\lambda)$, запишем функционал S_r в виде

$$S_r(f) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{a_j} f(a_j - v)\{(h_j/(2\pi i))\, I_r(v)\}\, \mathrm{d}v,$$

$$I_r(v) = \int_{|\lambda|=r} \mathrm{e}^{\lambda v}/L(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda. \qquad (7)$$

Случаи $p=\infty$, $p=1$ и $p \in (1, \infty)$ рассмотрим отдельно, зафиксировав предварительно три леммы.

ЛЕММА 1 [3, стр. 56].

1) $|L'(\lambda_n)| \geqslant A \exp(|\lambda_n|\, k(-\arg \lambda_n))$;

2) $|L(\lambda)| \geqslant A(\delta) \exp(|\lambda|\, k(-\arg \lambda))$,

$$\operatorname{dist}(\lambda, \{\lambda_n\}) \geqslant \delta > 0.$$

ЛЕММА 2 [4]. *В секторе* $U_j^*(\varepsilon)$ $L(\lambda) = h_j(1 + o(1)) \exp(\lambda a_j)$ *равномерно при* $\lambda \to \infty$.

ЛЕММА 3. $f \in L^1(\Gamma) \Rightarrow c_n \to 0$.

Лемма 3 вытекает из формулы (2), оценки

$$\left|\sum_{j=1}^{m} h_j \int_0^{a_j} f(a_j - v)\, \mathrm{e}^{\lambda_n v}\, \mathrm{d}v\right| \leqslant M \cdot \exp(|\lambda_n|\, k(-\arg \lambda_n)),$$

леммы 1, дающих неравенство $|c_n| \leqslant A\, \|f\|$, и теоремы Банаха — Штейнгауза, ибо интегрированием по частям убеждаемся, что для функций класса $C^1(\Gamma)$, плотных в $L^1(\Gamma)$, $c_n = o(1)$.

1. $p = \infty$. Благодаря (7), достаточно показать, что нормы функций $I_r(v)$ в $L^1(0, a_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ равномерно ограничены (по r). При этом в силу формулы (4) и леммы 3 ограничимся рассмотрением тех значений r, для которых $\operatorname{dist}(\bigcup C_r, \{\lambda_n\}) \geqslant \delta_0 > 0$. Зафиксируем j; норму f в $L^q(0, a_j)$ обозначаем через $\|f\|_q$. Разобьем $I_r(v)$ на три интеграла:

$$I_r(v) = I(v) + J(v) + K(v), \qquad (8)$$

взятых по пересечению окружности C_r соответственно с множествами $U_j^*(\varepsilon)$, $V_j^*(\varepsilon)$, $W_j^*(\varepsilon)$. Через I_1, I_2, I_3 обозначаем множества соответствующих значений $\varphi =$

$= \arg\lambda$. При $\lambda \in W_j^*(\varepsilon)$, $v \in [0, a_j]$ $k(-\arg\lambda;\ v) \leqslant \leqslant k(-\arg\lambda) - \delta_1$, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$. Значит, здесь по лемме 1

$$\left|\frac{\exp(\lambda v)}{L(\lambda)}\right| = \frac{\exp\{|\lambda|\,k(-\arg\lambda;\,v)\}}{|L(\lambda)|} \leqslant A_1 \exp(-\delta_1|\lambda|), \tag{9}$$

$$|K(v)| \leqslant A_1 r \exp(-\delta_1 r) \int_{I_3} d\varphi \leqslant A_2 r \exp(-\delta_1 r). \tag{10}$$

Далее, из оценки (5) и леммы 1 следует, что

$$\left|\frac{\exp(\lambda v)}{L(\lambda)}\right| \leqslant A_1 \exp(-\delta|\lambda|\,|a_j - v|), \quad \lambda \in V_j^*(\varepsilon), \quad v \in [0, a_j], \tag{11}$$

$$|J(v)| \leqslant A_1 r \int_{I_2} e^{-\delta r|a_j - v|} d\varphi \leqslant 4A_1 \varepsilon r e^{-\delta r|a_j - v|}, \tag{12}$$

$$\|J(v)\|_1 \leqslant 4A_1 \varepsilon r \int_0^{a_j} e^{-\delta r|a_j - v|}\,|dv| \leqslant 4A_1\varepsilon/\delta. \tag{13}$$

Переходя к $I(v)$, обозначим $A = r\exp[-i(\varphi_{j+1} - \varepsilon)]$, $B = r\exp[-i(\varphi_j + \varepsilon)]$. Благодаря лемме 2

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1 + o(1)}{h_j} \int_A^B e^{\lambda(v - a_j)} d\lambda = \\ &= \frac{1 + o(1)}{h_j(v - a_j)} \{\exp[r(v - a_j)e^{-i(\varphi_j + \varepsilon)}] - \\ &\qquad - \exp[r(v - a_j)e^{-i(\varphi_{j+1} - \varepsilon)}]\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Значит, при $v \in [0, a_j]$ и $|v - a_j| \leqslant a/r$ (где a — достаточно мало)

$$A_3 r \leqslant |I(v)| \leqslant A_4 r, \qquad 0 < A_3 \leqslant A_4 < \infty, \tag{15}$$

причем a, A_3, A_4 не зависят от $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Из (14) также следует, что

$$|I(v)| \leqslant A_5 \left\{\left|\frac{\exp[r(v - a_j)e^{-i(\varphi_j + \varepsilon)}]}{v - a_j}\right| + \right. \\ \left. + \left|\frac{\exp[r(v - a_j)e^{-i(\varphi_{j+1} - \varepsilon)}]}{v - a_j}\right|\right\}.$$

Но ведь по (6)

$$\operatorname{Re}\{(v-a_j)e^{-i(\varphi_j+\varepsilon)}\} =$$
$$= -\mid v-a_j\mid \cos[\arg a_j - (\varphi_j+\varepsilon)] \leqslant -\delta\mid v-a_j\mid,$$

и та же оценка верна для $\operatorname{Re}\{(v-a_j)\exp(-i(\varphi_{j+1}-\varepsilon))\}$. Значит,

$$\mid I(v)\mid \leqslant A_6\mid v-a_j\mid^{-1}\cdot\exp(-r\delta\mid v-a_j\mid). \qquad (16)$$

Этой оценкой мы будем пользоваться для $\mid v-a_j\mid \geqslant a/r$. Оценки (15) — правая и (16) дают

$$\| I(v)\|_1 = \left\{\int_{\mid v-a_j\mid\leqslant a/r} + \int_{\mid v-a_j\mid\geqslant a/r}\right\}\mid I(v)\mid\mid dv\mid \leqslant$$
$$\leqslant A_7 + A_8 r\int_0^{\mid a_j\mid}\exp(-\delta rt)\,dt \leqslant A_7 + A_8/\delta. \qquad (17)$$

Теперь применим левое неравенство (15):

$$\| I(v)\|_1 \geqslant \int_{\mid v-a_j\mid\leqslant a/r}\mid I(v)\mid\mid dv\mid \geqslant A_9 > 0. \qquad (18)$$

Объединяя оценки (17), (18) с оценками (10), (13), получаем благодаря произволу в выборе ε: если $r\geqslant r_0$, то $0 < A_{10} \leqslant \| S_r\|_\infty \leqslant A_{11} < \infty$. Это доказывает теорему при $p=\infty$.

2. $p=1$. Из оценок (10), (12), (15) — правая и (16) получается, что $\mid I_r(v)\mid \leqslant A_{12}r$, $v\in[0, a_j]$. С другой стороны, неравенства (10), (12), (15) — левое приводят к следующему: если $v\in[0, a_j]$ и $\mid v-a_j\mid \leqslant a/r$, то

$$\mid I_r(v)\mid \geqslant \mid I(v)\mid - \mid J(v)\mid - \mid K(v)\mid \geqslant A_{13}r.$$

Полученные неравенства и означают, что $\| S_r\|_1 \asymp r$.

3. $1<p<\infty$. Пусть $q^{-1}+p^{-1}=1$. Снова по оценкам сверху (10), (12), (15) и (16)

$$\| I_r(v)\|_q \leqslant o(1) + 4A_1\varepsilon r\left[\int_0^{\mid a_j\mid}\exp(-\delta qrt)\,dt\right]^{1/q} +$$
$$+\left\{A_4^q r^q\frac{a}{r} + A_6^q\left(\frac{r}{a}\right)^q\int_0^{\mid a_j\mid}\exp(-\delta qrt)\,dt\right\}^{1/q} \leqslant A_{14}\cdot r^{1/p}. \qquad (19)$$

С другой стороны,

$$\| I_r(v)\|_q \geqslant \| I(v)\|_q - \| J(v)\|_q - \| K(v)\|_q.$$

Усилим это неравенство, учитывая в интеграле, дающем $\| I(v)\|_q$, значения $I(v)$ только на отрезке $\mid v-a_j\mid \leqslant$

$\leqslant a/r$, и применим неравества (10), (12), (15) — левое:

$$\| I_r(v)\|_q \geqslant A_3 r\,(a/r)^{1/q} - 4A_1\varepsilon\,(\delta q)^{-1/q}\cdot r^{-1/p} - o\,(1).$$

Значит, $\| I_r(v)\|_q \geqslant A_{15} r^{1/p}$, что вместе с (19) доказывает теорему 1.

§ 2. Доказательство теоремы 2. Пусть $\psi(z) = A_j$ при $z \in (0,\ a_j)$ и $\psi(z) = 0$ на $\Gamma \setminus (0,\ a_j)$. Тогда

$$S_r(\psi) = \frac{A_j h_j}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{e^{\lambda a_j}}{\lambda L(\lambda)}\,d\lambda + O\,(e^{-\delta_2 r}).$$

Полученный интеграл разбивается на три ($S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$): по пересечению C_r с $U_j^*(\varepsilon)$, $V_j^*(\varepsilon)$, $W_j^*(\varepsilon)$. По оценке (9) $S^{(3)} = O\,(\exp(-\delta r))$. Рассматривая $S^{(2)}$, пользуемся оценкой (11) с $v = a_j$; получаем, что $|S^{(2)}| \leqslant A_{15}\cdot\varepsilon$. $S^{(1)}$ исследуется с помощью леммы 2. В итоге

$$S_r(\psi) = ((A_j/2\pi))(\varphi_{j+1} - \varphi_j) + B_1 + B_2,$$
$$|B_1| \leqslant A_{16}\cdot\varepsilon, \quad |B_2| = O\,(e^{-\delta_2 r}). \quad (20)$$

Вспоминая (7), имеем

$$S_r(f_j) - A_j\,\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{2\pi} = \int_0^{a_j} [f(a_j - v) - A_j]\cdot$$
$$\cdot\, I_r(v)\,dv + B_1 + B_2.$$

Для оценки интеграла используем (8) и (10). Слагаемое $K(v)$ дает $O\,(\exp(-\delta_3 r))$, и, следовательно, положив $t = (a_j - v)\exp(-i\arg a_j)$, $f(a_j - v) - A_j = g(t)$, получаем

$$S_r(f_j) - \frac{A_j}{2\pi}(\varphi_{j+1} - \varphi_j) = \frac{h_j}{2\pi i}\,e^{i\arg a_j}(M + N) + B_1 + B_2,$$

где B_1, B_2 имеют тот же смысл, что и в (20), а

$$M = \int_0^{|a_j|} g(t)\,I\,(a_j - te^{i\arg a_j})\,dt,$$

$$N = \int_0^{|a_j|} g(t)\,J\,(a_j - te^{i\arg a_j})\,dt.$$

Обозначим

$$\alpha = \varphi_{j+1} - \varepsilon - \arg a_j, \quad \beta = \varphi_j + \varepsilon - \arg a_j,$$

$$E(t) = t^{-1}\,[\exp(-rte^{-i\alpha}) - \exp(-rte^{-i\beta})].$$

Из (14) вытекает представление

$$M = (h_j e^{i \arg a_j})^{-1} \cdot (1 + o(1)) \int_0^{|a_j|} E(t) g(t) \, \mathrm{d}t. \tag{21}$$

Нам надо показать, что $M \to 0$, $N \to 0$ при $r \to \infty$. По неравенствам (17) и (16) для любого $\Delta \in (0, |a_j|)$

$$\int_0^{\Delta} |E(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant A_{17}, \quad |E(t)| \leqslant A_6 \cdot \exp(-r\delta\Delta), \quad t \geqslant \Delta. \tag{22}$$

Если $n_j = 0$, то $|g(t)|$ сколь угодно мал на $(0, \Delta)$ за счет выбора Δ. Поэтому, разбивая интеграл в (21) на два (по $(0, \Delta)$ и $(\Delta, |a_j|)$), видим благодаря (22), что первое слагаемое сколь угодно мало, а второе есть $O(\exp(-\delta_4 r))$.

Пусть $n_j \geqslant 1$; введем оператор $D = t\,(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)$ и проинтегрируем по частям n_j раз в интеграле (21):

$$\int_0^{|a_j|} E(t) g(t) \, \mathrm{d}t =$$

$$= O(\mathrm{e}^{-\delta_5 r}) + (-1)^{n_j} \int_0^{|a_j|} (F^{n_j} g)(t)(D^{n_j} E)(t) \, \mathrm{d}t.$$

Но

$$DE(t) = -E(t) - r\,\{\mathrm{e}^{-i\alpha} \cdot \exp(-rte^{-i\alpha}) - e^{-i\beta} \cdot \exp \cdot \\ \cdot (-rte^{-i\beta})\},$$

и, значит, $D^{n_j} E(t)$ есть линейная комбинация функций

$$E(t), \quad r\,(rt)^{n-1} \{\mathrm{e}^{-in\alpha} \cdot \exp(-rt\mathrm{e}^{-i\alpha}) - \mathrm{e}^{-in\beta} \cdot \exp(-rt\mathrm{e}^{-i\beta})\},$$

для $n = 1, 2, \ldots, n_j$. В свою очередь интеграл в (21) равен

$$\int_0^{|a_j|} (F^{n_j} g)(t)\, E(t) \, \mathrm{d}t + O(\mathrm{e}^{-\delta_5 r}) \tag{23}$$

плюс линейная комбинация интегралов

$$\int_0^{|a_j|} (F^{n_j} g)(t) \{r\,(rt)^{n-1} [\mathrm{e}^{-in\alpha} \cdot \exp(-rt\mathrm{e}^{-i\alpha}) - \\ - \mathrm{e}^{-in\beta} \cdot \exp(-rt\mathrm{e}^{-i\beta})]\} \, \mathrm{d}t. \tag{24}$$

По условию $(F^{n_j} g)(t) \to 0$ при $t \to 0 + 0$, и интеграл (23) сколь угодно мал при $r \geqslant r_0$, подобно случаю $n_j = 0$. Но это относится и к каждому интегралу (24). В самом деле, разбивая его на два (по $(0, \Delta)$ и $(\Delta, |a_j|)$), видим, что первый интеграл мал благодаря условию $(F^{n_j} g)(t) \to 0$, выбору Δ и неравенству $\int_0^\Delta |B_r(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M_n$, $0 < \Delta < |a_j|$, $r \geqslant r_0$, где $B_r(t)$ — фигурная скобка в (24) (последнее доказывается в свою очередь разбиением $(0, \Delta)$ на интервалы $(0, a/r)$ и $(a/r, \Delta)$ — для первого интервала применяется оценка типа (15) — правая, а для второго — оценка

$$|B_r(t)| \leqslant Ar(rt)^{n-1}\cdot\exp(-\delta_6 rt), \qquad t \geqslant a/r, \tag{25}$$

получаемая так же, как оценка (16)). Часть интеграла (24), взятая по $(\Delta, |a_j|)$, в силу (25) есть $o(1)$. Итак, $M \to 0$ при $r \to \infty$. Обратимся к N. Если $n_j = 0$, то достаточно разбить интеграл N на два (снова по $(0, \Delta)$ и $(\Delta, |a_j|)$) и применить оценку (12). Пусть $n_j \geqslant 1$. Так как (см. (7), (8))

$$J^{(n)}(v) = \int_{C_r \cap V_j^*(\varepsilon)} \{\lambda^n e^{\lambda v}/L(\lambda)\}\,\mathrm{d}\lambda,$$

то тем же путем, которым была получена оценка (12), получается оценка

$$|J^{(n)}(a_j - te^{i\arg a_j})| \leqslant 4A_1\varepsilon r^{n+1}\cdot\exp(-\delta rt),$$
$$n = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

В интеграле N проинтегрируем по частям n_j раз; благодаря (12) и (26) получим

$$N = (-1)^{n_j}\int_0^{|a_j|}(F^{n_j}g)(t)\,D^{n_j}J(a_j - te^{i\arg a_j})\,\mathrm{d}t + O(e^{-\delta_\varepsilon r}).$$

Оператор D^{n_j} есть линейная комбинация операторов $t^k(\mathrm{d}^k/\mathrm{d}t^k)$, $k = 1, 2, \ldots, n_j$ (это проверяется индукцией), и нам достаточно, имея в виду условие теоремы, сослаться на соотношения

$$\int_0^\Delta t^k|J^{(k)}(a_j - te^{i\arg a_j})|\,\mathrm{d}t \leqslant M_1, \qquad k = 1, 2, \ldots, n_j,$$

$$\sup_{t \geqslant \Delta}|t^k J^{(k)}(a_j - te^{i\arg a_j})| = o(1) \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

являющиеся следствиями оценки (26). Значит, и $N \to 0$ при $r \to \infty$. Теорема 2 доказана.

С л е д с т в и е. *Существует* $f \in L^\infty(\Gamma)$ *с расходящимся рядом* (3).

Пусть последовательность $\{r_k\} \uparrow \infty$ такова, что

$$\inf |r_k - |\lambda_n|| > 0 \quad (\forall k, \ \forall n), \quad r_{k+1} - r_k = O\ (1).$$

По лемме 3 достаточно показать существование функции $f \in L^\infty(\Gamma)$ с расходящейся последовательностью $S_{r_k}(f)$. Предположим противное: $S_{r_k}(f)$ сходится $\forall f \in L^\infty(\Gamma)$. Обозначив $\Phi = \lim S_{r_k}$ (предел — слабый), заключаем, что функционал Φ должен представляться функцией φ из $L^1(\Gamma)$, т. е. $\Phi(f) = \int f\varphi\, dt$. Действительно (см. (7)), в этом случае функции $I_{r_k}(v) \in L^1(\Gamma)$ образовывали бы слабо сходящуюся последовательность и ее слабый предел φ и представлял бы функционал Φ. Но по оценкам (10), (12), (16) $I_{r_k}(v) \to 0$ равномерно вне произвольно малых окрестностей точек a_j. Значит, Φ — тривиальный функционал. А это противоречит теореме 2: если f непрерывна и $f(0) \neq 0$, то $S_{r_k}(f)$ сходится к ненулевому значению.

Отметим, что, опираясь на теорему 2, нетрудно построить функцию $f \in L^1(\Gamma)$ со сходящимся рядом (3) и не принадлежащую $L^p(\Gamma)$ $\forall\, p > 1$.

Пример, о котором шла речь во введении, доставляет функция

$$g(z) = a_j z^{n+1}, \qquad z \in (0, a_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Интегрирование по частям $n + 1$ раз в формуле (2) дает

$$c_k(g) = \frac{(n+1)!}{L'(\lambda_k)} \left\{ \frac{L^1(\lambda_k)}{\lambda_k^{n+2}} - \sum_{r=1}^{n+2} \frac{1}{\lambda_k^r} \frac{L^{(n+3-r)}(0)}{(n+2-r)!} \right\}.$$

С применением леммы 1 заключаем, что $|c_k(g)| \geqslant h\, |\lambda_k|^{-n-2}$, $k \geqslant k_0$. Пусть теперь $z = |z| \exp(i\varphi)$ — произвольная ненулевая точка. Найдется угол φ_j (наклона нóрмали к одной из сторон D) такой, что $|\varphi - \varphi_j| < \pi/2$; т. е. для точек λ_k из соответствующей последовательности (4)

$$|\exp(\lambda_k z)| = \exp(|\lambda_k z| \cos(\varphi + \arg \lambda_k)) \geqslant$$
$$\geqslant A \exp(\Delta\, |\lambda_k|), \qquad k \geqslant k_1, \qquad \Delta > 0.$$

Объединяя это с полученной оценкой для $c_k(g)$, видим, что общий член ряда (2) в точке z не стремится к 0.

§ 3. Доказательство теоремы 3. Достаточно доказать импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 2) $\Rightarrow$ 3). Начнем со второй. Равномерная сходимость ряда (2) внутри $D(R_1, R_2, \ldots, R_m)$

сразу следует из оценок для коэффициентов. Надо только убедиться, что предельная функция совпадает с $f(z)$, для чего покажем, что продифференцированный n раз ($n = 0, 1, 2, \ldots$) ряд (2) сходится в точке $z = 0$ к $f^{(n)}(0)$. По теореме 2 при $n = 0$ это так. Рассмотрим многоугольник $D(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$, где $\rho_j < R_j$; пусть $a_j - b_j$ ($b_j \in (0, a_j)$) — его вершины ($j = 1, 2, \ldots, m$). Пусть $F(z) = f(z)$ на $\Gamma \cap D(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$ и $F(z) = 0$ вне. Тогда

$$S_r(F^{(n)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{d\lambda}{L(\lambda)} \sum_{j=1}^{m} h_j \int_{b_j}^{a_j} f^{(n)}(a_j - v)\, e^{\lambda v} dv. \tag{27}$$

По теореме 2 $S_r(F^{(n)}) \to f^{(n)}(0)$ при $r \to \infty$. Остается показать, что разность между $S_r(F^{(n)})$ и частичной суммой порядка r продифференцированного n раз ряда (2) в точке $z=0$ есть $o(1)$. Упомянутая частичная сумма равна

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{\lambda^n d\lambda}{L(\lambda)} \sum_{j=1}^{m} h_j \left\{ \int_0^{b_j} + \int_{b_j}^{a_j} \right\} f(a_j - v)\, e^{\lambda v} dv. \tag{28}$$

Если обозначить через B многоугольник с вершинами $b_1, b_2, \ldots, b_m$, то ясно, что

$$k(\varphi;\ B) \leqslant k(\varphi;\ D) - \Delta, \qquad \Delta > 0. \tag{29}$$

Отсюда и из леммы 1 вытекает, что первое слагаемое в (28) (оно порождено интегралом от 0 до b_j) есть $o(1)$. Во втором слагаемом интегрируем по частям n раз; в итоге с точностью до $o(1)$ выражение (28) равно правой части (27) плюс

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{d\lambda}{L(\lambda)} \left\{ \sum_{j=1}^{m} h_j e^{\lambda b_j} \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \cdot f^{(i-1)}(a_j - b_j) \right\}.$$

По неравенству (29) модуль фигурной скобки не превосходит $cr^{n-1} \exp(r(k(\varphi) - \Delta))$. По лемме 1 последний интеграл есть $o(1)$ при $r \to \infty$. Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) доказана.

Зафиксируем $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Обозначим через γ_n последовательность непересекающихся и не содержащихся друг в друге окружностей одинакового радиуса с центрами в точках $\lambda_n^{(k)}$. Сохраняя за обозначением $D(\rho_1, \rho_2, \ldots$

$\ldots, \rho_m)$ прежний смысл, выберем ρ_k из условия $R_k - \delta < \rho_k < R_k$. Пусть μ — точка пересечения стороны $a_{k-1} - b_{k-1}$, $a_k - b_k$ с нормалью $\arg \lambda = \varphi_k$. В силу аналитичности $f(z)$

$$\int_0^{a_j} f(v)\, e^{-\lambda v} dv = \left\{\int_0^{\mu} + \int_{\mu}^{a_j - b_j} + \int_{a_j - b_j}^{a_j}\right\} f(v)\, e^{-\lambda v} dv,$$

где интегрирования ведутся по отрезкам. Поэтому

$$c_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{d\lambda}{L(\lambda)} \sum_{j=1}^{m} h_j e^{\lambda a_j} \int_0^{a_j} f(v)\, e^{-\lambda v} dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{d\lambda}{L(\lambda)} \sum_{j=1}^{m} h_j e^{\lambda a_j} \left\{\int_{\mu}^{a_j - b_j} + \int_{a_j - b_j}^{a_j}\right\} f(v)\, e^{-\lambda v} dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{d\lambda}{L(\lambda)} \sum_{j=1}^{m} h_j \left\{\int_{b_j}^{a_j - \mu} + \int_0^{b_j}\right\} f(a_j - v)\, e^{\lambda v} dv. \qquad (30)$$

Здесь переменная v не выходит за пределы некоторого многоугольника G, расположенного в полуплоскости, ограниченной продолжением стороны b_{k-1}, b_k и содержащей многоугольник B. Поэтому, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то при $|\varphi - \varphi_k| < \varepsilon$ $k(\varphi; G) \leqslant d_k - R_k + \delta$, где d_k — расстояние от точки $z = 0$ до стороны a_{k-1}, a_k. Следовательно, модуль суммы в (30) не превосходит $C \exp(|\lambda| \cdot (d_k + \delta - R_k))$. По лемме же 1 $|L(\lambda)| \geqslant A \exp(|\lambda| \cdot d_k)$, $\lambda \in \gamma_n$, $n \geqslant n_0$. Значит, $|c_n^{(k)}| \leqslant c \exp(|\lambda_n^{(k)}| (\delta - R_k))$. Теорема 3 доказана.

Московский институт
инженеров землеустройства

Поступило
11.VII.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Галимов И. С., О полноте системы экспонент в невыпуклых областях, Матем. сб., 98, № 1 (1975), 42—54.

[2] Галимов И. С., О представлении функций, аналитических в невыпуклых областях, рядами Дирихле, Сиб. матем. ж., **17**, № 4 (1976), 782—796.

[3] Леонтьев А. Ф., Ряды экспонент, М., «Наука», 1976.

[4] Седлецкий А. М., О разложениях функций в ряды Дирихле на замкнутых выпуклых многоугольниках, Сиб. матем. ж., **19**, № 4 (1978), 657—666.