В. А. Срочко, Р. Г. Хамидулин, Метод последовательных приближений в задачах оптимального управления с краевыми условиями,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986, том 26, номер 4, 508–520

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 26, 1986 № 4

УДК 519.6:517.977

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

СРОЧКО В. А., ХАМИДУЛИН Р. Г.

(Иркутск)

Построен итерационный метод, использующий основные моменты теории принципа максимума — линеаризацию задачи по фазовым переменным в совокупности с процедурой игольчатого варьирования управления. Даны рекомендации по реализации метода, приведены результаты расчетов.

Характерные особенности теории принципа максимума связаны, как известно, с игольчатым (неклассическим) варьированием управления и линеаризацией задачи относительно фазовых переменных. Актуальной проблемой развития конструктивной теории оптимального управления является создание вычислительных методов с указанными свойствами. В настоящее время методы такого типа построены, апробированы и показали свою эффективность в задачах без фазовых ограничений (со свободным правым концом) [1]–[3]. Ниже на основе принципа максимума проводится разработка метода последовательных приближений для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями — равенствами на правом конце (с краевыми условиями). Характерные черты метода состоят в следующем:

1) для отыскания вспомогательного управления на каждом шаге итерационного процесса проводится линеаризация задачи только по фазовым переменным;

2) реализуется процедура варьирования неклассического типа: строится однопараметрическое семейство подмножеств отрезка времени, на которых основное управление заменяется вспомогательным;

3) параметр семейства (мера множества варьирования) выбирается согласно условию убывания модифицированного функционала Лагранжа с множителями, полученными из решения линеаризованной задачи.

Линейную задачу оптимального управления (этап 1) рекомендуется решать с помощью методов двойственного типа (необходимо знать множители Лагранжа для этапа 3).

Основная трудность при разработке метода (как и в случае задачи без ограничений) связана с построением системы множеств варьирования (этап 2), обеспечивающей желаемые свойства убывания некоторых функционалов задачи. В статье эта проблема решается на основе конструкций, использованных в [4], [5] для доказательства принципа максимума в задачах с краевыми условиями. С помощью основного свойства множества варьирования (система интегральных неравенств) проводится обоснование этапа 3. Даются рекомендации по реализации метода, приводятся результаты расчетов.

Вопросы эффективности методов данного типа неоднократно обсуждались в литературе (см. [1]–[3]).

§ 1. Постановка задачи. Принцип максимума

Рассмотрим задачу оптимального управления

(1.1) $\Phi_0(u)=\varphi_0(x(t_1))\to\min$,

связанную с системой обыкновенных дифференциальных уравнений

(1.2) $\dot{x}=f(x, u, t)$, $\quad x(t_0)=x^0$

при ограничениях на управление

(1.3) $u(t)\in U$, $\quad t\in T=[t_0, t_1]$

и краевых условиях на фазовую траекторию

(1.4) $\Phi_i(u)=\varphi_i(x(t_1))=0$, $\quad i=1, 2, \dots, m$.

Предположим, что в задаче (1.1)–(1.4) функции $\varphi_i(x)$, $i=0, 1, \dots, m$, дифференцируемы на E_n, вектор-функция $f(x, u, t)$ непрерывна по своим аргументам на $E_n\times U\times T$ вместе с матрицей частных производных $f_x(x, u, t)$, множество $U\subset E_r$ компактно, начальное состояние x^0 и промежуток времени T заданы.

Класс U допустимых управлений определим как множество кусочно-непрерывных на T вектор-функций $u(t)$, удовлетворяющих ограничению (1.3).

Пусть $u(t)$, $t\in T$, — допустимое управление, $x(t)$ — соответствующее решение системы (1.2), удовлетворяющее условиям (1.4). С каждым вектором $\lambda=(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ свяжем решение $\psi(t, \lambda)$ сопряженной системы

$$\dot{\psi}=-f_x(x(t), u(t), t)'\psi, \qquad \psi(t_1)=-\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\nabla\varphi_i(x(t_1)).$$

Введем функцию $H=\psi' f$ и условимся относительно следующих обозначений:

$$\Delta_{v(t)}H[t, \lambda]=\psi(t, \lambda)'\Delta_{v(t)}f(x(t), u(t), t),$$

$$\Delta_{v(t)}f(x(t), u(t), t)=f(x(t), v(t), t)-f(x(t), u(t), t).$$

Будем говорить, что управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума в задаче (1.1)–(1.4), если найдется вектор $\lambda\neq0$, $\lambda_0\geqslant0$ такой, что выполняется условие

(1.5) $\Delta_v H[t, \lambda]\leqslant0$, $\quad v\in U$, $\quad t\in T$.

Как известно, оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума.

Дадим другую интерпретацию неравенству (1.5). Проведем линеаризацию задачи (1.1)–(1.4) по x вдоль процесса $(u(t), x(t))$. Используя переменные $v(t)$ (управление), $y(t)$ (состояние), получаем вспомогательную задачу

(1.6а) $\nabla\varphi_0(x(t_1))'y(t_1)\to\min$,

(1.6б) $\dot{y}=f_x(x(t), u(t), t)y+\Delta_{v(t)}f(x(t), u(t), t)$, $\quad y(t_0)=0$,

(1.6в) $v(t)\in U$, $\quad t\in T$, $\quad \nabla\varphi_i(x(t_1))'y(t_1)=0$, $\quad i=1, 2, \dots, m$.

Класс U допустимых управлений остается без изменения. Отметим, что управление $u(t)$ в задаче (1.6) порождает траекторию $y(t)\equiv0$.

Смысл и значение этой процедуры линеаризации состоят в том, что управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума в задачах (1.1)—(1.4) и (1.6) одновременно. Этот факт проверяется непосредственно: неравенство (1.5) эквивалентно условию максимума функции Гамильтона в задаче (1.6).

Отметим два следствия приведенного утверждения:

1) если управление $u(t)$ оптимально в задаче (1.6), то оно удовлетворяет принципу максимума в задаче (1.1)—(1.4);

2) если управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума в задаче (1.1)—(1.4) с множителем $\lambda_0>0$, то оно оптимально в задаче (1.6).

Задача (1.6) с естественной модификацией для случая нарушения краевых условий (1.4) является вспомогательной задачей предлагаемого метода.

Укажем эквивалентную запись для задачи (1.6). Введем решения $\psi^i(t)$, $i=0, 1, \ldots, m$, сопряженной системы:

$$\dot{\psi}=-f_x(x(t), u(t), t)'\psi, \qquad \psi(t_1)=-\nabla\varphi_i(x(t_1)),$$

и образуем соответствующие функции $H^i=(\psi^i)'f$. Тогда справедливо представление

$$\nabla\varphi_i(x(t_1))'y(t_1)=-\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{v(t)}H^i[t]\,dt$$

и задача (1.6) формулируется в виде

$$\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{v(t)}H^0[t]\,dt\to\max_{v\in U}, \qquad \int_{t_0}^{t_1}\Delta_{v(t)}H^i[t]\,dt=0, \qquad i=1, 2, \ldots, m.$$

В заключение отметим основные подходы к численному решению задачи (1.1)—(1.4):

1) методы последовательной линеаризации (по x, u) с процедурой классического варьирования управления [6];

2) методы штрафных функционалов, или модифицированного функционала Лагранжа с редукцией к последовательности задач без краевых условий [1];

3) дискретизация задачи (1.1)—(1.4) с последующим применением методов математического программирования [7].

Рассматриваемый далее метод примыкает к первой группе, но основан на неклассических процедурах линеаризации и варьирования, свойственных принципу максимума.

§ 2. Семейство множеств варьирования

Пусть $N\in\{1, 2, \ldots\}$ — натуральное число, $\alpha\in(0, t_1-t_0)$ — параметр. Определим семейство подмножеств $T(N, \alpha)$ отрезка T, предназначенных для варьирования управления $u(t)$.

Разобьем промежуток T на N частей T_j с длинами $\Delta_j=\operatorname{mes}T_j$, $j=1, 2, \ldots, N$. Пусть величина $d(N)=\max\{\Delta_j,\ j=1, 2, \ldots, N\}$ — диаметр этого разбиения — удовлетворяет условиям

$$d(N+1)\leqslant d(N), \qquad d(N)\to 0, \quad N\to\infty. \tag{2.1}$$

В этом плане допустимо, например, разбиение отрезка T на N равных частей.

В каждой части T_j выделим промежуток $T_j(\alpha)$ длины $\alpha\Delta_j/(t_1-t_0)$ и образуем объединение $T(N, \alpha)=T_1(\alpha)\cup\ldots\cup T_N(\alpha)$. Согласно построению $T(N, \alpha)\subset T$, $\operatorname{mes} T(N, \alpha)=\alpha$ для любых $N\in\{1, 2, \ldots\}$, $\alpha\in(0, t_1-t_0]$.

Выявим одно полезное свойство системы подмножеств $T(N, \alpha)$ по части аппроксимации интеграла. Предварительно докажем вспомогательное утверждение. Всюду в дальнейшем интегрируемость функций понимается в смысле Римана.

Лемма. *Пусть $w(t)$, $t\in T$,— интегрируемая функция, $m_j=\inf\{w(t), t\in T_j\}$, $M_j=\sup\{w(t), t\in T_j\}$, $j=1, 2, \ldots, N$. Тогда для любых чисел $\gamma>0$, $\delta>0$ найдется такое натуральное $N(\gamma, \delta)$, что для всех $N\geqslant N(\gamma, \delta)$*

$$\sum_{j\in J_{N\gamma}}\Delta_j<\delta, \qquad J_{N\gamma}=\{j\in(1,2,\ldots,N): M_j-m_j>\gamma\}.$$

Доказательство. Поскольку $w(t)$ — интегрируемая функция, то с учетом свойства (2.1) разбиения $\{T_j, j=1, 2, \ldots, N\}$ для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что

$$\sum_{j=1}^{N}(M_j-m_j)\Delta_j<\varepsilon, \qquad N\geqslant N(\varepsilon).$$

Полагая $\varepsilon=\gamma\delta$, $N(\varepsilon)=N(\gamma, \delta)$, получаем

$$\gamma\delta>\sum_{j\in J_{N\gamma}}(M_j-m_j)\Delta_j>\gamma\sum_{j\in J_{N\gamma}}\Delta_j, \qquad N\geqslant N(\gamma,\delta).$$

Лемма доказана.

Сформулируем основное утверждение этого параграфа.

Теорема. *Пусть $w(t)$, $t\in T$,— интегрируемая функция. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что для всех $N\geqslant N(\varepsilon)$, $\alpha\in(0, t_1-t_0]$ выполняется неравенство*

$$\left|\frac{1}{t_1-t_0}\int_T w(t)\,dt-\frac{1}{\alpha}\int_{T(N,\alpha)} w(t)\,dt\right|\leqslant\varepsilon.$$

Доказательство. Вследствие интегрируемости функция $w(t)$ ограничена на T: $|w(t)|\leqslant M$, $t\in T$, $M<\infty$. В качестве $N(\varepsilon)$ возьмем число $N(\gamma, \delta)$, фигурирующее в лемме, положив $\gamma=\varepsilon/4$, $\delta=\varepsilon(t_1-t_0)/4M$. Обозначим

$$l_j=\left|\frac{1}{t_1-t_0}\int_{T_j} w(t)\,dt-\frac{1}{\alpha}\int_{T_j(\alpha)} w(t)\,dt\right|, \qquad j=1,2,\ldots,N.$$

Пусть $N\geqslant N(\varepsilon)$, $j\in J_{N\gamma}$. Поскольку

$$l_j\leqslant\frac{1}{t_1-t_0}\int_{T_j}|w(t)|\,dt+\frac{1}{\alpha}\int_{T_j(\alpha)}|w(t)|\,dt\leqslant\frac{2M\Delta_j}{t_1-t_0}$$

то с учетом леммы имеем

$$\sum_{j\in J_{N\gamma}} l_j<\frac{2M\delta}{t_1-t_0}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для $j\in(1, 2, \ldots, N)\setminus J_{N\gamma}$, используя представление

$$l_j=\left|\frac{1}{t_1-t_0}\int_{T_j}(w(t)-m_j)\,dt-\frac{1}{\alpha}\int_{T_j(\alpha)}(w(t)-m_j)\,dt\right|,$$

приходим к оценке

$$l_j \leqslant \frac{2\gamma\Delta_j}{t_1-t_0} = \frac{\varepsilon\Delta_j}{2(t_1-t_0)}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j\notin J_{N\gamma}} l_j \leqslant \frac{\varepsilon}{2(t_1-t_0)} \sum_{j\notin J_{N\gamma}} \Delta_j \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

В совокупности получаем

$$\left| \frac{1}{t_1-t_0} \int_T w(t)\,dt - \frac{1}{\alpha} \int_{T(N,\alpha)} w(t)\,dt \right| \leqslant \sum_{j=1}^{N} l_j \leqslant \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Важно отметить, что утверждение теоремы обобщается и на случай конечного числа функций.

Следствие 1. Пусть $w_i(t)$, $i=1, 2, \dots, s$, — интегрируемые на T функции. Тогда для любого набора $\varepsilon>0$, $\varepsilon=(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$, найдется натуральное $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $N\geqslant N(\varepsilon)$, $\alpha\in(0, t_1-t_0]$ выполняются неравенства

$$(2.2)\qquad \left| \frac{1}{t_1-t_0} \int_T w_i(t)\,dt - \frac{1}{\alpha} \int_{T(N,\alpha)} w_i(t)\,dt \right| \leqslant \varepsilon_i, \qquad i=1,2,\dots,s.$$

В дальнейшем этот результат будет использован для обоснования метода в следующей формулировке.

Следствие 2. Пусть $w_i(t)$, $i=1, 2, \dots, s$, — интегрируемые на T функции. Тогда для любого числа $\alpha\in(0, t_1-t_0]$ и набора $\varepsilon>0$, $\varepsilon=(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$, найдется такое $N(\alpha, \varepsilon)$, что для всех $N\geqslant N(\alpha, \varepsilon)$ выполняются неравенства (2.2).

§ 3. Теоретическая схема метода

Проведем формальное изложение метода. Пусть $u(t)$, $t\in T$, — допустимое управление в задаче (1.1) — (1.4), $x(t)$ — соответствующее решение системы (1.2). Образуем линейную вспомогательную задачу

$$(3.1а)\qquad \nabla\varphi_0(x(t_1))'y(t_1)\to\min,$$

$$(3.1б)\qquad \dot y=f_x(x(t), u(t), t)y+\Delta_{v(t)}f(x(t), u(t), t), \qquad y(t_0)=0,$$

$$(3.1в)\qquad v\in U, \qquad \varphi_i(x(t_1))+\nabla\varphi_i(x(t_1))'y(t_1)=0, \qquad i=1, 2, \dots, m.$$

В эквивалентной формулировке задача имеет вид

$$(3.2)\qquad \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)}H^0[t]\,dt \to \max_{v\in U}, \qquad \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)}H^i[t]\,dt=\Phi_i(u), \qquad i=1,2,\dots,m.$$

Пусть $R=\{y\colon y=y(t_1, v),\ v\in U\}$ — множество достижимости управляемой системы из (3.1), $Y=\{y\colon \nabla\varphi_i(x(t_1))'y+\varphi_i(x(t_1))=0,\ i=1, 2, \dots, m\}$ — линейное многообразие фазовых ограничений. Представим задачу (3.1) в сокращенной записи:

$$(3.3)\qquad \nabla\varphi_0(x(t_1))'y\to\min, \qquad y\in R\cap Y.$$

Предположим, что R — замкнутое множество, и примем условие регулярности ограничений: $\operatorname{rel\,int} R\cap Y\neq\varnothing$. С учетом линейности (по y) управляемой системы и предположения замкнутости заключаем, что R — выпуклый компакт [4]. Введем двойственную задачу

$$\max_{\lambda} g(\lambda), \tag{3.4a}$$

$$g(\lambda)=\min_{y\in R}\Big[\nabla\varphi_0(x(t_1))+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla\varphi_i(x(t_1))\Big]'y+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x(t_1)). \tag{3.4б}$$

В наших предположениях задачи (3.3), (3.4) имеют решения, причем выполнено соотношение двойственности [8]

$$\min\{\nabla\varphi_0(x(t_1))'y\,|\,y\in R\cap Y\}=\max_{\lambda} g(\lambda). \tag{3.5}$$

Пусть $\bar{u}\in U$ — оптимальное управление в задаче (3.1), $\bar{\lambda}$ — решение двойственной задачи (3.4). В силу соотношения (3.5), управление $\bar{u}(t)$ является решением простейшей задачи

$$\min\Big\{\Big[\nabla\varphi_0(x(t_1))+\sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}_i\nabla\varphi_i(x(t_1))\Big]'y\,|\,y\in R\Big\},$$

т. е. удовлетворяет в ней принципу максимума, который в данном случае означает выполнение неравенства

$$H(\psi(t),x(t),\bar{u}(t),t)\geqslant H(\psi(t),x(t),v(t),t),\qquad v(t)\in U,\quad t\in T, \tag{3.6}$$

с функцией $H=\psi'f$ и сопряженной задачей вида

$$\dot{\psi}=-f_x(x(t),u(t),t)'\psi,\qquad \psi(t_1)=-\nabla\varphi_0(x(t_1))-\sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}_i\nabla\varphi_i(x(t_1)).$$

Обозначим

$$w_0(t)=\Delta_{\bar{u}(t)}H[t],\qquad w_i(t)=\Delta_{\bar{u}(t)}H^i[t],\qquad i=1,2,\ldots,m,$$

и введем величину

$$\mu(u)=\int_{t_0}^{t_1}w_0(t)\,dt.$$

Согласно неравенству (3.6), $\mu(u)\geqslant 0$, и в случае выполнения ограничений ($\Phi_i(u)=0$, $i=1,2,\ldots,m$) равенство $\mu(u)=0$ означает, что управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума в задаче (1.1)–(1.4). Отметим, что на основании задачи (3.2)

$$\int_{t_0}^{t_1}w_i(t)\,dt=\Phi_i(u),\qquad i=1,2,\ldots,m.$$

Проведем варьирование управления $u(t)$ на основе семейства множеств $T(N,\alpha)$. Для каждого значения $\alpha\in(0,\,t_1-t_0]$ и фиксированного набора параметров $\varepsilon_i>0$, $i=1,2,\ldots,m$, определим число $N(\alpha)$ (зависимость от ε явно не указываем) из условия выполнения неравенств

$$\frac{1}{t_1-t_0}\int_T w_0(t)\,dt-\frac{1}{\alpha}\int_{T(N(\alpha),\alpha)}w_0(t)\,dt\leqslant\varepsilon_0, \tag{3.7}$$

$$\left|\frac{1}{t_1-t_0}\int_T w_i(t)\,dt-\frac{1}{\alpha}\int_{T(N(\alpha),\alpha)}w_i(t)\,dt\right|\leqslant\varepsilon_i,\qquad i=1,2,\ldots,m. \tag{3.8}$$

Существование и конечность $N(\alpha)$ для любого $\alpha\in(0, t_1-t_0]$ обеспечивается утверждением следствия 2.

Введем семейство множеств $T(\alpha)=T(N(\alpha), \alpha)$ и проведем варьирование по правилу

$$(3.9)\qquad u(t,\alpha)=\begin{cases}\bar{u}(t), & t\in T(\alpha),\\ u(t), & t\in T\setminus T(\alpha).\end{cases}$$

Для обоснованного назначения параметров ε_i и выбора шага α рассмотрим приращения некоторых функционалов, связанных с задачей (1.1)–(1.4). Образуем функционал Лагранжа

$$L(u)=\Phi_0(u)+\sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}_i\Phi_i(u)$$

с множителями $\bar{\lambda}_i$, полученными из решения двойственной задачи (3.4). Согласно известной формуле для приращения функционалов [1]–[3], с учетом неравенства (3.7) получаем оценку

$$(3.10)\qquad L(u(\alpha))-L(u)=-\int_{T(\alpha)}w_0(t)\,dt+\eta(\alpha)\leqslant\alpha\left(\varepsilon_0-\frac{\mu(u)}{t_1-t_0}\right)+\eta(\alpha)$$

с остаточным членом $\eta(\alpha)$ порядка $o(\alpha)$.

Рассмотрим приращения функционалов $\Phi_i(u)$, $i=1, 2,\dots,m$:

$$\Phi_i(u(\alpha))-\Phi_i(u)=-\int_{T(\alpha)}w_i(t)\,dt+\eta_i(\alpha),\qquad \eta_i(\alpha)\sim o(\alpha).$$

Представим это равенство в виде

$$\Phi_i(u(\alpha))=\left(1-\frac{\alpha}{t_1-t_0}\right)\Phi_i(u)+\frac{\alpha}{t_1-t_0}\Phi_i(u)-\int_{T(\alpha)}w_i(t)\,dt+\eta_i(\alpha).$$

Переходя к модулю и используя неравенства (3.8), получаем

$$|\Phi_i(u(\alpha))|\leqslant\left(1-\frac{\alpha}{t_1-t_0}\right)|\Phi_i(u)|+\alpha\varepsilon_i+|\eta_i(\alpha)|.$$

Отсюда

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\Phi_i(u(\alpha))|\leqslant\left(1-\frac{\alpha}{t_1-t_0}\right)\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\Phi_i(u)|+\alpha\bar{\varepsilon}+\bar{\eta}(\alpha),$$

где

$$\bar{\varepsilon}=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\varepsilon_i,\qquad \bar{\eta}(\alpha)=\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\eta_i(\alpha)|.$$

В результате приходим к оценке для приращения функционала $\Phi(u)=\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\Phi_i(u)|$ — невязки выполнения краевых условий

$$(3.11)\qquad \Phi(u(\alpha))-\Phi(u)\leqslant\alpha\left(\bar{\varepsilon}-\frac{\Phi(u)}{t_1-t_0}\right)+\bar{\eta}(\alpha).$$

Из представлений (3.10), (3.11) следуют рекомендации для выбора управляющих параметров метода. Рассмотрим тот основной случай, когда $\mu(u)>0$, $\Phi(u)>0$. В целях уменьшения функционалов $L(u)$, $\Phi(u)$ необходимо взять

$$\varepsilon_0\in\left(0, \frac{\mu(u)}{t_1-t_0}\right),\qquad \bar{\varepsilon}\in\left(0, \frac{\Phi(u)}{t_1-t_0}\right).$$

В этих условиях параметр $\alpha \in (0, t_1 - t_0]$ может подбираться исходя из требований релаксации для пары функционалов $L(u(\alpha)) < L(u)$, $\Phi(u(\alpha)) < \Phi(u)$. Неравенства (3.10), (3.11) гарантируют возможность такого выбора.

Если $\mu(u) = 0$, $\Phi(u) > 0$, то неравенство (3.7) выполняется тривиально ($\varepsilon_0 \geqslant 0$) и шаг α выбирается из условия уменьшения функционала $\Phi(u)$. В случае $\mu(u) > 0$, $\Phi(u) = 0$ неравенства (3.8) не учитываются при построении множества $T(\alpha)$ и процедура ориентируется на убывание целевого функционала $\Phi_0(u)$.

Замечание. Необходимость использовать в методе функционал Лагранжа $L(u)$ (вместо $\Phi_0(u)$) вызвана тем, что значение вспомогательной задачи (3.1)

$$\nabla\varphi_0(x(t_1))'\bar{y}(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)} H^0[t]\,dt,$$

вообще говоря, знакопеременно, поэтому в случае, когда $\nabla\varphi_0(x(t_1))'\bar{y}(t_1) > 0$, нельзя гарантировать убывание целевого функционала $\Phi_0(u)$ на множестве управлений вида (3.9). Для функционала $L(u)$, согласно (3.6), выполняется условие неотрицательности $\mu(u) \geqslant 0$, что в случае $\mu(u) > 0$ дает возможность провести процедуру уменьшения.

§ 4. Вопросы реализации метода

Обсудим возможности и варианты алгоритмизации основных операций метода.

1. Вспомогательная задача. В результате решения линейной задачи (3.1) для дальнейшей реализации метода необходимо иметь оптимальное управление $\bar{u}(t)$, $t \in T$, и соответствующие множители Лагранжа $\bar{\lambda}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. В этой связи решение задачи (3.1) целесообразно проводить с помощью методов двойственного типа. Один такой метод построен в [9] и представляет собой процедуру наискорейшего подъема для двойственной задачи (3.4). Поиск направления подъема функции $g(\lambda)$ осуществляется через решение специальной задачи минимизации невязки (суммы квадратов) выполнения ограничений $\varphi_i(x(t_1)) + \nabla\varphi_i(x(t_1))'y(t_1) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. В случае линейной зависимости правых частей $f(x, u, t)$ от u эту задачу предлагается решать на множестве нулей (с некоторой точностью $\tilde{\varepsilon} > 0$) функций переключения управления. Для этого случая разработан алгоритм двойственного метода, который и был использован для решения вспомогательной задачи (3.1).

Если окажется, что задача (3.1) не имеет решения ($R \cap Y = \varnothing$, функция $g(\lambda)$ не ограничена сверху), то необходимо уменьшить погрешность выполнения краевых условий (1.4), т. е. улучшить управление $u(t)$, например, по функционалу штрафа

$$F(u) = \sum_{i=1}^{m} \Phi_i^2(u), \qquad u \in U,$$

относительно системы (1.2). Если краевые условия выполнены ($F(u) = 0$), то задача (3.1) имеет решение.

2. Процедура варьирования. Основной вопрос реализации метода связан с построением множеств варьирования $T(\alpha)$, $\alpha \in (0, t_1 - t_0]$. Здесь возможны различные варианты алгоритмизации. Отметим, что тео-

ретические рекомендации на этот счет носят слишком общий и жесткий характер. Опишем реализацию этой части метода, используя в определенной мере информацию о поведении функций $w_i(t)$, $i=1, 2, \dots, m$, фигурирующих в неравенствах (3.7), (3.8).

Прежде всего имеет смысл ослабить модульные неравенства (3.8) на выбор числа $N(\alpha)$, учитывая конкретный характер нарушения ограничений (1.4). Пусть $\delta_i>0$, $i=1, 2, \dots, m$, — требуемая точность выполнения i-го ограничения: $|\Phi_i(u)|\leqslant\delta_i$. Проведем разделение индексов нарушенных ограничений по знаку соответствующих функционалов на управлении $u(t)$:

$$I_+=\{i\in(1, 2, \dots, m) : \Phi_i(u)>\delta_i\}, \qquad I_-=\{i\in(1, 2, \dots, m) : \Phi_i(u)<-\delta_i\}.$$

Заменим неравенства (3.8) их следствиями:

$$\text{(4.1а)} \qquad \frac{1}{\alpha}\int\limits_{T(\alpha)} w_i(t)\,dt\geqslant\frac{\Phi_i(u)}{t_1-t_0}-\varepsilon_i, \qquad i\in I_+,$$

$$\text{(4.1б)} \qquad \frac{1}{\alpha}\int\limits_{T(\alpha)} w_i(t)\,dt\leqslant\frac{\Phi_i(u)}{t_1-t_0}+\varepsilon_i, \qquad i\in I_-.$$

Тогда для приращений функционалов $\Phi_i(u)$ справедливы оценки

$$\Phi_i(u(\alpha))-\Phi_i(u)\leqslant\alpha\left(\varepsilon_i-\frac{\Phi_i(u)}{t_1-t_0}\right)+\eta_i(\alpha), \qquad i\in I_+,$$

$$\Phi_i(u(\alpha))-\Phi_i(u)\geqslant\alpha\left(-\varepsilon_i+\frac{|\Phi_i(u)|}{t_1-t_0}\right)+\eta_i(\alpha), \qquad i\in I_-.$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon_i\in(0, |\Phi_i(u)|/(t_1-t_0))$, $i\in I_+\cup I_-$ для достаточно малых $\alpha\in(0, t_1-t_0]$ управление $u(t, \alpha)$ обеспечивает уменьшение $|\Phi_i(u)|$:

$$\Phi_i(u(\alpha))<\Phi_i(u), \quad i\in I_+, \qquad \Phi_i(u(\alpha))>\Phi_i(u), \quad i\in I_-.$$

Неравенства (4.1) выделяют области наиболее предпочтительных значений $t\in T$ для построения множества варьирования $T(\alpha)$. Для каждого функционала $\Phi_i(u)$, $i\in I_+$ (или $i\in I_-$), это точки $t\in T$, соответствующие наибольшим (наименьшим) значениям подынтегральной функции $w_i(t)$ на T. Аналогичный смысл имеет неравенство (3.7) для функционала Лагранжа.

Перейдем к построению множества $T(\alpha)$. Принимая во внимание дискретный характер реализации, возьмем за основу следующую структуру варьирования. Пусть α_0 (шаг варьирования) — наименьшая длина промежутка времени, на котором может производиться варьирование управления $u(t)$. Параметр α_0 определяется естественными условиями: $h\leqslant\alpha_0\leqslant t_1-t_0$, $(t_1-t_0)/\alpha_0=p$, p — целое число, $h>0$ — шаг численного интегрирования систем. По данному α_0 выделим на T набор узлов варьирования $\tau_j=t_0+(2j-1)\alpha_0/2$, $j=1, 2, \dots, p$. С каждой точкой τ_j свяжем элементарный отрезок варьирования $T_j=[\tau_j-\alpha_0/2, \tau_j+\alpha_0/2]$ длины α_0. Учитывая взаимно однозначное соответствие $j\Leftrightarrow\tau_j$, будем оперировать индексами узлов варьирования. Проведем серию распределений элементов набора $\{1, 2, \dots, p\}$ в зависимости от свойств возрастания (убывания) функций $w_i(t)$, $i\in\{0\}\cup I_+\cup I_-$.

Пусть $i\in\{0\}\cup I_+$. Упорядочим номера $1, 2, \dots, p$ по убыванию функции $w_i(t)$, т. е. построим перестановку $\{j_1^{(i)}, \dots, j_p^{(i)}\}$ согласно правилу

$$w_i[j_s^{(i)}]\geqslant w_i[j_{s+1}^{(i)}], \qquad s=1, 2, \dots, p-1.$$

Для индексов $i \in I_-$ образуем аналогичное распределение по возрастанию функций $w_i(t)$:

$$\{j_1^{(i)}, \ldots, j_p^{(i)}\}: w_i[j_s^{(i)}] \leqslant w_i[j_{s+1}^{(i)}].$$

Проведем, далее, перестановку индексов $i \in I_+ \cup I_-$ в соответствии с убыванием $|\Phi_i(u)|$:

$$\{i_1, \ldots, i_k\}: |\Phi_{i_1}(u)| \geqslant \ldots \geqslant |\Phi_{i_k}(u)|.$$

Распределим теперь индексы всех перестановок согласно следующей системе предпочтения:

$$(4.2) \qquad \{j_1^{(0)}, j_1^{(i_1)}, \ldots, j_1^{(i_k)}, \ldots, j_p^{(0)}, j_p^{(i_1)}, \ldots, j_p^{(i_k)}\}.$$

Отбрасывая здесь последовательным перебором ранее встречавшиеся (повторяющиеся) индексы, после перенумерации получаем результирующий набор $\{j_1, \ldots, j_p\}$, «упорядоченный» по совокупности функций $w_i(t)$ и значений $\Phi_i(u)$, $i \in \{0\} \cup I_+ \cup I_-$.

В силу заданной структуры варьирования параметр $\alpha = \operatorname{mes} T(\alpha)$ может принимать только значения, кратные $\alpha_0: \alpha_0, 2\alpha_0, \ldots, p\alpha_0$. Для $\alpha = N\alpha_0$; $N = 1, 2, \ldots, p$, пакет варьирования составим из N узлов набора $\{\tau_j\}$ с индексами $j_1, \ldots, j_N$. Таким образом, в рамках введенной шкалы предпочтения $\{j_1, \ldots, j_p\}$ для $\alpha = N\alpha_0$ множество варьирования имеет вид $T(\alpha) = T_{j_1} \cup \ldots \cup T_{j_N}$.

По части обоснования такого варианта построения $T(\alpha)$ заметим, что процедура перестановки индексов и результирующий набор $\{j_1, \ldots, j_p\}$ в определенной мере учитывают требования на совокупность функций $w_i(t)$, заложенные в неравенствах (3.7), (4.1). Первая серия индексов $\{j_1^{(0)}, j_1^{(i_1)}, \ldots, j_1^{(i_k)}\}$ из (4.2) содержит наиболее предпочтительные в этом плане узлы варьирования по отношению к функциям $w_i(t)$, причем индексы ограничений ($i \in I_+ \cup I_-$) упорядочены по убыванию модулей соответствующих функционалов. Вторая серия индексов из (4.2) обладает аналогичным свойством после первой, и т. д. Целесообразно, исходя опять-таки из неравенств (3.7), (4.1), включать в число первых номеров набора $\{j_1, \ldots, j_p\}$ индексы j_s узлов варьирования, для которых все функции $w_i(t)$, $i \in \{0\} \cup I_+ \cup I_-$, принимают значения «нужного» знака: $w_i[j_s] > 0$, $i \in \{0\} \cup I_+$, $w_i[j_s] < 0$, $i \in I_-$. Самые нежелательные индексы характеризуются обратными неравенствами, и соответствующие узлы необходимо исключать из пакетов варьирования.

Резюмируя изложенное, отметим, что поскольку для выбранного $\alpha = N\alpha_0$ число N промежутков варьирования фиксировано и это — максимально возможное число для данного α_0, то процедура поиска $N(\alpha)$ с целью выполнения неравенств (3.7), (4.1) становится излишней. Иными словами, полагаем $N(\alpha) = \alpha/\alpha_0$, а возможное нарушение некоторых неравенств из (3.7), (4.1) указывает лишь на дефекты шкалы $\{j_1, \ldots, j_p\}$.

Заметим также, что функции $w_i(t)$, соответствующие выполненным ограничениям ($|\Phi_i(u)| \leqslant \delta_i$), не учитываются при построении набора $\{j_1, \ldots, j_p\}$ (хотя и фигурируют во вспомогательной задаче (3.1)), поскольку в условиях многих ограничений требовать сохранения части из них практически нецелесообразно. В этой связи отметим возможность соответствующей коррекции вспомогательной задачи: в нее включаются только ограничения с индексами $i \in I_+ \cup I_-$. Следуя схеме метода линеаризации из [10], в задаче (3.1) можно оставить только наиболее нарушенные ограничения с индексами $i \in (1, 2, \ldots, m)$: $|\Phi_i(u)| \geqslant \Phi(u) - \varepsilon$, где $\varepsilon \in [0, \Phi(u)]$. Такие модификации упрощают решение вспомогательной задачи (снижается размерность двойственной задачи), однако могут затруднить реализацию третьего этапа метода — поиск параметра α.

3. Выбор параметра варьирования. Рассмотрим вопрос о подборе параметра α. В наших условиях он может принимать значения $\alpha_0, 2\alpha_0, \ldots, p\alpha_0$. Теоретические рекомендации на выбор α связаны с уменьшением пары функционалов $L(u)$, $\Phi(u)$. Такое требование выглядит излишне жестким, особенно в связи с ослаблением ряда условий при конкретном построении множества $T(\alpha)$. Поэтому введем модифицированный функционал Лагранжа $M(u) = L(u) + \Phi(u)$ и назначим его критерием качества управлений семейства $u(t, \alpha)$. Тогда выбор шага $\alpha = N\alpha_0$ осуществляется перебором по $N = 1, 2, \ldots, p$ с ориентацией на решение задачи

$$\min_{\alpha} M(u(\alpha)).$$

Возможность уменьшения функционала $M(u)$ вытекает из теории и заложена в процедуре построения множеств $T(\alpha)$.

Критерий окончания счета определяется неравенствами $|\Phi_i(u)| \leqslant \delta$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\mu(u) \leqslant \delta_0$, где δ_0 — заданная точность выполнения принципа максимума.

В заключение отметим, что в данном параграфе (особенно в п.2) приведен один из вариантов реализации метода, который, по-видимому, не является окончательным в рамках исходной схемы. Подчеркнем, однако, что представленная версия в определенной мере соответствует теории метода и опирается на результаты численного эксперимента.

§ 5. Результаты расчетов

Для проверки эффективности некоторых вариантов реализации метода были разработаны алгоритмы, составлены программы (язык PL/1) и проведены расчеты (ЭВМ ЕС) на уровне ряда задач типа (1.1)—(1.4), известных по литературе.

Выбирались линейные по управлению системы, так как применяемый алгоритм двойственного метода решения вспомогательной задачи (3.1) был ориентирован именно на этот случай. Вообще говоря, по каждой задаче была проведена серия расчетов с различными начальными управлениями, различными способами формирования множеств $T(\alpha)$ и выбора функционала — свертки (типа $M(u)$) для отыскания шага α.

К примеру, был апробирован «чистый» вариант построения $T(\alpha)$ согласно определению. Отрезок T делится на N равных частей точками θ_i, $i = 2, 3, \ldots, N$, и в качестве $T_j(\alpha)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, выбираются промежутки $T_j(\alpha) = [\theta_j, \theta_j + \alpha/N]$, $\theta_1 = t_0$. При этом поиск числа $N(\alpha)$ производится перебором некоторой возрастающей последовательности до выполнения неравенств (3.7), (4.1). Слабость такой реализации состоит в ее универсальности: не используется информация о поведении функций $w_i(t)$, входящих в неравенства. Далее при поиске шага α в качестве свертки вместо $M(u)$ применялся функционал Лагранжа $L(u)$ и его гладкая модификация $L(u) + F(u)$. В конечном итоге по результатам расчетов описанный в § 4 вариант реализации оказался предпочтительнее.

Начальные управления выбирались постоянными: $u^0 = \mathrm{const}$. Система (1.2) интегрировалась методом Рунге — Кутта 4-го порядка.

Работа алгоритма иллюстрируется таблицами, в которых для каждого шага $k=0, 1, \ldots$ приводятся значения функционалов Φ_0, Φ, M и следующие величины: μ_0 — значение вспомогательной задачи (3.1); $\mu=\mu(u)\times\times(t_1-t_0)^{-1}$ — невязка выполнения принципа максимума; p_0 — число узлов варьирования, в которых основное управление $u(t)$ совпадает со вспомогательными $\bar{u}(t)$; p_1 — число узлов фактического варьирования.

Таблица 1

k	Φ_0	Φ	M	μ_0	μ	p_0/p	p_1/p
0	3,141	$9.376\cdot10^{-1}$	1.787	-2.084	$4.591\cdot10^{-1}$	0/78	78/78
1	$6.65\cdot10^{-1}$	$3.492\cdot10^{-1}$	1.393	$3.168\cdot10^{-1}$	$5.175\cdot10^{-3}$	66/78	12/78
2	$9.81\cdot10^{-1}$	$2.814\cdot10^{-2}$	1.0306	1.764	$1.664\cdot10^{-4}$	74/78	2/78
3	1.002	$5.807\cdot10^{-3}$	1.0077	$-1.081\cdot10^{-3}$	$9.343\cdot10^{-5}$	73/78	1/78
4	1.0007	$5.378\cdot10^{-3}$	1.0073	$2.609\cdot10^{-3}$	$1.328\cdot10^{-4}$	—	—

Таблица 2

k	Φ_0	Φ	M	μ_0	μ	p_0/p	p_1/p
0	0	3.0	—	—	—	—	—
1	$6.879\cdot10^{-1}$	$2.096\cdot10^{-1}$	1.065	$8.618\cdot10^{-2}$	$2.268\cdot10^{-2}$	33/52	19/52
2	$7.537\cdot10^{-1}$	$9.019\cdot10^{-2}$	$9.089\cdot10^{-1}$	$-1.491\cdot10^{-2}$	$1.737\cdot10^{-2}$	46/52	6/52
3	$7.388\cdot10^{-1}$	$4.145\cdot10^{-2}$	$8.062\cdot10^{-1}$	$2.17\cdot10^{-2}$	$8.905\cdot10^{-5}$	48/52	4/52
4	$7.605\cdot10^{-1}$	$1.770\cdot10^{-3}$	$7.639\cdot10^{-1}$	$-4.84\cdot10^{-4}$	$4.563\cdot10^{-6}$	—	—

Результаты счета представлены следующими данными: k_1 — число итераций метода; k_2 — число задач Коши для системы (1.2); μ^* — значение величины μ на выходе; Φ_i^*, $i=0, 1, \ldots, m$, — значения функционалов задачи (1.1)—(1.4) на выходе.

Задача 1. $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=-\sin x_1+u$, $\dot{x}_3=u$, $x_1(0)=1$, $x_2(0)=x_3(0)=0$, $T=[0, 2\pi]$, $U=[0, 1]$, $\Phi_0=x_3$, $\Phi_i=x_i$, $i=1, 2$.

Это нелинейный вариант задачи об успокоении маятника [11]. Начальное приближение $u^0=0.5$. Значения параметров: $h=\alpha_0=8.05\cdot10^{-2}$, $\delta==5.4\cdot10^{-3}$, $\delta_0=10^{-3}$, $p=78$. Ход итераций отражен в табл. 1.

Результаты счета: $k_1=4$, $k_2=24$, $\mu^*=1.328\cdot10^{-4}$, $\Phi_0^*=1.0007$, $\Phi_1^*==-9.55\cdot10^{-5}$, $\Phi_2^*=5.378\cdot10^{-3}$.

Задача 2. $\dot{x}_1=\cos x_3$, $\dot{x}_2=\sin x_3$, $\dot{x}_3=u$, $x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=0$, $T==[0, 5.1228]$, $U=[0, 0.5]$, $\Phi_0=x_3$, $\Phi_1=x_1-4$, $\Phi_2=x_2-3$.

Это — модификация задачи быстродействия, рассмотренной в [7, с. 342]. Начальное управление $u^0=0$. Значения параметров: $h=\alpha_0==9{,}85\cdot10^{-2}$, $\delta=2\cdot10^{-3}$, $\delta_0=10^{-5}$, $p=52$. Работу алгоритма иллюстрирует табл. 2. Отметим, что на первой итерации вспомогательная задача оказалась неразрешимой.

Результаты счета: $k_1=4$, $k_2=15$, $\mu^*=4.563\cdot10^{-6}$, $\Phi_0^*=7.605\cdot10^{-1}$, $\Phi_1^*==1.704\cdot10^{-3}$, $\Phi_2^*=1.770\cdot10^{-3}$.

Задача 3. $\dot{x}_1=x_2+u$, $\dot{x}_2=-u$, $\dot{x}_3=x_1^2/2$, $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=x_3(0)=0$, $T=[0, 1.5]$, $U=[-1, 1]$, $\Phi_0=x_3$, $\Phi_1=x_1$, $\Phi_2=x_2$.

Эта задача решалась методом штрафных функций в [12]. Начальное управление $u^0=1$. Значения параметров: $h=\alpha_0=0.2$, $\delta=10^{-5}$, $\delta_0=10^{-5}$, $p=75$. Ход итераций отражен в табл. 3.

Результаты счета: $k_1=2$, $k_2=27$, $\mu^*=7.364\cdot10^{-4}$, $\Phi_0^*=5.997\cdot10^{-1}$, $\Phi_1^*==8.222\cdot10^{-6}$, $\Phi_2^*=4.776\cdot10^{-6}$.

Таблица 3

k	Φ_0	Φ	M	μ_0	μ	p_0/p	p_1/p
0	1.176	1.5	1.917	$-8.796\cdot10^{-1}$	$8.03\cdot10^{-3}$	40/75	40/75
1	$6.219\cdot10^{-1}$	$8.291\cdot10^{-6}$	$6.219\cdot10^{-1}$	$-3.314\cdot10^{-2}$	$2.209\cdot10^{-2}$	33/75	33/75
2	$5.997\cdot10^{-1}$	$8.222\cdot10^{-6}$	$5,997\cdot10^{-1}$	$1.091\cdot10^{-3}$	$7.364\cdot10^{-4}$	–	–

В качестве закономерностей итерационного процесса в рассмотренных задачах отметим монотонное убывание функционалов Φ, M, знакопеременность величины μ_0 с соответствующими колебаниями значений целевого функционала Φ_0, согласованное изменение чисел p_0, p_1 («сближение» основного и вспомогательного управлений). Что касается полученных управлений, то они соответствуют известным решениям и могут принимать как внутренние, так и граничные значения относительно допустимого множества U.

Литература

1. *Любушин А. А., Черноусько Ф. Л.* Метод последовательных приближений для расчета оптимального управления (обзор). – Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1983, № 2, с. 147–159.
2. *Mayne D. Q., Polak E.* First order strong variation algorithms for optimal control. – J. Optimizat. Theory and Appl., 1975, v. 16, № 3–4, p. 277–301.
3. *Васильев О. В., Тятюшкин А. И.* Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, т. 21, № 6, с. 1376–1384.
4. *Halkin H.* Mathematical foundations of system optimization. – In: Topics in Optimizat. N. Y.: Acad. Press, 1967, p. 197–262.
5. *Bryant G. F., Mayne D. Q.* The maximum principle. – Internat. J. Control, 1974, v. 20, № 6, p. 1021–1054.
6. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
7. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
8. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
9. *Срочко В. А.* Двойственный метод численного решения задач оптимального управления в линейных системах.– Изв. вузов. Математика, 1984, № 6, с. 78–81.
10. *Пшеничный Б. Н.* Метод линеаризации. М.: Наука, 1983.
11. *Габасов Р.* Вопросы конструктивной теории оптимального управления. – Вестн. Белорусск. гос. ун-та, 1981, сер. 1, № 3, с. 56–61.
12. *Kumar V.* A control averaging technique for solving a class of singular optimal control problems.– Internat. J. Control, 1976, v. 23, № 3, p. 361–380.

Поступила в редакцию 22.X.1984