С. И. Дудов, М. А. Осипцев, Формула супердифференциала функции расстояния, заданной калибром, до дополнения выпуклого множества, *Матем. заметки*, 2019, том 106, выпуск 5, 660–668

https://www.mathnet.ru/mzm12141

Математические заметки

Том 106 выпуск 5 ноябрь 2019

УДК 519.853

Формула супердифференциала функции расстояния, заданной калибром, до дополнения выпуклого множества

С. И. Дудов, М. А. Осипцев

Рассматривается функция расстояния, заданная калибром (калибровочной функцией Минковского) до дополнения выпуклого телесного множества в конечномерном пространстве. Установлена вогнутость этой функции на данном выпуклом множестве и формула ее супердифференциала в любой внутренней точке множества. В граничных точках этого выпуклого множества установлена ее дифференцируемость по направлениям, получена соответствующая формула производной по направлениям.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: функция расстояния, калибр множества, супердифференциал, конус возможных направлений, опорная функция.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12141

1. Введение. В приложениях нередко возникают задачи наилучшего приближения в пространствах, где роль нормы играет калибр (калибровочная функция Минковского) некоторого множества или “несимметричная” норма. Далее мы будем иметь ввиду конечномерные пространства. Напомним определение калибра (см., например, [1], [2]).

Определение 1. Пусть M – компактное выпуклое множество из $\mathbb{R}^p$ с непустой внутренностью и $0_p \in \operatorname{int} M$. Функция, определенная как

$$k(x) = \inf_{\alpha \geqslant 0} \{\alpha : x \in \alpha M\}, \tag{1.1}$$

называется *калибром* (*калибровочной функцией Минковского*) множества M.

В качестве простого, но важного примера, отметим, что калибр единичного шара любой нормы совпадает с этой нормой.

Пространства с “несимметричной” нормой и некоторые задачи наилучшего приближения изучались, например, в работах [3]–[9]. Стали также изучаться пространства с “несимметричной” полунормой, которая задается калибром неограниченного выпуклого множества [10], [11].

Важную роль при постановке и исследовании задач по приближению и оценкам сложных множеств множествами простой структуры играет функция

$$\rho(x, \Omega) = \min_{y \in \Omega} k(x - y), \tag{1.2}$$

где Ω – некоторое замкнутое множество из $\mathbb{R}^p$. Таким образом функция $\rho(\,\cdot\,,\Omega)$ задается калибром (1.1) и выражает расстояние от точки x до множества Ω в этой "несимметричной" норме.

Известно, если Ω – выпуклое множество, то функция (1.2) (далее ФР) является выпуклой на $\mathbb{R}^p$. В [2; гл. 2, § 3] получена соответствующая формула ее субдифференциала.

В данной работе нас будет интересовать случай, когда $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$, где $D \subset \mathbb{R}^p$ – выпуклое множество и $\operatorname{int} D \neq \varnothing$.

Будет установлено, что рассматриваемая ФР, как и обычная функция расстояния [12], [13], является вогнутой на D, и будет получена формула ее супердифференциала в точках $x \in \operatorname{int} D$. Кроме того, будет установлена дифференцируемость по направлениям ФР в граничных точках множества D и получена соответствующая формула производной по направлениям.

Далее будем использовать следующие обозначения:

- $\overline{A}$, $\operatorname{int} A$, $\operatorname{co} A$, ∂A – соответственно замыкание, внутренность, выпуклая оболочка и граница множества A;
- обозначим
$$\gamma(x, A) = \{g \in \mathbb{R}^p : \exists \alpha_g > 0,\ x + \alpha_g g \in A\ \forall\, \alpha \in (0, \alpha_g)\}, \qquad K(x, A) = \overline{\gamma(x, A)},$$
$$\Gamma(x, A) = \{g \in \mathbb{R}^p : \exists \{\alpha_k\} \downarrow 0,\ g_k \to g,\ x + \alpha_k g_k \in A \text{ при } k \to \infty\}$$
– соответственно конус допустимых, конус возможных направлений и конус Булигана множества A в точке x;
- $K(A) = \{g = \alpha v : v \in A,\ \alpha \geqslant 0\}$ – коническая оболочка множества A;
- $\langle x, y\rangle$ – скалярное произведение элементов $x, y \in \mathbb{R}^p$;
- $K^+ = \{w \in \mathbb{R}^p : \langle v, w\rangle \geqslant 0,\ \forall\, v \in K\}$ – сопряженный конус для конуса K;
- $s(x, A) = \sup_{v \in A} \langle v, x\rangle$ – опорная функция множества A;
- $Q^\rho(x) = \{z \in \Omega : k(x - z) = \rho(x, \Omega)\}$ – проекция точки x на множество Ω;
- $\underline{\partial} f(x) (\overline{\partial} f(x))$ – субдифференциал (супердифференциал) выпуклой (вогнутой) функции $f(x)$ в точке x;
- $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^p : f(x) < +\infty\}$ – эффективная область функции $f(x)$;
- $0_p = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$.

2. Вспомогательные факты. Напомним основные свойства калибра [1], [2]

а) если $\lambda \geqslant 0$, то $k(\lambda x) = \lambda k(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^p$;

б) если $x \in M$, то $k(x) \leqslant 1$; если $x \notin M$, то $k(x) > 1$;

в) $k(x + y) \leqslant k(x) + k(y)$ для любого $x, y \in \mathbb{R}^p$.

Как выпуклая конечная функция калибр является непрерывной и дифференцируемой по направлениям функцией в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$. Ее субдифференциал $\underline{\partial} k(\,\cdot\,)\colon \mathbb{R}^p \rightrightarrows 2^{\mathbb{R}^p}$, как многозначное отображение является полунепрерывным сверху всюду на $\mathbb{R}^p$. Для производной по направлениям справедлива формула [14; гл. 1]:
$$\frac{\partial k(x)}{\partial g} \equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1}[k(x + \alpha g) - k(x)] = \max_{v \in \underline{\partial} k(x)} \langle v, g\rangle.$$
Известна [2; гл. 4] формула субдифференциала калибра:
$$\underline{\partial} k(x) = \begin{cases} \{v \in \mathbb{R}^p : s(v, M) \leqslant 1\}, & \text{если } x = 0_p, \\ \{v \in \mathbb{R}^p : s(v, M) = 1,\ \langle v, x\rangle = k(x)\}, & \text{если } x \neq 0_p. \end{cases} \tag{2.1}$$

Лемма 1 [14; гл. 1]. *Многозначное отображение* $K^+(\cdot, D)$, *определенное на выпуклом множестве* D *и сопоставляющее точке* $x \in D$ *множество* $K^+(x, D)$, *является полунепрерывным сверху в любой точке* $x \in D$.

Лемма 2. *Пусть множество* Ω *является полупространством, заданным в виде* $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle a, y - b\rangle \leqslant 0\}$, *где* $a, b \in \mathbb{R}^p$ *и* $a \neq 0_p$. *Тогда справедлива формула*

$$\rho(x, \Omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \Omega, \\ \dfrac{\langle a, x - b\rangle}{s(a, M)}, & \text{если } x \notin \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Доказательство. Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$f(y) \equiv k(x - y) \to \min_{y \in \Omega}.$$

Пусть $y^* \in \Omega$ – точка минимума функции $f(y)$ на Ω. Как известно из выпуклого анализа [2; гл. 2], имеет место эквивалентность

$$f(y^*) = \min_{y \in \Omega} f(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\partial} f(y^*) \cap K^+(y^*, \Omega) \neq \varnothing. \tag{2.3}$$

Интересен только случай $x \notin \Omega$. Поэтому очевидно

$$\langle a, y^* - b\rangle = 0. \tag{2.4}$$

Нетрудно видеть

$$\underline{\partial} f(y^*) = -\underline{\partial} k(x - y^*). \tag{2.5}$$

И поскольку $K(y^*, \Omega) = \{v \in \mathbb{R}^p : \langle a, v\rangle \leqslant 0\}$, то

$$K^+(y^*, \Omega) = \{w = -\alpha a : \alpha \geqslant 0\}. \tag{2.6}$$

Теперь из (2.3), учитывая (2.5) и (2.6), следует существование $\alpha_0 > 0$ такого, что $\alpha_0 a \in \underline{\partial} k(x - y^*)$. Тогда в соответствии с (2.1) имеем

$$s(\alpha_0 a, M) = 1, \qquad \langle \alpha_0 a, x - y^*\rangle = k(x - y^*). \tag{2.7}$$

Из (2.7) получаем

$$k(x - y^*) = \frac{\langle a, x - y^*\rangle}{s(a, M)}.$$

Отсюда, используя (2.4) и $\rho(x, \Omega) = k(x - y^*)$, получаем (2.2).

Лемма 3. *Полупространство* $T(w, z) = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle w, y - z\rangle \leqslant 0\}$ *является опорным к выпуклому множеству* D *в точке* $z \in \partial D$ *тогда и только тогда, когда* $w \neq 0_p$ *и* $w \in K^+(z, D)$.

Доказательство. Пусть $z \in \partial D$. Тогда, поскольку

$$K^+(z, D) = (\overline{\gamma}(z, D))^+ = (\gamma(z, D))^+,$$

имеем

$$\begin{aligned} &w \in K^+(z, D) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle w, v\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, v \in \gamma(z, D) \\ &\quad \Longleftrightarrow \quad \langle w, \lambda(x - z)\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, \lambda > 0 \quad x \in D \quad \Longleftrightarrow \quad \langle w, x - z\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, x \in D. \end{aligned}$$

Последнее и означает, что полупространство $T(w, z)$ является опорным к D в точке z и $D \subset \{y \in \mathbb{R}^p : \langle w, y - z\rangle \geqslant 0\}$.

Теорема 1 [15; гл. 4], [16; гл. 1]. *Пусть X – банахово пространство, Y – компактное топологическое пространство, функция $f(x, y)$ определена на $X \times Y$ и такова, что функция $f(\,\cdot\,, y)\colon X \to \mathbb{R}$ выпукла для каждого $y \in Y$, а функция $f(x, \cdot\,)\colon Y \to \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху для каждого $x \in X$. Определим функцию $F(x) = \sup_{y \in Y} f(x, y)$ и множество $Y(x) = \{y \in Y : f(x, y) = F(x)\}$. Если для каждого $y \in Y$ функция $f(\,\cdot\,, y)$ непрерывна в некоторой точке $x_0 \in \operatorname{dom} F$, то для любой точки $x \in \operatorname{dom} F$ справедлива формула субдифференциала выпуклой на X функции $F(x)$:*

$$\underline{\partial} F(x) = \overline{\mathrm{co}}\{\underline{\partial}_x f(x, y) : y \in Y(x)\},$$

где $\underline{\partial}_x f(x, y)$ – субдифференциал функции $f(\,\cdot\,, y)$ в точке x.

3. Основной результат. Наша цель – доказать справедливость следующих фактов.

Теорема 2. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^p$ – выпуклое замкнутое множество*, $\operatorname{int} D \neq \varnothing$, $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$. *Тогда*

1) *функция $\rho(x, \Omega)$ является вогнутой на D;*
2) *формулу ее супердифференциала в точках $x \in \operatorname{int} D$ можно представить в виде*
$$\overline{\partial} \rho(x, \Omega) = \mathrm{co}\{w \in K^+(z, D) : s(w, M) = 1,\ z \in Q^\rho(x)\}; \tag{3.1}$$
3) *в точках $x \notin \operatorname{int} D$ функция $\rho(x, \Omega)$ дифференцируема по всем направлениям $g \in \mathbb{R}^p$, причем для производной по направлениям справедлива формула*
$$\frac{\partial \rho(x, \Omega)}{\partial g} = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin D, \\ \max\Bigl\{0, \min_{\substack{w \in K^+(x, D) \\ s(w, M) = 1}} \langle w, g\rangle\Bigr\}, & \text{если } x \in \partial D. \end{cases} \tag{3.2}$$

Доказательство. 1) Если $z \in \partial D$, то по лемме 3 для любого $w \in K^+(z, D)$, $w \neq 0_p$, полупространство $T(w, z) = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle w, y - z\rangle \leqslant 0\}$ будет опорным к D в точке z. Это позволяет представить множество Ω в виде

$$\Omega = \bigcup_{z \in \partial D} \bigcup_{\substack{w \in K^+(z, D) \\ w \neq 0_p}} T(w, z). \tag{3.3}$$

Используя (3.3) и лемму 2 для $x \in D$ получаем

$$\rho(x, \Omega) = \inf_{z \in \partial D} \inf_{\substack{w \in K^+(z, D) \\ w \neq 0_p}} \rho(x, T(w, z)) = \inf_{z \in \partial D} \inf_{\substack{w \in K^+(z, D) \\ s(w, M) = 1}} \langle w, x - z\rangle. \tag{3.4}$$

Следовательно, функция $\rho(x, \Omega)$ является вогнутой на D как нижняя грань семейства вогнутых функций.

2) Теперь покажем справедливость формулы (3.1).

2.1) Обозначим через

$$f(x, z) = \max_{\substack{w \in K^+(z, D) \\ s(w, M) = 1}} \langle w, z - x\rangle. \tag{3.5}$$

Очевидно, функция $f(\,\cdot\,,z)\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ является выпуклой и конечной, а значит [14; гл. 1], и непрерывной всюду на $\mathbb{R}^p$ при любом $z \in D$. Покажем, что функция $f(x,\,\cdot\,)\colon D \to \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху на D при любом $x \in \mathbb{R}^p$.

Пусть последовательность $\{z_k\}_{k=1,2,\dots} \subset D$ такова, что $z_k \to z$ при $k \to \infty$ и

$$\limsup_{y\to z} f(x,y) = \lim_{k\to\infty} f(x,z_k), \tag{3.6}$$

а элементы $w_k \in K^+(z_k,D)$ таковы, что $s(w_k,M) = 1$ и

$$f(x,z_k) = \langle w_k, z_k - x\rangle. \tag{3.7}$$

Последовательность $\{w_k\}_{k=1,2,\dots}$ является ограниченной. Поэтому без потери общности будем считать ее сходящейся $w_k \to w_0$ при $k \to \infty$, причем $s(w_0,M) = 1$. В силу леммы 1 $w_0 \in K^+(z,D)$, и тогда из (3.5), (3.6), переходя в (3.7) к пределу по $k \to \infty$, получаем

$$\limsup_{y\to z} f(x,y) = \langle w_0, z - x\rangle \leqslant \max_{\substack{w\in K^+(z,D),\\ s(w,M)=1}} \langle w, z - x\rangle = f(x,z).$$

2.2) Пусть D – не только выпуклое, но и ограниченное множество. Тогда ∂D – ограниченное замкнутое множество. Поэтому функция

$$F(x) = \sup_{z\in\partial D} f(x,z) \tag{3.8}$$

ввиду указанных в п. 2.1 свойств функции $f(x,z)$ является выпуклой на $\mathbb{R}^p$ и удовлетворяет всем требованиям теоремы 1. Следовательно, ее субдифференциал в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$ можно выразить формулой

$$\underline{\partial} F(x) = \overline{\mathrm{co}}\{\underline{\partial}_x f(x,z) : z \in Y(x)\}, \tag{3.9}$$

$$Y(x) = \{z \in \partial D : f(x,z) = F(x)\}. \tag{3.10}$$

К самой же выпуклой по x на $\mathbb{R}^p$ функции $f(x,z)$ как функции максимума по параметру w на компактном множестве, очевидно, применима та же теорема 1. Поэтому имеем

$$\underline{\partial}_x f(x,z) = \overline{\mathrm{co}}\{-w : w \in Q(x,z)\} = -\overline{\mathrm{co}}\, Q(x,z), \tag{3.11}$$

$$Q(x,z) = \{w \in \mathbb{R}^p : w \in K^+(z,D),\ s(w,M) = 1,\ \langle w, z - x\rangle = f(x,z)\}. \tag{3.12}$$

2.3) Покажем, что

$$Q^\rho(x) \subset Y(x) \qquad \forall\, x \in \operatorname{int} D. \tag{3.13}$$

Действительно, пусть $z \in Q^\rho(x)$, т.е.

$$z \in \partial D, \qquad \rho(x,\Omega) = k(x - z). \tag{3.14}$$

По лемме 3 при любом $w \in K^+(z,D)$, $w \neq 0_p$ полупространство $T(w,z) = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle w,\, y - z\rangle \leqslant 0\} \subset \Omega$ и является опорным к D в точке z. Таким образом

$$\rho(x,\Omega) \leqslant \rho(x, T(w,z)) \leqslant k(x - z). \tag{3.15}$$

Из (3.14), (3.15) и леммы 2 следует

$$\rho(x,\Omega)=\rho(x,T(w,z))=\langle w,x-z\rangle \qquad \forall\, w\in K^{+}(z,D), \quad s(w,M)=1. \tag{3.16}$$

Но из (3.4), (3.5) и (3.8) вытекает

$$F(x)=-\rho(x,\Omega) \qquad \forall\, x\in \operatorname{int} D. \tag{3.17}$$

Из (3.16)–(3.17) и (3.5) для $x\in \operatorname{int} D$ получаем

$$F(x)=\langle w,z-x\rangle=f(x,z) \qquad \forall\, w\in K^{+}(z,D), \quad s(w,M)=1, \tag{3.18}$$

что (см. (3.10)) и означает $z\in Y(x)$. Кроме того, из (3.18) следует (ср. с (3.12))

$$Q(x,z)=\{w\in K^{+}(z,D): s(w,M)=1\} \qquad \forall\, z\in Q^{\rho}(x), \quad x\in \operatorname{int} D. \tag{3.19}$$

2.4) Теперь докажем, что для $x\in \operatorname{int} D$ справедливо включение

$$Q(x,\widetilde{z})\subset \bigcup_{z\in Q^{\rho}(x)} Q(x,z) \qquad \forall\, \widetilde{z}\in Y(x)\setminus Q^{\rho}(x). \tag{3.20}$$

Итак, пусть $\widetilde{z}\in Y(x)\setminus Q^{\rho}(x)$. Возьмем произвольный элемент $w\in Q(x,\widetilde{z})$, т.е. (см. (3.12))

$$w\in K^{+}(\widetilde{z},D), \qquad s(w,M)=1, \qquad \langle w,\widetilde{z}-x\rangle=f(x,\widetilde{z}). \tag{3.21}$$

И поскольку $\widetilde{z}\in Y(x)$, то

$$f(x,\widetilde{z})=F(x). \tag{3.22}$$

Теперь из (3.17), используя (3.21), (3.22), а также леммы 2 и 3, получаем

$$\rho(x,\Omega)=\langle w,x-\widetilde{z}\rangle=\rho(x,T(w,\widetilde{z})), \tag{3.23}$$

где $T(w,\widetilde{z})=\{y\in\mathbb{R}^p : \langle w,y-\widetilde{z}\rangle\leqslant 0\}$ – опорное полупространство к D в точке $\widetilde{z}\in\partial D$.

Пусть точка $z_0\in T(x,\widetilde{z})$ такова, что

$$k(x-z_0)=\rho(x,T(x,\widetilde{z})). \tag{3.24}$$

Тогда из (3.23), (3.24) следует $z_0\in Q^{\rho}(x)$. В то же время отсюда вытекает, что $T(w,\widetilde{z})$ является опорным полупространством к D одновременно и в точке z_0. Поэтому по лемме 3 имеем $w\in K^{+}(z_0,D)$, а учитывая (3.19) и $s(w,M)=1$, мы получаем $w\in Q(x,z_0)$. Тем самым, включение (3.20) доказано.

2.5) Из (3.9)–(3.12), (3.19) и (3.20) получаем

$$\begin{aligned}\underline{\partial} F(x)&=\overline{\operatorname{co}}\{\underline{\partial}_x f(x,z): z\in Q^{\rho}(x)\}=-\overline{\operatorname{co}}\{Q(x,z): z\in Q^{\rho}(x)\}\\&=-\overline{\operatorname{co}}\{w\in K^{+}(z,D): s(w,M)=1,\ z\in Q^{\rho}(x)\} \qquad \forall\, x\in \operatorname{int} D.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Принимая во внимание замкнутость множества $Q^{\rho}(x)$ и лемму 1, нетрудно показать, что знак замыкания в формуле (3.25) можно снять. А поскольку $F(x)=-\rho(x,\Omega)$

для $x \in D$, то $\overline{\partial}\rho(x,\Omega) = -\underline{\partial}F(x)$ в точках $x \in \operatorname{int} D$. Поэтому из (3.25) получаем (3.1).

2.6) Нетрудно видеть, что требование ограниченности множества D, наложенное в п. 2.2, не является существенным. Действительно, для произвольной точки $x_0 \in \operatorname{int} D$ возьмем $\lambda > \rho(x_0, D)$, $D_\lambda = D \cap B(x_0,\lambda)$, $\Omega_\lambda = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D_\lambda}$. Очевидно, проекции точки x_0 на Ω и Ω_λ совпадают и в некоторой окрестности точки x_0 выполняется $\rho(x,\Omega_\lambda) = \rho(x,\Omega)$, а следовательно, и $\overline{\partial}\rho(x_0,\Omega) = \overline{\partial}\rho(x_0,\Omega_\lambda)$. При этом для $\overline{\partial}\rho(x_0,\Omega_\lambda)$ ввиду ограниченности множества D_λ справедлива формула (3.1) при $x = x_0$.

3) Теперь докажем дифференцируемость ФР по направлениям в точках $x \notin \operatorname{int} D$ и справедливость формулы (3.2). Случай $x \notin D$, т.е. $x \in \operatorname{int}\Omega$, очевидно, является тривиальным. Далее предполагается $x \in \partial D$.

Сразу отметим, что из выпуклости множества D следует

$$K(x,\Omega) = \Gamma(x,\Omega) \tag{3.26}$$

и возможность представления конуса $K(x,\Omega)$ в виде

$$K(x,\Omega) = \bigcup_{\substack{w\in K^+(x,D)\\ w\neq 0_p}} -K^+(w). \tag{3.27}$$

3.1) Покажем, что ФР дифференцируема по направлениям в точке $x \in \partial D$ и при этом

$$\frac{\partial\rho(x,\Omega)}{\partial g} = \min_{v\in K(x,\Omega)} k(g-v) \qquad \forall\, g \in \mathbb{R}^p. \tag{3.28}$$

Обозначим

$$H(\alpha) = \alpha^{-1}[\rho(x+\alpha g,\Omega) - \rho(x,\Omega)].$$

Пусть последовательность $\{\alpha_k\} \downarrow 0$ при $k\to\infty$ и такова, что

$$H^- = \liminf_{\alpha\downarrow 0} H(\alpha) = \lim_{k\to\infty} H(\alpha_k). \tag{3.29}$$

Пусть также последовательность $\{y_k\} \subset \Omega$, $k = 1,2,\dots$, такова, что

$$\rho(x+\alpha_k g,\Omega) \equiv \min_{y\in\Omega} k(x+\alpha_k g - y) = k(x+\alpha_k g - y_k) = \alpha_k k\biggl(g - \frac{y_k - x}{\alpha_k}\biggr). \tag{3.30}$$

Нетрудно видеть, что ФР, как и калибр $k(\,\cdot\,)$, является липшицевой функцией. Следовательно, H^- будет конечной величиной. А тогда из (3.29), (3.30), учитывая $\rho(x,\Omega)=0$, вытекает ограниченность последовательности $\{(y_k - x)/\alpha_k\}$, $k=1,2,\dots$. Поэтому без потери общности можно считать ее сходящейся: $v_k = (y_k - x)/\alpha_k \to v_0$, $k\to\infty$. При этом, поскольку $y_k = x + \alpha_k v_k \in \Omega$, имеем $v_0 \in \Gamma(x,\Omega)$. Таким образом, из (3.29), (3.30) получаем

$$H^- = \lim_{k\to\infty} k(g - v_k) = k(g - v_0) \geqslant \min_{v\in\Gamma(x,\Omega)} k(g-v). \tag{3.31}$$

С другой стороны, пусть $v \in \gamma(x,\Omega)$, т.е. для некоторого $\alpha_v > 0$ выполняется включение $x + \alpha v \in \Omega$ при $\alpha \in (0,\alpha_v)$.

Тогда получаем

$$\rho(x+\alpha g,\Omega)=\min_{y\in\Omega}k(x+\alpha g-y)\leqslant\alpha k(g-v)\qquad\forall\,\alpha\in[0,\alpha_v]$$

и, следовательно,

$$H^+\equiv\limsup_{\alpha\downarrow 0}H(\alpha)\leqslant k(g-v).$$

Отсюда, учитывая произвольность выбора $v\in\gamma(x,\Omega)$, а также $K(x,\Omega)=\overline{\gamma}(x,\Omega)$ и непрерывность калибра, следует

$$H^+\leqslant\min_{v\in K(x,\Omega)}k(g-v).\tag{3.32}$$

Теперь из (3.31), (3.32) и (3.26) получаем (3.28).

3.2) Поскольку $-K^+(w)=\{v\in\mathbb{R}^p:\langle w,v\rangle\leqslant 0\}$, то из (3.27), (3.28), используя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho(x,\Omega)}{\partial g}&=\min_{\substack{w\in K^+(D)\\ w\neq 0_p}}\ \min_{v\in -K^+(w)}k(g-v)\\&=\begin{cases}0, & \text{если } g\in K(x,\Omega),\\ \displaystyle\min_{\substack{w\in K^+(D)\\ w\neq 0_p}}\left\langle\frac{w}{s(w,M)},g\right\rangle, & \text{если } g\notin K(x,\Omega),\end{cases}\\&=\max\Bigl\{0,\min_{\substack{w\in K^+(D)\\ s(w,M)=1}}\langle w,g\rangle\Bigr\}.\end{aligned}$$

Замечание 1. Теорема 2 является обобщением соответствующего факта из [13] для обычной ФР, доказательство которого опиралось на работу [17]. В данном случае ввиду невозможности применения напрямую результатов этой работы, мы использовали теорему 1 из [15; гл. 4] (см. также [16; гл. 1]).

Замечание 2. Формулы (3.1), (3.2) нетрудно конкретизировать в отдельных случаях. Например, когда множество D или M задается в виде лебегового множества выпуклых функций, а также когда оно является многогранником.

Замечание 3. Укажем также на одно из возможных непосредственных приложений. Если D является выпуклым телом, то задача о его внутренней оценке квазишаром, определяемым калибром $k(\,\cdot\,)$,

$$\rho(x,\Omega)=\min_{y\in\Omega}k(x-y)\to\max_{x\in D},\tag{3.33}$$

в силу п. 1) теоремы 2, является задачей выпуклого программирования. Поэтому в соответствии с известным фактом из выпуклого анализа (см., например, [2; гл. 4])

$$\rho(x^*,\Omega)=\max_{x\in D}\rho(x,\Omega)\quad\Longleftrightarrow\quad 0_p\in\overline{\partial}\rho(x^*,\Omega).$$

Кроме того, полученная формула супердифференциала (3.1) данной ФР позволяет применять для приближенного решения задачи (3.33) методы субградиентного спуска (см., например, [18]). Если же D является многогранником, то, как и в [19], с помощью леммы 2 можно показать, что задача (3.33) сводится к задаче линейного программирования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973.

[2] Б. Н. Пшеничный, *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*, Наука, М., 1980.

[3] Ch. B. Dunham, "Asymmetric norms and linear approximation", *Congr. Numer.*, **69** (1989), 113–120.

[4] S. Romaguera, M. Schellekens, "Quasi-metric properties of complexity spaces", *Topology Appl.*, **98** (1999), 311–322.

[5] F. S. De Blasi, J. Myjak, "On generalized best approximation problem", *J. Approx. Theory*, **94**:1 (1998), 54–72.

[6] C. Alerge, "Continuous operators on asymmetric normed spaces", *Acta Math. Hungar.*, **122**:4 (2009), 357–372.

[7] S. Cobzaş, *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*, Birkhäuser, Basel, 2013.

[8] А. Р. Алимов, *Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в нормированных и несимметрично нормированных пространствах*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Московский гос. ун-т имени М. В. Ломоносова, М., 2014.

[9] А. Р. Алимов, "Выпуклость ограниченных чебышёвских множеств в конечномерных пространствах с несимметричной нормой", *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **14**:4 (2) (2014), 489–497.

[10] Г. Е. Иванов, М. С. Лопушански, "Аппроксимативные свойства слабо выпуклых множеств в пространствах с несимметричной полунормой", *Тр. МФТИ*, **4**:4 (2012), 94–104.

[11] G. E. Ivanov, M. S. Lopushanski, "Separation theorems for nonconvex sets in spaces with nonsymmetric seminorm", *Math. Inequal. Appl.*, **20**:3 (2017), 737–754.

[12] J. M. Borwein, S. P. Fitzpatrick, "Existense of nearest points in Banach spaces", *Canad. J. Math.*, **41**:4 (1989), 702–720.

[13] С. И. Дудов, "Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния", *Матем. заметки*, **61**:4 (1997), 530–542.

[14] В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев, *Недифференцируемая оптимизация*, Наука, М., 1981.

[15] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974.

[16] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, Физматлит, М., 2007.

[17] С. И. Дудов, "Дифференцируемость по направлениям функции расстояния", *Матем. сб.*, **186**:3 (1995), 29–52.

[18] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации*, Ч. I, МЦНМО, М., 2011.

[19] С. И. Дудов, "Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **36**:5 (1996), 153–159.

С. И. Дудов
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: DudovsI@info.sgu.ru

Поступило
03.08.2018
Принята к публикации
16.01.2019

М. А. Осипцев
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: Osipcevm@gmail.com