ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том XXIII 1987 Вып. 1

УДК 621.391.1:519.27

АДАПТИВНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ МИНИМАКСНЫЕ ОЦЕНКИ ГЛАДКИХ СИГНАЛОВ

Голубев Г. К.

Решается задача асимптотически минимаксной фильтрации гладкого сигнала на фоне белого гауссовского шума при неполной априорной информации о классе оцениваемых сигналов.

Пусть на отрезке $[0,1]$ наблюдается случайный процесс $X(t)$, имеющий стохастический дифференциал

$$dX(t)=S(t)dt+\varepsilon dw(t), \quad X(0)=0, \tag{1}$$

где $w(\cdot)$ — стандартный винеровский процесс, а $S(t)$ — неизвестная функция, которую нужно оценить по наблюдениям $X(t)$.

Задачу оценивания будем рассматривать в минимаксной постановке. При этом предположим, что полезный сигнал $S(\cdot)$ принадлежит некоторому множеству Σ в пространстве $L_2^\beta(0,1)$. Это пространство состоит из функций, имеющих $\beta-1$ абсолютно непрерывную производную и норму

$$\|g\|_\beta^2=\sum_{j=0}^{\beta}\int_0^1 |g^{(j)}(t)|^2\,dt;$$

здесь и далее символом $g^{(j)}(\cdot)$ обозначается j-я производная функции $g(\cdot)$

Риск оценки $\tilde{S}(t, X(\cdot))$ сигнала $S(t)$ определяется следующим образом:

$$R_b(\tilde{S},\Sigma)=\sup_{S\in\Sigma}\mathbf{M}_S\int_0^1 b(t)\,[\tilde{S}(t, X(\cdot))-S(t)]^2\,dt,$$

где $\mathbf{M}_S(\cdot)$ — усреднение по мере в $C(0,1)$, порожденной процессом $X(t)$ из (1) при фиксированной функции $S(t)$, $b(t)$, $t\in[0,1]$ — неотрицательная кусочно-непрерывная функция.

Далее будем изучать величину асимптотически минимаксного риска

$$r_b(\Sigma)=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\inf_{\tilde{S}} R_b(\tilde{S},\Sigma)\,\varepsilon^{-4\beta/(2\beta+1)}.$$

По существу, первые результаты о $r_b(\Sigma)$ были получены в [1]. Там, в частности, было показано, что если множество Σ ограничено и содержит некоторый шар из $L_2^\beta(0,1)$, то $0<r_b(\Sigma)<\infty$. Точное значение величины $r_b(\Sigma)$ в случае, когда Σ представляет собой шар из периодических функций в $L_2^\beta(0,1)$ и $b(t)=\text{const}$, было впервые найдено в [2].

Опишем множества Σ, которые будут рассматриваться в данной работе. Обозначим через Γ_g^β график в $[0,1]\times R^1$ функции

$$i_g(t)\triangleq\int_0^t [g^{(\beta)}(u)]^2\,du, \quad g\in L_2^\beta(0,1), \quad t\in[0,1].$$

Пусть $O_\rho(\Gamma_g^\beta)$ — сферическая окрестность радиуса ρ множества Γ_g^β в $[0,1]\times R^1$:

$$O_\rho(\Gamma_g^\beta)=\{(t,x)\in[0,1]\times R^1:\ \inf_{(t_1,x_1)\in\Gamma_g^\beta}[(t-t_1)^2+(x-x_1)^2]<\rho^2\}.$$

Положим

$$Q_{\delta,\rho}(S)=\left\{f\in L_2^\beta(0,1):\ \Gamma_f^\beta\in O_\rho(\Gamma_S^\beta),\ \sum_{j=0}^{\beta-1}\int_0^1[f^{(j)}(u)]^2\,du<\delta\right\}.$$

Будем говорить, что Σ имеет массивное ядро в $L_2^\beta(0,1)$, если

$$\sup_{S\in\Sigma}\int_0^1[S^{(\beta)}(u)]^2\,du<\infty$$

и для любой функции $S\in\Sigma$ найдутся числа ρ, $\delta>0$ такие, что $Q_{\delta,\rho}(S)\subset\Sigma$.

Одна из задач, решаемых в настоящей работе,— вычисление величины $r_b(\Sigma)$ для множеств Σ, имеющих массивные ядра в $L_2^\beta(0,1)$. Далее будет показано, что в задаче фильтрации полезного сигнала $S(t)$ по наблюдениям $X(t)$ из (1) существуют оценки, удовлетворяющие более жестким требованиям оптимальности, чем обычная асимптотическая минимаксность.

Будем говорить, что последовательность оценок $S_\varepsilon^*(t,\ X(\cdot))$ $(\varepsilon\to0)$ является адаптивной асимптотически минимаксной, если для любого множества Σ, имеющего массивное ядро в $L_2^\beta(0,1)$, и любой непрерывной функции $b(t)\geqslant0$ выполнено соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to0}R_b(S_\varepsilon^*,\Sigma)=r_b(\Sigma).$$

Введение адаптивных асимптотически минимаксных последовательностей оценок связано с тем, что обычно никогда не известны с достаточной степенью точности ни параметрическое множество Σ, ни вес $b(t)$ в функции потерь. Оказывается, что если параметрическое множество Σ выпукло и имеет массивное ядро в $L_2^\beta(0,1)$, то в качестве асимптотически минимаксных оценок можно использовать линейные оценки. В то же время в классе линейных оценок нет ни одной последовательности адаптивных асимптотически минимаксных оценок.

Одним из основных результатов работы является

Теорема 1. *Если параметрическое множество Σ имеет массивное ядро в $L_2^\beta(0,1)$, то*

$$r_b(\Sigma)=c(\beta)\sup_{S\in\Sigma}\int_0^1 b(t)\,|S^{(\beta)}(t)|^{2/(2\beta+1)}\,dt, \tag{2}$$

где $c(\beta)=2\beta[\beta+1]^{-1}[(\beta+1)(2\beta+1)/2\beta(2\pi)^{2\beta}]^{1/(2\beta+1)}$.

К сожалению, адаптивные асимптотически минимаксные оценки имеют довольно сложный вид. Для их описания продолжим список дополнительных обозначений и результатов.

Преобразование Фурье функции $f(t)\in L_2(-\infty,\ \infty)$ будем обозначать

$$\hat f(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i\omega t}f(t)\,dt.$$

Введем на функциях $\hat K(\omega)\in L_2(-\infty,\ \infty)$ следующий функционал:

$$L(\hat K(\omega))=\operatorname*{ess\,sup}_\omega|2\pi\omega|^{-2\beta}|1-\hat K(\omega)|^2+\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat K(\omega)|^2\,d\omega.$$

Далее ради сокращения записи все константы, значения которых для нас несущественны, будут обозначаться через C.

Конструкция оценок, изучаемых в настоящей работе, существенным образом будет опираться на следующий довольно простой факт.

Лемма 1. *Существует последовательность функций $K_n^*(t)$ с носителями соответственно на отрезках $[-n, n]$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} L(\hat{K}_n^*(\omega)) = \inf_{\hat{K}} L(\hat{K}(\omega)) = c(\beta), \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|^{\beta+1})^2 [K_n^*(t) + tK_n^{*(1)}(t)]^2\, dt < Cn^{2\beta+1}. \tag{4}$$

Доказательство. Нетрудно проверить [3], что $\inf_{\hat{k}} L(\hat{K}(\omega))$ достигается на функции

$$\hat{K}^*(w) = \begin{cases} 1-|\omega/\omega_c|^\beta, & |\omega|<\omega_c, \\ 0, & |\omega|>\omega_c, \end{cases}$$

где

$$\omega_c = [(\beta+1)(2\beta+1)(2\beta)^{-1}(2\pi)^{-2\beta}]^{1/(2\beta+1)}.$$

Для некоторого числа $\lambda_n>0$ построим бесконечно дифференцируемую функцию $\hat{K}_{\lambda_n}(\omega)$, удовлетворяющую условиям

$$\hat{K}_{\lambda_n}(\omega) = \hat{K}_{\lambda_n}(-\omega), \quad \hat{K}^*(\omega) \leqslant \hat{K}_{\lambda_n}(\omega) \leqslant 1,$$

$$\operatorname{supp} \hat{K}_{\lambda_n}(\omega) \subset [-2\omega_c, 2\omega_c],$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{K}_{\lambda_n}(\omega)|^2\, d\omega \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{K}^*(\omega)|^2\, d\omega + \lambda_n, \quad \hat{K}_{\lambda_n}^{(j)}(0) = 0, \ j = 1, 2, \ldots$$

По последовательности функций $K_{\lambda_n}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\omega t} \hat{K}_{\lambda_n}(\omega)\, d\omega$ построим новую последовательность функций $K_n(t)$ такую, что

$$K_n(t) = K_n(-t), \ K_n(t) = K_{\lambda n}(t), \ t \in [-n/2, n/2], \ K_n(t) \equiv 0, \ |t|>n,$$

$$\int_{-n}^{n} K_n(t)\, dt = 1, \quad \int_{-n}^{n} t^j K_n(t)\, dt = 0, \quad j = 1 \div \beta,$$

$$\int_{n/2-0}^{\infty} (1+t^{\beta+1})^2 (|K_n(t)| + t|K_n^{(1)}(t)|)^2\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{n/2}^{\infty} (1+|t|^{\beta+1})^2 (|K_{\lambda_n}(t)| + t|K_{\lambda_n}^{(1)}(t)|)^2\, dt.$$

Заметим, во-первых, что $L(\hat{K}_{\lambda_n}(\omega)) \leqslant L(\hat{K}^*(\omega)) + \lambda_n$ и справедливы следующие неравенства:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{K}_{\lambda_n}(\omega) - \hat{K}_n(\omega)|^2\, d\omega \leqslant C \int_{n/2}^{\infty} |K_{\lambda_n}(t)|^2\, dt,$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega} |2\pi_\omega|^{-2\beta} |1-\hat{K}_n(\omega)|^2 \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\omega} |2\pi\omega|^{-2\beta} |1-\hat{K}_{\lambda_n}(\omega)|^2 +$$

$$+ Cq_n \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{\beta+1} |K_{\lambda_n}(t)|\, dt\right]^2 + Cq_n^{-2\beta} \left[\int_{-\infty}^{-n/2} |K_{\lambda_n}(t)|\, dt\right]^2.$$

Отсюда ясно, что, подбирая соответствующим образом последовательности λ_n и q_n, можно получить (3). Неравенство (4) непосредственно вы-

текает из следующих соотношений:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{-n/2}^{n/2} (1+|t|^{2\beta+2})\,|K^{*(j)}(t)-K_n^{(j)}(t)|^2\,dt=0, \quad j=0,1,$$

$$|K^*(t)+tK^{*(1)}(t)|<C[|t|+C]^{-1}.$$

Построение последовательности адаптивных асимптотически минимаксных оценок начнем с восстановления сигнала на краях отрезка $[0,1]$. Положим

$$S_\varepsilon^*(t)=\begin{cases}\int_0^1 \varphi_\varepsilon' K_0[\varphi_\varepsilon'(u-t)]\,dX(u), & t\in[0,\Delta_\varepsilon],\\ \int_0^1 \varphi_\varepsilon' K_0[\varphi_\varepsilon'(t-u)]\,dX(u), & t\in[1-\Delta_\varepsilon,1],\end{cases} \tag{5}$$

где $K_0(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция с носителем на отрезке $[0,1]$ и такая, что $L(\hat{K}_0(\omega))<\infty$, а $\varphi_\varepsilon'=[\Delta_\varepsilon\varepsilon^2]^{-1/(2\beta+1)}$.

Построим предварительную оценку $\tilde{S}_\varepsilon(t)$ по следующей формуле:

$$\tilde{S}_\varepsilon(t)=\int_0^1 \rho_\varepsilon K_0[\rho_\varepsilon(t-u)]\,dX(u),\ t\in[\Delta_\varepsilon/2,1-\Delta_\varepsilon/2]. \tag{6}$$

При $t\in[\Delta_\varepsilon, 1-\Delta_\varepsilon]$ определим следующий функционал:

$$p_\varepsilon(t)=\left|\frac{1}{\Delta_\varepsilon}\int_{t-\Delta_\varepsilon/2}^{t+\Delta_\varepsilon/2}[\tilde{S}^{(\beta)}(u)]^2\,du-\left(\frac{\rho_\varepsilon}{\varphi_\varepsilon}\right)^{2\beta+1}\times\right. \tag{7}$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{+\infty}|2\pi\omega|^{2\beta}\,|\hat{K}_0(\omega)|^2\,d\omega\right|^{1/(2\beta+1)};$$

здесь и далее $\varphi_\varepsilon=\varepsilon^{-2/(2\beta+1)}$. Положим

$$q_\varepsilon(t)=\begin{cases}\varphi_\varepsilon[h_\varepsilon+p_\varepsilon(j\Delta_\varepsilon')], & t\in[j\Delta_\varepsilon'-\Delta_\varepsilon/2,\ j\Delta_\varepsilon'+\Delta_\varepsilon/2],\\ \varphi_\varepsilon[\Delta_\varepsilon'^{-1}n_\varepsilon\varphi_\varepsilon^{-1}]^{-1/(2\beta+1)} & \text{при остальных } t,\end{cases}$$

где $\Delta_\varepsilon'=\Delta_\varepsilon+2n_\varepsilon\varphi_\varepsilon^{-1}$, а целочисленная переменная j пробегает значения от 1 до $[\Delta_\varepsilon']^{-1}$.

При $t\in[\Delta_\varepsilon, 1-\Delta_\varepsilon]$ последовательность адаптивных асимптотически минимаксных оценок определяется следующим образом:

$$S_\varepsilon^*(t)=\int_0^1 q_\varepsilon(t)\,K_{n_\varepsilon}^*[q_\varepsilon(t)(t-u)]\,\tilde{S}_\varepsilon(u)\,du, \tag{8}$$

где $K_{n_\varepsilon}^*(\cdot)$ — последовательность ядер, удовлетворяющая лемме 1.

Теорема 2. *Пусть параметрическое множество Σ имеет массивное ядро в $L_2^\beta(0,1)$ и пусть выполнены следующие условия:*

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Delta_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to0}h_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to0}n_\varepsilon^{-1}=\lim_{\varepsilon\to0}n_\varepsilon\varphi_\varepsilon^{-1}\Delta_\varepsilon^{-1}=\lim_{\varepsilon\to0}\rho_\varepsilon^{-\beta}\varphi_\varepsilon^{\beta}\Delta_\varepsilon^{-1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}h_\varepsilon^{-1}n_\varepsilon^{\beta+1/2}[\Delta_\varepsilon^{-2}\rho_\varepsilon^{4\beta+1}\varepsilon^4]^{1/(4\beta+2)}=0.$$

Тогда последовательность оценок $S_\varepsilon^*(t)$, определенная согласно (5)—(8), *является адаптивной асимптотически минимаксной, т. е.*

$$\lim_{\varepsilon\to0}R_b(S_\varepsilon^*,\Sigma)=r_b(\Sigma). \tag{9}$$

Нижняя граница для величины $r_b(\Sigma)$ легко находится с помощью на-

ведения гауссовского распределения на параметрическом множестве Σ ([2, 3]).

Лемма 2. *Для любой функции $S\in\Sigma$ такой, что для некоторых δ, $\rho>0$, $Q_{\delta,\rho}(S)\subset\Sigma$, справедливо неравенство*

$$r_b(\Sigma)\geqslant c(\beta)\int_0^1 b(t)\,|S^{(\beta)}(t)|^{2/(2\beta+1)}\,dt. \tag{10}$$

Далее часто будем использовать следующий простой факт.

Лемма 3. *Для любой функции S, принадлежащей ограниченному в $L_2^\beta(0,1)$ множеству F, и любого числа $\gamma>0$ найдется функция $S_\gamma\in L_2(-\infty,\infty)$ такая, что*

$$S_\gamma(t)=S(t),\quad t\in[a,b]\subset[0,1],$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}[S_\gamma^{(\beta)}(t)]^2\,dt\leqslant\int_a^b[S^{(\beta)}(t)]^2\,dt+\gamma.$$

Для доказательства достаточно продолжить функцию $S(t)$ с отрезка $[a,b]$ с помощью двух полиномов $p_a(t)$ и $p_b(t)$ степени $2\beta-1$ таких, что

$$p_a^{(l)}(a)=S^{(l)}(a),\quad p_a^{(l)}(a-T)=0,$$
$$p_b^{(l)}(b)=S^{(l)}(b),\quad p_b^{(l)}(b+T)=0,\quad l=0\div\beta-1,$$
$$T=\gamma^{-1}\max_{0\leqslant j\leqslant\beta-1}|S^{(j)}(a)|^2+|S^{(j)}(b)|^2.$$

Вне отрезка $[a-T,\ b+T]$ нужно положить $S_\gamma(t)\equiv0$.

Лемма 4. *Положим*

$$p_0(t)=\left[\frac{1}{\Delta_\varepsilon}\int_{t-\Delta_\varepsilon/2}^{t+\Delta_\varepsilon/2}\left[\int_0^1\rho_\varepsilon^{\beta+1}K_0^{(\beta)}[\rho_\varepsilon(\tau-u)]\,S(u)\,du\right]^2d\tau\right]^{1/(2\beta+1)}.$$

Если $\sup\limits_{S\in\Sigma}\int_0^1[S^{(\beta)}(u)]^2\,du<\infty$, *то при* $t\in[\Delta_\varepsilon,\ 1-\Delta_\varepsilon]$ *выполнено неравенство*

$$\sup_{S\in\Sigma}\mathbf{M}_S[p_\varepsilon(t)-p_0(t)]^4\leqslant C\,[\Delta_\varepsilon^{-2}\rho_\varepsilon^{4\beta+1}\varepsilon^4]^{1/(2\beta+1)}. \tag{11}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_S[p_\varepsilon(t)-p_0(t)]^4\leqslant&\left\{\mathbf{M}\left[\frac{\varepsilon^2}{\Delta_\varepsilon}\int_{t-\Delta_\varepsilon/2}^{t+\Delta_\varepsilon/2}\left[\int_0^1\rho_\varepsilon^{\beta+1}K_0^{(\beta)}\times\right.\right.\right.\\&\left.\left.\times[\rho_\varepsilon(\tau-u)]\,dw(u)\right]^2d\tau-\left(\frac{\rho_\varepsilon}{\varphi_\varepsilon}\right)^{2\beta+1}\int_{-\infty}^{+\infty}|2\pi\omega|^{2\beta}\times\\&\left.\left.\times|\widehat{K}_0(\omega)|^2\,d\omega\right]^2\right\}^{2/(2\beta+1)}+\left\{\mathbf{M}\left[\frac{2\varepsilon}{\Delta_\varepsilon}\int_{t-\Delta_\varepsilon/2}^{t+\Delta_\varepsilon/2}\rho_\varepsilon^{\beta+1}\int_0^1K_0^{(\beta)}\times\right.\right.\\&\left.\left.\times[\rho_\varepsilon(\tau-u)]\,dw(u)\int_0^1\rho_\varepsilon^{\beta+1}K_0^{(\beta)}[\rho_\varepsilon(\tau-p)]\,S(p)\,dp\right]^2d\tau\right\}^{2/(2\beta+1)}.\end{aligned} \tag{12}$$

Для того чтобы оценить первое слагаемое в правой части (12), воспользуемся следующим тождеством:

$$\mathbf{M}\xi_1^2\xi_2^2-\mathbf{M}\xi_1^2\mathbf{M}\xi_2^2=2(\mathbf{M}\xi_1\xi_2)^2,$$

где ξ_j, $j=1,\ 2$ — гауссовские случайные величины с нулевым средним.

Поэтому

$$(13)\qquad \mathbf{M}\left[\frac{\varepsilon^2}{\Delta_\varepsilon}\int\limits_{t-\Delta_\varepsilon/2}^{t+\Delta_\varepsilon/2}\left[\left[\int\limits_0^1 \rho_\varepsilon^{\beta+1}K_0^{(\beta)}[\rho_\varepsilon(p-u)]\,dw(u)\right]^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathbf{M}\left[\int\limits_0^1 \rho_\varepsilon^{\beta+1}K_0^{(\beta)}[\rho_\varepsilon(p-u)]\,dw(u)\right]^2\right]dp\right]^2=$$

$$=\frac{2\varepsilon^4}{\Delta_\varepsilon^2}\int\limits_{t-\Delta_\varepsilon/2}^{t-\Delta_\varepsilon/2}\int\limits_{t-\Delta_\varepsilon/2}^{t+\Delta_\varepsilon/2}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_\varepsilon^{2\beta+2}K_0^{(\beta)}[\rho_\varepsilon(q-s)]\,K_0^{(\beta)}[p_\varepsilon(v-s)]\,ds\right]^2\times$$

$$\times\,dq\,dv\leqslant 2\varepsilon^4\Delta_\varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon^{4\beta+1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_0^{(\beta)}(p-t)\,K_0^{(\beta)}(t)\,dt\right]^2dp.$$

Для оценки второго слагаемого в (15) потребуется следующий довольно простой факт. Пусть ядро линейного оператора A_T имеет вид

$$a_T(t,\tau)=\int\limits_{-T}^{T}\sigma_1(t-u)\,\sigma_2(u-\tau)\,du,$$

где функции $\sigma_k(\cdot)$ лежат в $L_2(-\infty,\infty)$ и имеют носители на $[-r,r]$. Тогда при любом T

$$\|A_T\|\leqslant\left\{\operatorname*{ess\,sup}_\omega|\hat\sigma_1(\omega)|^2|\hat\sigma_2(\omega)|^2+\right.$$

$$\left.+8r\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\sigma_1(t-u)||\sigma_2(u)|\,du\right]^2dt\right\}^{1/2}.$$

Используя это неравенство, получаем

$$\left[\frac{2\varepsilon}{\Delta_\varepsilon}\right]^2\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1 S^{(\beta)}(p)\int\limits_{t-\Delta_\varepsilon/2}^{t+\Delta_\varepsilon/2}\rho_\varepsilon^{\beta+1}K_0{}^\beta[\rho_\varepsilon(u-v)]\,K_0[\rho_\varepsilon(u-p)]\times\right.$$

$$\left.\times\,du\,dp\right]^2dv\leqslant C[\varepsilon/\Delta_\varepsilon]^2\left\{\operatorname*{ess\,sup}_\omega|\widehat{K}_0(\rho_\varepsilon^{-1}\omega)|^4|2\pi\omega|^{2\beta}+\right.$$

$$\left.+\rho_\varepsilon^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_\varepsilon^{\beta+1}|K_0^{(\beta)}[\rho_\varepsilon(t-u)]\,K_0[\rho_\varepsilon u]|^2\,du\right]^2dt\right\}\leqslant C\rho_\varepsilon^{2\beta}[\varepsilon/\Delta_\varepsilon]^2.$$

Отсюда и из (12), (13) получаем (14). Лемма доказана. Введем следующую функцию:

$$g_\varepsilon(t)=\begin{cases}\varphi_\varepsilon[h_\varepsilon+p_0'(j\Delta_\varepsilon')], & t\in[j\Delta_\varepsilon'-\Delta_\varepsilon/2,\ j\Delta_\varepsilon'+\Delta_\varepsilon/2],\\ \varphi_\varepsilon[\varphi_\varepsilon\Delta_\varepsilon n_\varepsilon^{-1}]^{1/(2\beta+1)} & \text{при остальных } t,\end{cases}$$

где целочисленная переменная j пробегает значения от 1 до $[\Delta_\varepsilon']^{-1}$. Положим далее

$$s_\varepsilon^*(t)=\int\limits_0 g_\varepsilon(t)\,K_{n_\varepsilon}^*[g_\varepsilon(t)(t-u)]\,\tilde S_\varepsilon(u)\,du.$$

Лемма 5. *Если* $\sup\limits_{S\in\Sigma}\int\limits_0^1[S^{(\beta)}(u)]^2\,du<\infty$ *и*

$$\lim_{\varepsilon\to0}\Delta_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to0}n_\varepsilon\varphi_\varepsilon^{-1}\Delta_\varepsilon^{-1}=\lim_{\varepsilon\to0}n_\varepsilon^{\beta+1/2}[\Delta_\varepsilon^{-2}\rho_\varepsilon^{4\beta+1}\varepsilon^4]^{1/(4\beta+2)}h_\varepsilon^{-1}=0,$$

то

$$(14)\qquad \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\sup_{S\in\Sigma}\mathbf{M}_S\int\limits_{\Delta_\varepsilon}^{1-\Delta_\varepsilon} b(t)\,[S_\varepsilon^*(t)-s_\varepsilon^*(t)]^2\,dt\varphi_\varepsilon^{2\beta}=0.$$

Доказательство. Оценим сначала следующую величину:

$$(15)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|^{2m}[xK(xt)-yK(yt)]^2\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|^{2m}\times$$

$$\times\Big[\int\limits_x^y[K(vt)+vtK^{(1)}(vt)]\,dv\Big]^2dt\leqslant|y-x|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|^{2m}\times$$

$$\times\int\limits_x^y[K(vt)+vtK^{(1)}(vt)]^2\,dv\,dt\leqslant$$

$$\leqslant|y-x|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|^{2m}[K(t)+tK^{(1)}(t)]^2\,dt\Big|\int\limits_x^y v^{-2m-1}\,dv\Big|.$$

Пусть теперь ядро $K(\cdot)$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(t)\,dt=1,\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^lK(t)\,dt=0,\qquad l=1\div\beta-1.$$

Используя неравенство (15) и неравенство Коши — Буняковского, находим

$$(16)\qquad |\widehat{K}(x^{-1}\omega)-\widehat{K}(y^{-1}\omega)|^2\,|2\pi\omega|^{-2\beta}=|2\pi\omega|^{-2\beta}\times$$

$$\times\Big[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i\omega t}(xK(xt)-yK(yt))\,dt\Big]^2=$$

$$=|2\pi\omega|^{-2\beta}\Big[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|t|^{\beta+1})^{-1}\Big(e^{2\pi i\omega t}-\sum_{j=0}^{\beta-1}(2\pi i\omega t)^j/j!\Big)\times$$

$$\times(1+|t|^{\beta+1})(xK(xt)-yK(yt))\,dt\Big]^2\leqslant|2\pi\omega|^{-2\beta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[1+|t|^{\beta+1}]^{-2}\times$$

$$\times\Big|e^{2\pi i\omega t}-\sum_{j=0}^{\beta-1}(2\pi i\omega t)/j!\Big|^2dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[1+|t|^{\beta+1}]^2\times$$

$$\times[xK(xt)-yK(yt)]^2\,dt\leqslant C\,|y-x|^2[\min(y,x)]^{-(2\beta+3)}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[1+|t|^{\beta+1}]^2[K(t)+tK^{(1)}(t)]^2\,dt.$$

Положим

$$D_\varepsilon(t,u)\overset{\Delta}{=}q_\varepsilon(t)\,K_{n_\varepsilon}^*[q_\varepsilon(t)(t-u)]-g_\varepsilon(t)\,K_{n_\varepsilon}^*[g_\varepsilon(t)(t-u)].$$

Обозначив через $S_0(t)$ продолжение функции $S(t)$ с отрезка $[0,1]$ на R^1 такое, что

$$\sum_{j=0}^{\beta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[S_0^{(j)}(t)]^2\,dt\leqslant C\,\|S\|_\beta^2,$$

имеем (см. (16))

$$(17)\qquad \mathbf{M}\int\limits_{\Delta_\varepsilon}^{1-\Delta_\varepsilon}\Big[\int\limits_0^1 D_\varepsilon(t,u)\int\limits_0^1\rho_\varepsilon K_0[\rho_\varepsilon(u-v)]\,S(v)\,dv\,du\Big]^2dt\varphi_\varepsilon^{2\beta}\leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{M}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{S}_0(\omega)|^2 |\hat{K}_0(\rho_\varepsilon^{-1}\omega)|^2 |\hat{K}^*_{n_\varepsilon}[q_\varepsilon^{-1}(t)\omega] - \hat{K}^*_{n_\varepsilon}[g_\varepsilon^{-1}(t)\omega]|^2 d\omega \leqslant$$

$$\leqslant C\mathbf{M}[p_\varepsilon(t) - p_0(t)]^2 n_\varepsilon^{2\beta+1} h_\varepsilon^{-(2\beta+3)} \leqslant C n_\varepsilon^{2\beta+1} h_\varepsilon^{-2\beta-3} [\Delta_\varepsilon^{-2}\rho_\varepsilon^{4\beta+1}\varepsilon^4]^{1/(4\beta+2)}.$$

Рассмотрим гауссовский случайный процесс

$$Z_\varepsilon(s) = \sqrt{\varphi_\varepsilon}\int_0^1 sK^*_{n_\varepsilon}[s(t-u)]\zeta_\varepsilon(u)\,du, \quad s \geqslant h_\varepsilon,$$

где

$$\zeta_\varepsilon(u) = \int_0^1 \rho_\varepsilon K_0[\rho_\varepsilon(u-v)]\,dw(v).$$

Используя неравенства (15), находим, что при $s_1, s_2 > h_\varepsilon$

$$\mathbf{M}[Z_\varepsilon(s_1) - Z_\varepsilon(s_2)]^2 \leqslant C|s_1 - s_2|^2 h_\varepsilon^{-1} n_\varepsilon^{2\beta+1}.$$

Поэтому, воспользовавшись результатами [4], имеем

$$\mathbf{M}\sup_{|s_1-s_2|<x}[Z_\varepsilon(h_\varepsilon + s_1) - Z_\varepsilon(h_\varepsilon + s_2)]^2 \leqslant Ch_\varepsilon^{-1} n_\varepsilon^{2\beta+1} x^2 \ln^4 x.$$

Следовательно, применяя лемму 4, приходим к оценке

$$\mathbf{M}\int_{\Delta_\varepsilon}^{1-\Delta_\varepsilon}\left[\int_0^1 D_\varepsilon(t,u)\int_0^1 \rho_\varepsilon K_0[\rho_\varepsilon(u-v)]\,dw(v)\,du\right]^2 dt\varphi_\varepsilon^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \max_j \mathbf{M}[Z_\varepsilon[p_0(j\Delta_\varepsilon') + h_\varepsilon] - Z_\varepsilon[p_\varepsilon(j\Delta_\varepsilon') + h_\varepsilon]]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \max_j\left\{-Ch_\varepsilon^{-1} n_\varepsilon^{2\beta+1}\int_0^\infty z^2 \ln^4 z\, d\mathbf{P}\{|p_0(j\Delta_\varepsilon') - p_\varepsilon(j\Delta_\varepsilon')| > z\}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant Ch_\varepsilon^{-1} n_\varepsilon^{2\beta+1}\max_j\int_0^\infty z[\ln^4 z + |\ln^3 z|]\,\mathbf{P}\{|p_0(j\Delta_\varepsilon') - p_\varepsilon(j\Delta_\varepsilon')| > z\}\,dz \leqslant$$

$$\leqslant Ch_\varepsilon^{-1} n_\varepsilon^{2\beta+1}\left\{\int_0^x z[\ln^4 z + |\ln^3 z|]\,dz + \int_x^\infty z^{-3}[\ln^4 z + |\ln^3 z|]\,dz \times\right.$$

$$\left.\times \max_j \mathbf{M}[p_0(j\Delta_\varepsilon') - p_\varepsilon(j\Delta_\varepsilon')]^4\right\} \leqslant Ch_\varepsilon^{-1} n_\varepsilon^{2\beta+1}\ln^4 x \times$$

$$\times [x^2 + x^{-2}(\Delta_\varepsilon^{-2}\rho_\varepsilon^{4\beta+1}\varepsilon^4)^{1/(2\beta+1)}].$$

Выбрав $x = [\Delta_\varepsilon^{-2}\rho_\varepsilon^{4\beta+1}\varepsilon^4]^{1/(8\beta+4)}$, получим, что правая часть этого неравенства не превосходит

$$Ch_\varepsilon^{-1} n_\varepsilon^{2\beta+1}[\Delta_\varepsilon^{-2}\rho_\varepsilon^{4\beta+1}\varepsilon^4]^{1/(4\beta+2)}\ln[\Delta_\varepsilon^{-2}\rho_\varepsilon^{4\beta+1}\varepsilon^4]^{-1}.$$

Отсюда и из (17) непосредственно получаем (14).

Доказательство теоремы 2. Заметим, что если $p(t)$ — полином степени $\beta-1$, то функционал $g_\varepsilon(t)$ не меняет своего значения для почти всех t при замене $S(\cdot)$ на $S(\cdot)+p(\cdot)$ и

$$S(t) + p(t) - \int_0^1 g_\varepsilon(t) K^*_{n_\varepsilon}[g_\varepsilon(t)(t-u)](S(u) + p(u))\,du =$$

$$= S(t) - \int_0^1 g_\varepsilon(t) K^*_{n_\varepsilon}[g_\varepsilon(t)(t-u)]\,S(u)\,du$$

для почти всех $t \in [\Delta_\varepsilon, 1-\Delta_\varepsilon]$. Поэтому при вычислении квадратичного

риска $s_\varepsilon^*(t)$ можно без ограничения общности считать, что параметрическое множество Σ ограничено в $L_2^\beta(0, 1)$.

Обозначим через $S_{j\gamma}(t)$ такое продолжение функции $S(t)$ с отрезка $[(j-{}^1/_2)\Delta_\varepsilon', (j+{}^1/_2)\Delta_\varepsilon']$ на R^1, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [S_{j\gamma}^{(\beta)}(t)]^2\,dt \leqslant \int\limits_{(j-{}^1/_2)\Delta_\varepsilon'}^{(j+{}^1/_2)\Delta_\varepsilon'} [S^{(\beta)}(t)]^2\,dt + \gamma\Delta_\varepsilon^{-1}.$$

Существование такого продолжения гарантируется леммой 2.

Воспользовавшись равенством Парсеваля, находим

$$\begin{aligned}
(18)\qquad & \mathbf{M}_S \int\limits_{j\Delta_\varepsilon'-\Delta_\varepsilon/2}^{j\Delta_\varepsilon'+\Delta_\varepsilon/2} [S(t) - s_\varepsilon^*(t)]^2\,dt\varphi_\varepsilon^{2\beta} \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{S}_{j\gamma}(\omega)|^2 \,|1 - \hat{K}_{n_\varepsilon}^* [g_\varepsilon^{-1}(j\Delta_\varepsilon')\omega] \\
& \times \hat{K}_0[\rho_\varepsilon^{-1}\omega]|^2\,d\omega\varphi_\varepsilon^{2\beta} + \Delta_\varepsilon\varphi_\varepsilon^{2\beta}\varepsilon^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{K}_{n_\varepsilon}^*[\omega g_\varepsilon^{-1}(j\Delta_\varepsilon')]|^2 \times \\
& \times |\hat{K}_0[\rho_\varepsilon^{-1}\omega]|^2\,d\omega \leqslant \int\limits_{-\sqrt{\rho_\varepsilon\varphi_\varepsilon}}^{\sqrt{\rho_\varepsilon\varphi_\varepsilon}} |\hat{S}_{j\gamma}(\omega)|^2 \,|2\pi\omega|^{2\beta}\,d\omega\,[p_0(j\Delta_\varepsilon')]^{-2\beta} \times \\
& \times \operatorname*{ess\,sup}_\omega |2\pi\omega|^{-2\beta} \,|1 - \hat{K}_{n_\varepsilon}^*(\omega)\hat{K}_0[\rho_\varepsilon^{-1}\varphi_\varepsilon p_0(j\Delta_\varepsilon')\omega]|^2 + \Delta_\varepsilon p_0(j\Delta_\varepsilon') \times \\
& \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{K}_{n_\varepsilon}^*(\omega)|^2 \,|\hat{K}_0[\rho_\varepsilon^{-1}\varphi_\varepsilon p_0(j\Delta_\varepsilon')\omega]|^2\,d\omega + C \int\limits_{\sqrt{\rho_\varepsilon\varphi_\varepsilon}}^{\infty} |\hat{S}_{j\gamma}(\omega)|^2\,d\omega \leqslant \\
& \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_\omega |2\pi\omega|^{-2\beta} \,|1 - \hat{K}_{n_\varepsilon}^*(\omega)|^2 \int\limits_{-\sqrt{\rho_\varepsilon\varphi_\varepsilon}}^{\sqrt{\rho_\varepsilon\varphi_\varepsilon}} |\hat{S}_{j\gamma}(p)|^2 \,|2\pi p|^{2\beta} \times \\
& \times dp\,(1 + o(1)) \Big[\frac{1}{\Delta_\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{S}_{j\gamma}(\lambda)|^2 \,|2\pi\lambda|^{2\beta} \,|\hat{K}_0(\rho_\varepsilon^{-1}\lambda)|^2\,d\lambda\Big]^{-2\beta/(2\beta+1)} + \\
& + C(\rho_\varepsilon^{-1}\varphi_\varepsilon)^\beta + \Delta_\varepsilon \Big\{\frac{1}{\Delta_\varepsilon} \int\limits_{j\Delta_\varepsilon'-\Delta_\varepsilon/2}^{j\Delta_\varepsilon'+\Delta_\varepsilon/2} [S^{(\beta)}(u)]^2\,du\Big\}^{1/(2\beta+1)} \times \\
& \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{K}_{n_\varepsilon}^*(\omega)|^2\,d\omega + o(\Delta_\varepsilon) \leqslant (1 + C\gamma)\,L(\hat{K}_{n_\varepsilon}^*(\omega)) \times \\
& \times \Delta_\varepsilon' \Big\{\frac{1}{\Delta_\varepsilon} \int\limits_{j\Delta_\varepsilon'+\Delta_\varepsilon/2}^{j\Delta_\varepsilon'+\Delta_\varepsilon/2} [S^{(\beta)}(u)]^2\,du\Big\}^{1/(2\beta+1)} + o(\Delta_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Заметим далее, что справедливо следующее неравенство

$$\begin{aligned}
& (A_\varepsilon = \bigcup_{j=2}^{N} [j\Delta_\varepsilon' - \Delta_\varepsilon/2,\ j\Delta_\varepsilon' + \Delta_\varepsilon/2], \quad N = [\Delta_\varepsilon']^{-1} - 2): \\
& \mathbf{M}_S \int\limits_{t\notin A_\varepsilon} [S(t) - s_\varepsilon^*(t)]^2\,dt\varphi_\varepsilon^{2\beta} \leqslant C \Big\{\operatorname*{ess\,sup}_\omega |2\pi\omega|^{-2\beta} \times \\
& \times |1 - \hat{K}_{n_\varepsilon}^*[(n_\varepsilon^{-1}\varphi_\varepsilon\Delta_\varepsilon')^{-1/(2\beta+1)}\omega]|^2 + \varepsilon^2\varphi_\varepsilon^{2\beta}(1 - \operatorname{mes} A_\varepsilon) \times \\
& \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{K}_{n_\varepsilon}^*[\omega\varphi_\varepsilon^{-1}(n_\varepsilon^{-1}\varphi_\varepsilon\Delta_\varepsilon')^{-1/(2\beta+1)}]|^2\,d\omega\Big\} = o(1), \quad \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Поэтому отсюда и из (18) находим

$$\mathbf{M}_S \int\limits_{\Delta_\varepsilon}^{1-\Delta_\varepsilon} b(t)[S(t)-s_\varepsilon^*(t)]^2\,dt\varphi_\varepsilon^{2\beta} \leqslant L(\widehat{K}_{n_\varepsilon}^*(\omega)) \times \tag{19}$$

$$\times \sum_{j=1}^{[\Delta_\varepsilon']^{-1}} b(j\Delta_\varepsilon')\Delta_\varepsilon' \left[\frac{1}{\Delta_\varepsilon'} \int\limits_{(j-1/2)\Delta_\varepsilon'}^{(j+1/2)\Delta_\varepsilon'} [S^{(\beta)}(u)]^2\,du\right]^{1/(2\beta+1)} + o(\Delta_\varepsilon').$$

Положим

$$\Sigma_\gamma = \bigcup_{S\in\Sigma} Q(S,\gamma), \quad Q(S,\gamma) = \{f:\ \Gamma_f^\beta \subset O_\gamma(\Gamma_S^\beta)\}.$$

Тогда ясно, что $\Sigma\subset\Sigma_\gamma$ и при $\Delta_\varepsilon'<\gamma$ найдется функция $f\subset\Sigma_\gamma$ такая, что

$$|f^{(\beta)}(u)|^2 = \frac{1}{\Delta_\varepsilon'} \int\limits_{(j-1/2)\Delta_\varepsilon'}^{(j+1/2)\Delta_\varepsilon'} |S^{(\beta)}(v)|^2\,dv, \quad u\in[(j-1/2)\Delta_\varepsilon',\ (j+1/2)\Delta_\varepsilon'].$$

Заметим далее, что для любой функции $f\in\Sigma_\gamma$ найдется функция $S_f\in\Sigma$ такая, что

$$\int\limits_a^b \{|f^{(\beta)}(u)|^{2/(2\beta+1)} - |S_f^{(\beta)}(u)|^{2/(2\beta+1)}\}\,du < c\gamma(b-a). \tag{20}$$

Действительно, пусть $\Gamma_f^\beta\in Q_\gamma(\Gamma_S^\beta)$. Тогда, интегрируя по частям, найдем

$$\left|\int\limits_a^b \{|f^{(\beta)}(u)|^{2/(2\beta+1)} - |S^{(\beta)}(u)|^{2/(2\beta+1)}\}\,du \leqslant \int\limits_0^\infty x^{-2\beta/(2\beta+1)} \times\right.$$

$$\times \left|\operatorname{mes}\left\{t\in[a,b]:\ \int\limits_a^t [f^{(\beta)}(u)]^2\,du > x\right\} -\right.$$

$$\left.\left. - \operatorname{mes}\left\{t\in[a,b]:\ \int\limits_a^t [S^{(\beta)}(u)]^2\,du >\right\}\right|\,dx < c\gamma(b-a).$$

Таким образом, из (19), (20) и леммы 1 находим

$$\int\limits_{\Delta_\varepsilon}^{1-\Delta_\varepsilon} b(t)[S(t)-s_\varepsilon^*(t)]^2\,dt\varphi_\varepsilon^{2\beta} \leqslant \sup_{f\in\Sigma_\gamma} c(\beta)\int\limits_0^1 b(t)\,|f^{(\beta)}(t)|^{2/(2\beta+1)}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{f\in\Sigma} c(\beta)\int\limits_0^1 b(t)\,|f^{(\beta)}(t)|^{2/(2\beta+1)}\,dt + C\gamma.$$

Отсюда, из леммы 5 и следующей оценки среднеквадратичного риска на краях отрезка [0, 1]

$$\mathbf{M}_S\left(\int\limits_0^{\Delta_\varepsilon} + \int\limits_{1-\Delta_\varepsilon}^1\right)[S(t)-S_\varepsilon^*(t)]^2\,dt\varphi_\varepsilon^{2\beta} \leqslant C\Delta_\varepsilon^{2\beta/(2\beta+1)}$$

непосредственно следует равенство (9). Теорема 2, а вместе с ней и теорема 1 доказаны (см. (10)).

В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим простой пример. Пусть Σ состоит из функций $S\in L_2^\beta(0,1)$, для которых выполнено неравенство

$$\int\limits_0^1 \alpha(t)[S^{(\beta)}(t)]^2\,dt + \sum_{j=0}^{\beta-1}\int\limits_0^1 [S^{(j)}(t)]^2\,dt < 1,$$

где $\alpha(t)$ — непрерывная на [0, 1] функция такая, что $\min\limits_t \alpha(t)>0$.

Проверка условий теоремы 1 здесь не вызывает затруднений. Поэтому в данном случае

$$r_b(\Sigma) = c(\beta) \sup_{S \in \Sigma} \int_0^1 b(t) \, | S^{(\beta)}(t) |^{2/(2\beta+1)} \, dt =$$

$$= c(\beta) \left\{ \int_0^1 [b(t)]^{(2\beta+1)/(2\beta)} \, [\alpha(t)]^{-1/(2\beta)} \, dt \right\}^{2\beta/(2\beta+1)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
2. *Пинскер М. С.* Оптимальная фильтрация квадратично-интегрируемых сигналов на фоне гауссовского шума // Пробл. передачи информ. 1980. Т. 16. № 2. С. 52—68.
3. *Голубев Г. К.* О минимаксной фильтрации функций в L_2 // Пробл. передачи информ. 1982. Т. 18. № 4. С. 67—75.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. М.: Наука, 1971. Т. 1.

Поступила в редакцию
10.XII.1984