



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. B. Nevzorov, M. Ranen, On record times in sequences of non-identically distributed discrete random variables, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1992, Volume 194, 124–133

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

January 16, 2025, 07:39:40



О РЕКОРДНЫХ МОМЕНТАХ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ
НЕОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Рассмотрим независимые случайные величины X_1, X_2, \dots с функциями распределения F_1, F_2, \dots соответственно и максимумы $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ($n=1, 2, \dots$). Введем также случайные величины ξ_1, ξ_2, \dots следующим образом: $\xi_1 = 1$ и $\xi_n = \mathbb{1}\{X_n > M_{n-1}\}$ ($n=2, 3, \dots$), т.е. ξ_n представляет собой индикатор события $A_n = \{X_n > M_{n-1}\}$. Как нетрудно убедиться, A_n эквивалентно событию, состоящему в том, что n является верхним рекордным моментом в последовательности X_1, X_2, \dots . Если через $N(n)$ обозначим число рекордов среди величин X_1, X_2, \dots, X_n , то справедливо равенство $N(n) = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Обзор результатов, связанных с рекордами, можно найти в работе [1].

В 1962 г. А.Реньи (см. [3]) доказал справедливость следующего факта.

ЛЕММА 1. Если $F_k = F$ ($k=1, 2, \dots$) и F - непрерывная функция распределения, то индикаторы ξ_1, ξ_2, \dots независимы и $P\{\xi_n = 1\} = 1/n$ ($n=1, 2, \dots$).

В.Б.Невзоров ([1, 2]) обобщил лемму 1, получив следующие два результата.

ЛЕММА 2. Если $F_k = F^{\alpha_k}$ ($k=1, 2, \dots$), где F - непрерывная функция распределения и $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ - произвольная последовательность положительных чисел, то случайные величины ξ_1, ξ_2, \dots независимы и $P\{\xi_n = 1\} = \alpha_n / (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$ ($n=1, 2, \dots$).

ЛЕММА 3. Если $F_k = F^{\alpha_k}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$), где F - непрерывная функция распределения и $\alpha_k > 0$ ($1 \leq k \leq n-1$), а F_n - произвольная непрерывная функция распределения, то индикаторы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы.

Выяснилось, что справедливо и следующее утверждение, обратное результату леммы 3, которое в несколько более слабом виде доказывается в работе [2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n - независимые случайные величины, F_1, F_2, \dots, F_{n-1} - непрерывные функции распределения и $0 < F_i(a) < F_i(b) < 1$ ($1 \leq i \leq n-1$) для некоторых a и b ($-\infty < a < b < \infty$). Если индикатор ξ_n и вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ независимы при любом выборе функции распределения F_n , то

существуют положительные константы $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ такие, что $\Gamma_k = F_1^{\alpha_k}$ ($2 \leq k \leq n-1$), и компоненты вектора ξ также независимы.

Теорема I и лемма 3, полученные в предположении непрерывности исходных случайных величин, характеризуют ситуацию, когда индикаторы ξ_1, ξ_2, \dots независимы. В данной работе мы будем исследовать условия независимости этих индикаторов в случае, когда величины X_1, X_2, \dots имеют дискретное распределение.

2. Пусть теперь X_1, X_2, \dots — независимые дискретные случайные величины. Будем считать, не умаляя общности, что они принимают целые значения и $P_{k,\nu} = P\{X_k = \nu\}$ ($k=1, 2, \dots$; $\nu=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Через ν_k и τ_k ($k=1, 2, \dots$) обозначим соответственно нижние и верхние точки роста исходных случайных величин:

$$\nu_k = \inf \{ m : P_{k,m} > 0 \} \geq -\infty,$$

$$\tau_k = \sup \{ m : P_{k,m} > 0 \} \leq \infty \quad (k=1, 2, \dots).$$

Нам потребуются также левосторонние интенсивности отказа

$$R_k(s) = P\{X_k = s\} / P\{X_k \leq s\} \quad (k=1, 2, \dots).$$

Выясняется, что независимость вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ и индикатора ξ_n при произвольном выборе случайной величины X_n возможна лишь при следующих соотношениях между характеристиками ν_k и τ_k :

$$-\infty = \nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_{n-1} < \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{n-1} = \tau \leq \infty \quad (I)$$

или

$$-\infty \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{n-1} \leq \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{n-1} = \tau \leq \infty \quad (2)$$

(в предположении, что ξ имеет невырожденное распределение).

Сформулируем ряд теорем, доказательства которых будут приведены ниже.

ТЕОРЕМА 2. Пусть целочисленные случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ независимы, а величины X_1, \dots, X_{n-1} к тому же имеют невырожденное распределение и удовлетворяют условию (I). Для того, чтобы вектор ξ и индикатор ξ_n были независимыми при произвольном выборе распределения случайной величины X_n , необходимо и достаточно, чтобы для любых целых $s \leq \tau$ выполнялись равенства

$$R_k(s) = \beta_k P\{M_{k-1} = s\} / P\{M_{k-1} < s\} \quad (2 \leq k \leq n-1), \quad (3)$$

где $\beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ - положительные константы.

ПРИМЕР 1. Условием теоремы 2 удовлетворяет, в частности, последовательность независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_{n-1} таких, что

$$P\{X_k = -m\} = (1 - p_k) p_k^m \quad (m=0, 1, \dots; k=1, \dots, n-1).$$

В этом случае $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_{n-1} = -\infty$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{n-1} = 0$ и соотношение (3) выполняется с $\beta_k = (1 - p_k) p_1 \dots p_{k-1} / (1 - p_1 \dots p_{k-1})$ ($k=2, 3, \dots, n-1$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вероятности $c_k = P\{\xi_k = 1\}$ можно выразить через коэффициенты β_k следующим образом:

$$c_k = \beta_k / (1 + \beta_k).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из условия (1) следует, что

$$0 < P\{\xi_k = 1\} = P\{X_k > M_{k-1}\} < 1 \quad (2 \leq k \leq n-1).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Соотношение (3), связывающее распределения случайных величин X_k и M_{k-1} , можно переписать в виде

$$R_k(s) = \gamma_k \dots \gamma_{l+1} R_l(s) / (1 - (1 + \gamma_{l+1} + \gamma_{l+1} \gamma_{l+2} + \dots + \gamma_{l+1} \dots \gamma_{k-1}) R_l(s)) \quad (4)$$

($1 \leq l < k \leq n-1$)

и, в частности,

$$R_k(s) = \gamma_k R_{k-1}(s) / (1 - R_{k-1}(s)) \quad (k=2, 3, \dots) \quad (5)$$

и

$$R_k(s) = \gamma_k \dots \gamma_2 R_1(s) / (1 - (1 + \gamma_2 + \gamma_2 \gamma_3 + \dots + \gamma_2 \dots \gamma_{k-1}) R_1(s)) \quad (6)$$

($k=2, 3, \dots$),

где $\gamma_2 = \beta_2$ и $\gamma_k = \beta_k (1 + \beta_{k-1}) / \beta_{k-1}$ ($k=3, 4, \dots$).

Следующая теорема формулируется для одинаково распределенных случайных величин.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X_1, X_2, \dots, X_{n-1} - независимые целочисленные случайные величины, имеющие одинаковое невырожденное распределение. Для того, чтобы при любом выборе X_n вектор ξ и случайная величина ξ_n были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы $\nu_1 = -\infty$, $\gamma_1 < \infty$ и $P\{X_1 = \nu_1 - m_k\} = (1-p) p^k$

$k=0, 1, \dots$), где $0 < p < 1$ и $0 = m_0 < m_1 < \dots$ - произвольная последовательность целых чисел.

Теорему 2 дополняет следующий полезный результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть независимые случайные величины X_1, X_2, \dots, X_{n-1} удовлетворяют условиям (I) и (3). Тогда компоненты вектора ξ являются независимыми.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В примере I и теореме 3 мы имеем дело с геометрически распределенными случайными величинами. Отметим также, что если случайные величины X_1, X_2, \dots, X_{n-1} удовлетворяют условиям (I) и (3) и хотя бы одна из них имеет геометрическое распределение на множестве целых чисел $M = \{m_0, m_1, \dots\}$, где $m_0 > m_1 > \dots$, то и остальные из X -ов также геометрически распределены на множестве M (возможно, с другими параметрами). Действительно, если, скажем, случайная величина X_k имеет геометрическое распределение на множестве M , то функция $R_k(s)$ равна некоторой положительной константе, зависящей от параметра геометрического распределения, для всех $s \in M$ и равна нулю в остальных точках. Из равенства (6) вытекает тогда, что и $R_1(s)$, а следовательно, и остальные левосторонние интенсивности отказа $R_2(s), R_3(s), \dots, R_{n-1}(s)$ обладают тем же свойством, характеризующим геометрическое распределение на множестве M .

3. В теоремах 2 и 4 мы требовали выполнения условия (I). Справедливы и аналогичные теоремы 2' и 4', которые отличаются соответственно от теорем 2 и 4 лишь тем, что условие (I) заменяется условием (2) и требуется, чтобы соотношение (3), связывающее распределения случайных величин X_k и M_{k-1} , выполнялось не для всех $s \leq v$, а только для $s \in [v_k, v_k]$.

Приведем два примера последовательностей X_1, X_2, \dots , удовлетворяющих условиям теорем 2' и 4'.

ПРИМЕР 2. Пусть Y_1, Y_2, \dots - независимые случайные величины, имеющие одинаковое геометрическое распределение с параметром p ($0 < p < 1$) на множестве $\{0, 1, 2, \dots\}$, а $X_k = Y_k + k - 1$ ($k=1, 2, \dots$). Для такой последовательности случайных величин X_1, X_2, \dots $v_k = k - 1, v_k = \infty$ и справедливы при $k=2, 3, \dots$ равенства

$$R_k(s) = \frac{1}{p} \cdot \frac{P\{X_{k-1} = s\}}{P\{X_{k-1} < s\}} = \frac{1}{p} \cdot \frac{R_{k-1}(s)}{1 - R_{k-1}(s)} \quad (s \geq k-1),$$

т.е. соотношение (5) выполняется с $\beta_k = 1/p$. В этом случае $\beta_k = (1-p)/p(1-p^{k-1})$, $c_k = P\{\xi_k = 1\} = (1-p)/(1-p^k)$

и

$$EN(n) = (1-p) \sum_{k=1}^n (1/(1-p^k)) .$$

ПРИМЕР 3. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n - независимые случайные величины, причём X_k имеет равномерное распределение на множестве $\{k, k+1, \dots, n\}$ ($1 \leq k \leq n$). Эта последовательность также удовлетворяет условию (5) с $\gamma_k = 1$. Следовательно, $\beta_k = \frac{1}{k-1}$ и $C_k = \frac{1}{k}$.

4. Интересно сравнить распределения из теорем 1 и 2. Функции распределения F_k из теоремы 1 связаны соотношением $F_k(x) = (F_1(x))^{\alpha_k}$, где $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ - некоторые положительные константы. Если дополнительно предположить, что существуют плотности распределения f_1, \dots, f_{n-1} и ввести функции $S_k(x) = f_k(x)/F_k(x)$, то они будут связаны соотношением

$$S_k(x) = \alpha_k S_1(x) \quad (2 \leq k \leq n-1).$$

Отношение $f_k(x)/(1-F_k(x))$ называют обычно интенсивностью отказа случайной величины X_k . Функцию $S_k(x)$ можно по аналогии назвать левосторонней интенсивностью отказа. Таким образом, в теореме 1 появляются распределения с пропорциональными интенсивностями отказа. Функции $R_k(s)$ из теоремы 2 также являются левосторонними интенсивностями отказа, но только для дискретных распределений.

Мы уже отмечали, что случайная величина ξ_n является индикатором события $A_n = \{X_n > M_{n-1}\}$ или индикатором события, состоящего в том, что X_n является верхней рекордной величиной. Традиционно в теории рекордов рассматриваются, как правило, верхние рекорды. Если же мы введем минимумы $m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ и рассмотрим события $\{X_n < m_{n-1}\}$, эквивалентные появлению на n -ом месте в последовательности X_1, X_2, \dots нижнего рекордного значения и индикаторы $\eta_n = \mathbb{1}\{X_n < m_{n-1}\}$, то теоремы 1 - 4 можно переформулировать соответствующим образом. В этом случае вместо последовательности функций распределения $F_k(x) = (F(x))^{\alpha_k}$ в теореме 1 будем иметь дело с функциями распределения вида $\bar{F}_k(x) = 1 - (1 - F(x))^{\alpha_k}$, а в теоремах 2 и 4 вместо левосторонних интенсивностей отказа $R_k(s)$ появятся обычные интенсивности отказа $P\{X_k = s\}/P\{X_k \geq s\}$. Геометрические же распределения из теоремы 3, примеров 1 и 2 будут сосредоточены на множествах целых чисел, ограниченных слева, а не справа.

5. Докажем теорему 2. Начнем с проверки необходимости усло-

вия (3).

Независимость индикаторов ξ_k и ξ_n , где $2 \leq k \leq n-1$, приводит к соотношению

$$\begin{aligned} P\{\xi_k=1, \xi_n=1\} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{n,m} F_{n-1}(m) \dots F_{k+1}(m) \sum_{t=-\infty}^{m-1} P_{k,t} F_1(t) \dots F_{k-1}(t) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{n,m} F_1(m) \dots F_{n-1}(m) \sum_{t=-\infty}^{\infty} P_{k,t} F_1(t) \dots F_{k-1}(t) = \\ &= P\{\xi_n=1\} P\{\xi_k=1\}. \end{aligned}$$

Обозначим $c_k = P\{\xi_k=1\} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} P_{k,t} F_1(t) \dots F_{k-1}(t)$. Вспомнив,

что (7) должно быть справедливым при любом выборе распределения случайной величины X_n и, в частности, для вырожденного в произвольной целой точке s распределения, приходим к равенству

$$F_{n-1}(s) \dots F_{k+1}(s) \sum_{t=-\infty}^{s-1} P_{k,t} F_1(t) \dots F_{k-1}(t) = c_k F_1(s) \dots F_{n-1}(s). \quad (8)$$

Поскольку справедливо условие (I), нетрудно убедиться, что неравенства

$$0 < P\{\xi_n=1\} = P\{M_{n-1} < s\} = F_1(s) F_2(s) \dots F_{n-1}(s) < 1$$

имеют место для любого $s \leq \nu$. Тогда из (8) следует соотношение

$$\sum_{t=-\infty}^{s-1} P_{k,t} F_1(t) \dots F_{k-1}(t) = c_k F_1(s) \dots F_k(s), \quad (9)$$

справедливое при $s \leq \nu$.

Из равенств (9), взятых при s и $s+1$ вытекает, что

$$P\{X_k=s\} P\{M_{k-1} < s\} = c_k (P\{M_{k-1} \leq s\} P\{X_k \leq s\} - P\{M_{k-1} < s\} P\{X_k < s\}) \quad (10)$$

и

$$(1 - c_k) P\{X_k=s\} P\{M_{k-1} < s\} = c_k P\{X_k \leq s\} P\{M_{k-1}=s\}. \quad (11)$$

Таким образом, для всех точек s таких, что $P\{X_k=s\} > 0$, справедливо соотношение

$$P\{X_k=s\} / P\{X_k \leq s\} = \beta_k P\{M_{k-1}=s\} / P\{M_{k-1} < s\}, \quad (12)$$

где $\beta_k = c_k / (1 - c_k) = P\{\xi_k = 1\} / P\{\xi_k = 0\}$. Из (II) следует также, что если $P\{M_{k-1} = S\} = 0$ и $P\{M_{k-1} < S\} > 0$, то $P\{X_k = S\} = 0$.

Аналогичным образом можно получить равенство (3), если (I) заменить условием (2).

Докажем теперь, что условие (3) является достаточным для независимости вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ и индикатора ξ_n . Одновременно будет приведено доказательство утверждения теоремы 4.

Итак, пусть выполняются условия (I) и (3). Проверим, что при произвольном выборе функции распределения F_n и любом наборе целых чисел K_1, \dots, K_j ($1 \leq K_1 < K_2 < \dots < K_j \leq n$, $j = 2, \dots, n$) выполняется равенство

$$P\{\xi_{K_1} = 1, \dots, \xi_{K_j} = 1\} = \prod_{m=1}^j P\{\xi_{K_m} = 1\}. \quad (I3)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} P\{\xi_{K_1} = 1, \dots, \xi_{K_j} = 1\} &= P\{M_{K_1-1} < X_{K_1}, \dots, M_{K_j-1} < X_{K_j}\} = \\ &= \sum_{t_j = -\infty}^{\infty} P\{X_{K_j} = t_j\} P\{X_{K_{j-1}} < t_j\} \dots P\{X_{K_{j-1}+1} < t_j\} \cdot \\ &\cdot \sum_{t_{j-1} = -\infty}^{t_j-1} P\{X_{K_{j-1}} = t_{j-1}\} P\{X_{K_{j-1}-1} < t_{j-1}\} \dots P\{X_{K_{j-2}+1} < t_{j-1}\} \dots \cdot \\ &\cdot \sum_{t_1 = -\infty}^{t_2-1} P\{X_{K_1} = t_1\} P\{M_{K_1-1} < t_1\}. \end{aligned} \quad (I4)$$

Из равенства (9) следует, что последняя сумма в правой части (I4) равна $c_{K_1} P\{M_{K_1} < t_2\}$ и тогда

$$\begin{aligned} P\{M_{K_1-1} < X_{K_1}, \dots, M_{K_2-1} < X_{K_2}\} &= c_{K_1} \sum_{t_2 = -\infty}^{\infty} P\{X_{K_2} = t_2\} \cdot \\ \cdot P\{X_{K_2-1} < t_2\} \dots P\{X_{K_2-1} < t_2\} \dots &\sum_{t_2 = -\infty}^{t_2-1} P\{X_{K_2} = t_2\} P\{M_{K_2-1} < t_2\}. \end{aligned} \quad (I5)$$

Последовательно осуществляя переход от (I4) к (I5), получаем, что

$$P\{\xi_{K_1} = 1, \dots, \xi_{K_j} = 1\} = c_{K_1} \dots c_{K_j} = \prod_{m=1}^j P\{\xi_{K_m} = 1\}.$$

Таким образом, мы завершили доказательство теоремы 2 и заодно доказали теорему 4.

6. Возникает вопрос, насколько существенны условия (1) и (2). В приведенном доказательстве мы использовали неравенства

$0 < c_k = P\{X_k > M_{k-1}\} < 1$ ($2 \leq k \leq n-1$) и $0 < P\{M_{n-1} < s\} < 1$ ($-\infty < s < \gamma$), вытекающие из условия (1). Аналогичные соотношения, использующие условие (2), требуются при выводе утверждений теорем 2' и 4'. Заметим, что если при некотором k ($2 \leq k \leq n-1$) индикатор ξ_k имеет вырожденное распределение, т.е. вероятность $P\{X_k > M_{k-1}\}$ равна нулю или единице, то условие (3) уже не обязано выполняться, хотя ξ_k и ξ_n будут независимыми при любом выборе X_k .

7. При доказательстве теорем 2 и 4 мы пользовались условием (3), но более удобным это условие становится, если его записать в виде (4), (5) или (6). Покажем, как, например, перейти от (3) к (6).

Фиксируем s и обозначим $T_k = P\{X_k \leq s\} / P\{X_k < s\}$, а вместо $R_k(s)$ будем для простоты писать R_k . Справедливы равенства

$$R_k = 1 - 1/T_k$$

и

$$\frac{P\{M_{k-1} = s\}}{P\{M_{k-1} < s\}} = \frac{P\{M_{k-1} \leq s\}}{P\{M_{k-1} < s\}} - 1 = T_1 T_2 \dots T_{k-1} - 1 \quad (k=2, 3, \dots).$$

Соотношение (3) перепишется в виде

$$1 - \frac{1}{T_k} = \beta_k (T_1 T_2 \dots T_{k-1} - 1). \quad (16)$$

Из (16) получаем, что

$$\frac{(1 + \beta_k)}{T_1 \dots T_{k-1}} - \beta_k = \frac{1}{T_1 \dots T_k}.$$

Вводя новые величины $Z_k = 1/T_1 T_2 \dots T_k$, приходим к простым рекуррентным соотношениям

$$Z_k = (1 + \beta_k) Z_{k-1} - \beta_k \quad (k=2, 3, \dots),$$

позволяющим выразить Z_k через Z_1 , а затем и получить равенства (4) - (6).

8. Покажем справедливость теоремы 3. Докажем вначале, что

$l_1 = -\infty$. Действительно, пусть $l_1 > -\infty$. Это означает, что $P\{X_1 = l_1\} > 0$ и $P\{X_1 < l_1\} = 0$. Поскольку X_1 имеет невырожденное распределение, существует такое $d > l_1$, что $P\{X_1 = l_1 + 1\} = P\{X_1 = l_1 + 2\} = \dots = P\{X_1 = d - 1\} = 0$ и $P\{X_1 = d\} > 0$. В качестве X_n возьмем вырожденную в точке d случайную величину. Тогда

$$P\{\xi_n = 1\} = P\{X_1 < d, \dots, X_{n-1} < d\} = (P\{X_1 = l_1\})^{n-1} > 0,$$

$$P\{\xi_2 = 1\} = P\{X_2 > X_1\} \geq P\{X_2 = d, X_1 = l_1\} = P\{X_1 = d\}P\{X_1 = l_1\} > 0,$$

но

$$P\{\xi_2 = 1, \xi_n = 1\} \leq P\{X_1 < X_2 < d\} = 0.$$

Получаем, что индикаторы ξ_2 и ξ_n при таком выборе распределения X_n зависимы. Следовательно, $l_1 = -\infty$.

Можем считать, не умаляя общности, что $P\{X_1 = s\} > 0$ для любого целого $s \leq r$. Поскольку $R_k(s) = R_{k-1}(s)$, из (5) получаем, что

$$R_k(s) = \gamma_k R_k(s) / (1 - R_k(s))$$

и

$$R_k(s) = 1 - \gamma_k \quad (k = 2, 3, \dots), \quad (17)$$

где $\gamma_k > 0$.

Из (17) и одинаковой распределенности исходных случайных величин следует, что $\gamma_k = \gamma$ не зависит от k , а $R_1(s) = 1 - \gamma$ не зависит от s . Тогда

$$P\{X_1 = s\} = (1 - \gamma)P\{X_1 \leq s\} = (1 - \gamma)P\{X_1 < s\} + (1 - \gamma)P\{X_1 = s\}$$

и

$$P\{X_1 = s\} = \frac{1 - \gamma}{\gamma} P\{X_1 < s\} = \frac{1}{\gamma} P\{X_1 = s - 1\}.$$

Из последнего равенства, выбрав произвольное целое $d < r$, приходим к соотношениям

$$P\{X_1 = d - s\} = \gamma^s P\{X_1 = d\} \quad (s = 0, 1, \dots) \quad (18)$$

и

$$P\{X_1 = d + t\} = \gamma^{-t} P\{X_1 = d\} \quad (1 \leq t \leq r - d). \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует, что

$$1 = \sum_{s=-\infty}^{\nu} P\{\chi_1 = s\} = P\{\chi_1 = d\} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \gamma^s + \sum_{t=1}^{\nu-d} \gamma^{-t} \right).$$

Видим теперь, что $\gamma < 1$ и $\nu < \infty$. Таким образом, мы пришли к геометрическому распределению, сосредоточенному на множестве $\{\nu, \nu-1, \dots\}$, где ν - некоторое целое число. Если отказаться от допущения, что $P\{\chi_1 = s\} > 0$ для любого $s \leq \nu$, то получаем более широкий класс геометрических распределений, носители которых ограничены справа. Теорема 3 доказана в части необходимости. Достаточность утверждения теоремы 3 следует из теоремы 2.

Литература

1. Невзоров В.Б. Рекорды. - Теория вероятн. и ее примен. 1987, т.32, № 2, с.219-251.
2. Nevzorov V.B. Two characterizations using records. - Lect.Notes Math., 1986, v.1233, p.79-85.
3. Renyi A. On the extreme elements of observations. - In: Selected Papers of Alfred Renyi. v.3, Budapest: Akademiai Kiado, 1976, p.50-65.