М. М. Шумафов, Об асимптотической устойчивости динамической системы с регулятором Уатта, *Дифференц. уравнения*, 2003, том 39, номер 1, 57–62

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 1, с. 57–62

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РЕГУЛЯТОРОМ УАТТА

© 2003 г. М. М. Шумафов

1. Введение. Настоящая работа является продолжением статьи [1] и обобщает ее результаты. В работе [2, с. 39] поставлена задача о проведении нелокального анализа переходного процесса для нелинейной системы дифференциальных уравнений

$$J\dot{\omega} = F(x), \quad m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \gamma x = \beta m(r + x)\omega^2, \tag{1}$$

где α, β, γ, J, m, r – некоторые положительные числа, $F \in \mathbb{C}^1(-\infty, +\infty)$, описывающей при некоторой идеализации работу динамической системы машина–регулятор (модифицированный) Уатта. Здесь α – коэффициент вязкого трения; β – коэффициент, характеризующий центробежную силу; γ – коэффициент упругости пружины; J – момент инерции вращающегося твердого тела; m – масса грузов, насаженных на стержень и скользящих вдоль него; r – длина пружины в ненапряженном состоянии; $F(x)$ – силовой момент; $\omega(t)$ – угловая скорость (в момент t) вращения вала; $x(t)$ – отклонение массы m (в момент t) от ненапряженного состояния пружины.

Решению задачи: перевести при включении систему машина–регулятор Уатта, описываемую уравнениями (1), из неподвижного состояния ($\omega(t) \equiv 0$, $x(t) \equiv 0$, $\dot{x}(t) \equiv 0$) в стационарное рабочее состояние ($\omega(t) \equiv \omega_0$, $x(t) \equiv x_0$, $\dot{x}(t) \equiv 0$), была посвящена работа [1].

В настоящей работе исследуются случаи (обобщенные уравнения движения системы машина–регулятор Уатта), когда в системе (1): 1) коэффициент трения α и восстанавливающая сила γx (консервативная сила) являются нелинейными функциями от x; 2) коэффициент трения α подвержен воздействию случайного процесса типа "белого" шума. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия рассматриваемой обобщенной системы, а также оценка снизу области притяжения состояния равновесия. Исследования проводятся модифицированным методом функций Ляпунова.

Следует отметить, что система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(y), \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -az - g(x)y - h(x) \tag{2}$$

($g(x) = b - \beta x^2$, $h(x) = kx^2 - c$, a, b, k, c – константы), к которой сводится система (1), была объектом изучения с точки зрения устойчивости многих авторов [3–12] в разные годы. В случае, когда $f(y) \equiv y$, система вида (2) (и более общего характера) рассматривалась в работах [3–8]. Системы третьего порядка, первое уравнение которых содержит "чужую" нелинейность $f(y)$, а остальные уравнения линейные с постоянными коэффициентами, изучались в работах [9–12].

Во всех перечисленных работах на нелинейные функции $f(y)$, $g(x)$, $h(x)$ в системе (2) накладывалось, в частности, условие "секториального" типа – график той или иной нелинейной функции лежит в секторе, содержащемся в первой и второй координатных четвертях, и эти функции подчинялись также обобщенным (в какой-либо форме) условиям Рауза–Гурвица. Наши же нелинейности (квадратичного типа) $g(x)$ и $h(x)$ таковы, что они не удовлетворяют указанным выше условиям. И поэтому для исследования как системы (2), так и для ее обобщений (которые мы рассматриваем в настоящей работе) требуется специальный прием, который проводится ниже.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$J\dot{\omega} = F(x), \quad m\ddot{x} + \alpha(x)\dot{x} + \gamma(x) = \beta m(r + x)\omega^2, \tag{3}$$

где β, J, m, r – некоторые положительные числа, а функции $F(x)$, $\alpha(x)$ и $\gamma(x)$ класса $\mathbb{C}^1$ в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Предположим, что существует такое $x_0 > 0$, что $F(x_0) = 0$, $F_0 = F'(x_0) \neq 0$ и $F(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$. Тогда, очевидно, система (3) имеет в области $\{\omega \geq 0\}$ единственное стационарное решение $\omega(t) \equiv \omega_0$, $x(t) \equiv x_0$, где

$$\omega_0^2 = \gamma(x_0)/(\beta m(r + x_0)). \tag{4}$$

Как уже указывалось, система (3) описывает работу динамической системы машина–регулятор Уатта. Так, в (4) ω_0 – требуемая частота вращения вала (в случае турбогенератора), а x_0 – соответствующее ей отклонение массы m от ненапряженного состояния пружины.

Цель работы – провести нелокальный анализ переходного режима при включении системы машина–регулятор Уатта, описываемой уравнениями движения (3), из неподвижного состояния ($\omega(t) \equiv 0$, $x(t) \equiv 0$, $\dot{x}(t) \equiv 0$) в стационарное рабочее состояние ($\omega(t) \equiv \omega_0$, $x(t) \equiv x_0$, $\dot{x}(t) \equiv 0$) – стационарный режим.

Вводя обозначения:

$$y = \frac{F_0}{J}(x - x_0), \quad \dot{y} = z, \quad f(y) = \frac{1}{J}F\left(x_0 + \frac{J}{F_0}y\right), \quad \varphi(y) = \frac{1}{m}\alpha\left(x_0 + \frac{J}{F_0}y\right),$$

$$\psi(y) = \frac{F_0}{mJ}\gamma\left(x_0 + \frac{J}{F_0}y\right), \quad k = \frac{-F_0}{J}\beta(r + x_0),$$

приведем систему (3) к виду

$$\dot{\omega} = f(y), \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -\varphi(y)z - \psi(y) + \beta y\omega^2 - k\omega^2, \tag{5}$$

где $f, \varphi, \psi \in \mathbb{C}^1$, $f(0) = 0$.

С учетом физического смысла переменной ω систему (5) будем рассматривать в полупространстве $\{\omega \geq 0,\ y, z \in \mathbb{R}\}$. Неподвижному состоянию физической системы машина–регулятор Уатта в фазовом пространстве переменных ω, y, z соответствуют точки $\{\omega = 0$, $y = (-F_0/J)x_0$, $z = 0\}$, а стационарному режиму – (единственная в области $\omega \geq 0$) особая точка ($\omega = \omega_0$, $y = 0$, $z = 0$) системы (5), где ω_0 определяется из формулы (4).

3. Формулировка основных результатов.

3.1. Случай $\alpha = \alpha(x)$, $\gamma = \gamma(x)$. Введем в рассмотрение функцию ляпуновского типа $V = V(\omega, y, z)$, определяемую равенством

$$2V = (z + \delta y)^2 + \frac{2}{3}\delta\omega(k\omega^2 - 3c) + 2ky\omega^2 - \beta\omega^2 y^2 + 2\int\limits_0^y \psi(\xi)\,d\xi + 2\delta\int\limits_0^y [\varphi(\xi) - \delta]\xi\,d\xi, \tag{6}$$

в котором δ – некоторое положительное число, $c = -\psi(0)$, и множество $K = \{(\omega, y, z) : V(\omega, y, z) \leq 0,\ 0 \leq \omega < \bar{\omega}\}$, где $\bar{\omega} = \sqrt{3}\omega_0$.

Теорема 1. *Пусть в системе (5)* $f, \varphi, \psi \in \mathbb{C}^1$, $c = -\psi(0) > 0$ *и выполнены условия:*

1) $F_0 < 0$, $2x_0 < r$;

2) найдется такое положительное число μ, *что* $0 \leq y(f(y)/y - 1) \leq \mu y^2$ *для всех* $y \in [y_1, y_2]$, *где* $y_1 = 4F_0x_0(r + x_0)/(J(r - 2x_0))$, $y_2 = 2(-F_0)x_0/J$, *причем* $\mu|y_1| < 1$;

3) существуют числа $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ *такие, что* $\delta \leq \varphi(y) \leq \delta_1$ *для всех* $y \in [y_1, y_2]$;

4) существуют положительные числа b_1 *и* b_2 *такие, что* $b_1 \leq (\psi(y) - \psi(0))/y \leq b_2$ *для всех* $y \in [y_1, y_2]$ $(y \neq 0)$;

5) $R \equiv J[Jmb_1\delta(r - 2x_0)^2 + \sqrt{3}F_0f_0r(r + x_0)]/\{2(-F_0)x_0(r - 2x_0)[Jmb_1\delta(r + x_0) - \sqrt{3}F_0f_0r]\} > \mu$, *где* $f_0 = 2\beta m\omega_0(r + x_0)$.

Тогда все траектории системы (5), начинающиеся в области K, *остаются в ней и положение равновесия* $(\omega_0, 0, 0)$ *системы (5) асимптотически устойчиво с областью притяжения* K.

Замечание 1. В случае, когда $f(y)$ – линейная функция: $f(y) \equiv y$, условие 2) теоремы 1 отсутствует, а условие 5) принимает вид

$$J\delta b_1(r - 2x_0)^2/[(-F_0)f_0' r(r + x_0)] > \sqrt{3}, \tag{7}$$

где $f_0' = 2\beta\omega_0(r + x_0)$.

Замечание 2. В том частном случае, когда $\varphi(y) \equiv a$, $\psi(y) \equiv by - c$ (a, b, c – константы), условия теоремы 1 переходят в условия теоремы 1 из работы [1].

Замечание 3. Сравним условия 1) и 5) теоремы 1 при $f(y) \equiv y$, $\varphi(y) \equiv a$ $(\alpha(x) \equiv \alpha$, a, α – константы, $a = \alpha/m$), $\psi(y) \equiv by - c$ $(\gamma(x) = \gamma x$, $b = \gamma/m$, $c = -F_0\gamma x_0/(mJ)$, γ – константа) с необходимыми и достаточными условиями Рауза–Гурвица

$$F_0 < 0, \quad J\alpha(\gamma - \beta m\omega_0^2) > -F_0 f_0 m \tag{8}$$

асимптотической устойчивости в целом линеаризованной в окрестности состояния равновесия ($\omega = \omega_0$, $y = 0$, $z = 0$) системы (5). Для этого перепишем неравенства (7) (где в рассматриваемом случае δ, b_1 и f_0' заменены на a, b и f_0 соответственно) и (8) в виде

$$\frac{J\alpha\gamma}{-F_0 f_0 m}\,\frac{r - 2x_0}{r + x_0} > \sqrt{3}\frac{r}{r - 2x_0} \quad (2x_0 < r), \qquad \frac{J\alpha\gamma}{-F_0 f_0 m}\,\frac{r}{r + x_0} > 1.$$

Отсюда видно, что условие (7) является несколько более стеснительным (что вполне естественно, поскольку оно относится к нелинейной системе), чем (8). Заметим также, что вместо условия $\gamma - \beta m\omega_0^2 > 0$ (которое следует из (8)) в теореме 1 требуется несколько более сильное условие $2x_0 < r$ (которое равносильно неравенству $\gamma - 3\beta m\omega_0^2 > 0$).

Замечание 4. Условие 2) теоремы 1 представляет собой условие "секториального" типа: график функции $w = f(y)/y$, соответствующий отрезку $[y_1, y_2]$, должен лежать в секторе $\{(y, w) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le (w - 1)/y \le \mu\}$.

Непосредственным следствием теоремы 1 является

Теорема 2 (о переходном режиме). *Пусть в системе (3) функция* $F \in \mathbb{C}^1(-\infty, +\infty)$, *причем* $F(x_0) = 0$, $F_0 := F'(x_0) < 0$, $F(x) \ne 0$ *при* $x \ne x_0$ *для некоторого* $x_0 > 0$, *такого, что* $2x_0 < r$, *и пусть выполнены следующие условия:*

1) для некоторого положительного числа $k > 0$ *справедливо* $0 \le (1 - F(x)/(F_0(x - x_0)))(x - x_0) \le k(x - x_0)^2$ *для всех* $x \in [x_1, x_2]$, $x \ne x_0$, *где* $x_1 = -x_0$, $x_2 = x_0(5r + 2x_0)/(r - 2x_0)$ *и* $2k(r + x_0) < r/(2x_0) - 1$;

2) существуют положительные числа $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ *такие, что* $m\delta \le \alpha(x) \le m\delta_1$ *для всех* $x \in [x_1, x_2]$;

3) существуют положительные числа $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ *такие, что* $mb_1 \le (\gamma(x) - \gamma(x_0))/(x - x_0) \le mb_2$ *для всех* $x \in [x_1, x_2]$ $(x \ne x_0)$;

4) $(-F_0/J)R > k$;

5) $\delta\delta_1 < 2\gamma(x_0)/(mx_0) - b_2$.

Тогда для любого решения $(\omega(t), x(t))$ *системы (3) с начальными условиями* $\omega(0) = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ *справедливы соотношения:* $\omega(t) \in [0, \bar{\omega}]$, $\bar{\omega} = \sqrt{3}\,\omega_0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \omega(t) = \omega_0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x_0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = 0$.

Для того чтобы вывести теорему 2 из теоремы 1, достаточно заметить, что $((b_1 + \delta^2)/2)y^2 - cy \le V(0, y, 0) \le ((b_2 + \delta\delta_1)/2)y^2 - cy$ и (учесть, что $y_0 = -F_0 x_0/J$) $V(0, y_0, 0) \le (y_0^2/2)(\delta\delta_1 + b_2 - 2\gamma(x_0)/(mx_0)) < 0$ в силу условия 5) теоремы 2.

Следовательно, $y_0 \in (0, 2c/(b_2 + \delta\delta_1)) \subset K$.

Замечание 5. В частном случае, когда $\alpha(x) \equiv \alpha$, $\gamma(x) = \gamma x$ (α, γ – константы), теорема 2 переходит в соответствующую теорему 2 из работы [1].

3.2. Случай $\alpha = \alpha(\omega, x)$, $\gamma = \gamma(x)$ рассматривается аналогично предыдущему с заменой функции $\varphi(y)$ на $\varphi(\omega, y)$.

Сформулируем соответствующий результат.

Теорема 3. *Пусть для системы (5), где функция $\varphi(y)$ заменена на $\varphi(\omega, y)$, выполнены условия 1), 2), 4), 5) теоремы 2 и пусть, кроме того, справедливы условия:*

а) для некоторых положительных $\delta > 0$ и $\delta_1 > 0$ $\delta \leq \varphi(\omega, y) \leq \delta_1$ $\forall \omega \in [0, \bar{\omega}]$, $\forall y \in$ $\in [y_1, y_2]$;

б) $y \int\limits_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \xi \, d\xi \leq 0 \quad \forall \omega \in [0, \bar{\omega}], \ \forall y \in [y_1, y_2].$

Тогда имеет место утверждение теоремы 2.

3.3. Случай возмущенной системы.

А) Сначала рассмотрим систему (1), подверженную воздействию "белого" шума, а именно, когда коэффициент трения α возмущен случайным процессом $\sigma\dot{\xi}(t)$ типа "белого" шума. Система уравнений движения принимает вид

$$J\dot{\omega} = F(x), \quad m\ddot{x} + (\alpha + \bar{\sigma}\dot{\xi})\dot{x} + \gamma x = \beta m (r + x)\omega^2, \tag{9}$$

где $\dot{\xi}(t)$ – "белый" шум единичной интенсивности, $\bar{\sigma} = \text{const}$, а остальные переменные и константы имеют тот же смысл, что и в системе (1).

Систему (9) будем понимать как систему стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито. Запишем ее в эквивалентной форме (аналогично (5))

$$d\omega = f(y)\, dt, \quad dy = z\, dt, \quad dz = -az - by + \beta\omega^2 y - k\omega^2 + c - \sigma z\, d\xi(t), \tag{10}$$

где $a = \alpha/m$, $b = \gamma/m$, $c = -F_0\gamma x_0/(mJ)$, $\sigma = \bar{\sigma}/m$, $\xi(t)$ – винеровский процесс.

Приведем достаточные условия устойчивости по вероятности стационарного решения ($\omega(t) \equiv \omega_0$, $y(t) \equiv 0$, $z(t) \equiv 0$) системы (10).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия 1), 2) и 5) теоремы 1 и пусть, далее, для некоторого положительного числа δ, такого, что $\delta < a$, выполнено неравенство $\sigma^2/2 < a - \delta$. Тогда стационарное решение системы (10) устойчиво по вероятности, т.е. для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{x_0 \to 0} P\{\sup_{t \geq 0} |x(t, x_0)| > \varepsilon\} = 0,$$

где $x(t, x_0) = (\omega(t, x_0), y(t, x_0), x(t, x_0))$, $x_0 = (\omega^0, y^0, z^0)$ – решение системы (10): $x(0) = x_0$.

Следующая теорема дополняет теорему 4.

Введем в рассмотрение стохастическую функцию Ляпунова

$$2V_1 = (z + \delta y)^2 + (2/3)\,\delta\omega(k\omega^2 - 3c) + 2y(k\omega^2 - c) + \delta(a - \delta)y^2 + y^2(b - \beta\omega^2), \tag{11}$$

где $0 < \delta < a$.

Положим: $S_\Gamma = \{(\omega, y, z) : \ V_1(k, y, z) < \Gamma, \ \Gamma \in (-2ac\sqrt{c}/(3\sqrt{k}), 0)\}$, $\Gamma_* = -kc^2/(bk - 3\beta c)$, $V_1^* = V_1(\omega_0, 0, 0)$, $V_1^0 = V_1(\omega^0, y^0, z^0)$, $N_{\Gamma_*} = \{(\omega, y, z) : \ LV_1 = 0\} \cap S_{\Gamma_*}$, где L – производящий дифференциальный оператор системы (10):

$$L = f(y)\partial/\partial\omega + z\partial/\partial y + [-az - by + \beta\omega^2 y - k\omega^2 + c]\partial/\partial z + 2^{-1}\sigma^2 z^2 \partial^2/\partial z^2.$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда для любого $\lambda \in (0, \Gamma_* - V_1^*]$ и любого начального условия $(\omega^0, y^0, z^0) \in S_{\Gamma_*}$ вероятность $P\{\sup_{t \geq 0} V_1(\omega(t), y(t), z(t)) \geq V_1^* + \lambda\} \leq$ $\leq (V_1^0 - V_1^*)/\lambda$ и $(\omega(t), y(t), z(t)) \to N_{\Gamma_*}$ $(t \to +\infty)$ с вероятностью, не меньшей чем $1 - (V_1^0 - V_1^*)/\lambda$.*

3.4. Общий случай: $\alpha = \alpha(x)$, $\gamma = \gamma(x)$, $\sigma = \sigma(\omega, x)$. Система уравнений имеет вид

$$J\dot{\omega} = F(x), \quad m\ddot{x} + [\alpha(x) + \sigma(\omega, x)\dot{\xi}]\dot{x} + \gamma(x) = \beta m(r + x)\omega^2, \tag{12}$$

где $\sigma = \sigma(\omega, x)$ – функция класса $\mathbb{C}^1$, а остальные переменные и константы те же, что и в системе (3).

Система (12) эквивалентна системе стохастических уравнений Ито

$$d\omega = f(y)\,dt, \quad dy = z\,dt, \quad dz = [-\varphi(y)z - \psi(y) - k\omega^2 + \beta\omega^2 y]dt + zh(\omega, y)\,d\xi(t), \tag{13}$$

где $h(\omega, y) = \sigma(\omega, x_0 + (J/F_0)y)/m$, а функции f, φ, ψ те же, что и в системе (5).

Теорема 6. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того, справедливы неравенства*

а) $|h(\omega, y)| < \sigma \quad \forall\omega \in [0, \bar\omega], \quad \forall y \in [y_1, y_2]$;

б) $\sigma^2/2 < \delta - \varepsilon$, *где* $0 < \varepsilon < \delta$.

Тогда стационарное решение системы (13) устойчиво по вероятности. Кроме того, справедливо утверждение теоремы 5 с заменой функции V_1 *на* V, *определяемую формулой (6).*

4. Доказательства теорем 1–6.

4.1. Доказательство теоремы 1. Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Множество* K *ограничено.*

Доказательство. Используя условия 3) и 4) теоремы 1, будем иметь следующую оценку для функции V (см. (6)):

$$2V \geq (z + \delta y)^2 + \frac{2}{3}\delta\omega(k\omega^2 - 3c) + 2y(k\omega^2 - c) - \beta\omega^2 y^2 + 2\int_0^y [\psi(\xi) + c]\,d\xi \geq$$

$$\geq (z + \delta y)^2 + \frac{2}{3}\delta\omega(k\omega^2 - 3c) + 2y(k\omega^2 - c) + y^2(b_1 - \beta\omega^2) \equiv 2W.$$

Множество $K^* = \{W(\omega, y, z) \leq 0, \ 0 \leq \omega \leq \bar\omega\}$ ограничено в силу леммы 1 из [1], а следовательно, ограничено и множество $K \subset K^*$. Лемма 1 доказана.

Вычислим теперь $\dot V = -\omega y(\beta y - 2k)f(y) - \delta k\omega^2[y - f(y)] + \delta\beta\omega^2 y^2 - \delta y\psi(y) - \delta c f(y) - [\varphi(y) - \delta]z^2$.

Лемма 2. *На множестве* K *функция* $\dot V$ *допускает оценку* $\dot V \leq -\varepsilon y^2$ $(\forall(\omega, y, z) \in K)$, $\varepsilon > 0$.

Доказательство. В силу условий 3) и 4) теоремы 1 получаем оценку

$$\dot V \leq -\omega y(\beta y - 2k)f(y) - \delta(k\omega^2 - c)[y - f(y)] - \delta y^2(b_1 - \beta\omega^2) \equiv W_1(\omega, y, z).$$

Теперь, учитывая, что $K \subset K^*$ и $W_1 \leq -\varepsilon y^2$ $\forall(\omega, y, z) \in K^*$, на основании леммы 2 из работы [1] получаем утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Множество* K *положительно инвариантно.*

Доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы 3 из [1]. При этом следует учесть, что в силу неравенства $V(\omega, y, z) \geq W(\omega, y, z)$ имеют место соотношения $\{V(0, y, z) < 0\} \subset \{W(0, y, z) < 0\} \equiv E_0$, $\{V(\bar\omega, y, z) < 0\} \subset \{W(\bar\omega, y, z) < 0\} \equiv E_{\bar\omega}$. Но $E_0 \subset \{y > 0\}$, а $E_{\bar\omega} \subset \{y < 0\}$, поэтому на "плоских" множествах E_0 и $E_{\bar\omega}$ в силу неравенства $yf(y) > 0$ $\forall y \in [y_1, y_2]$ (которое следует из условия 2) теоремы 1) будем иметь неравенства $\dot\omega > 0$ и $\dot\omega < 0$ соответственно.

Следовательно, траектории системы (5) "прошивают" множества E_0 и $E_{\bar\omega}$ снаружи во внутрь области K. Так как любая траектория T, начинающаяся в области K, не может выйти из нее через поверхность $\{V = 0, \ 0 \leq \omega \leq \bar\omega\}$, то она остается все время в K. Лемма 3 доказана.

Теперь для завершения доказательства теоремы 1 воспользуемся рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы Барбашина–Красовского [13] об асимптотической устойчивости в целом. Положение равновесия $(\omega_0, 0, 0)$ устойчиво по Ляпунову в силу леммы 2. Пусть T – произвольная траектория системы (5), начинающаяся в области K. В силу лемм 1 и 3 множество $\Omega(T)$ ω-предельных точек траектории T не пусто и ограничено. Далее, используя лемму 2 и учитывая, что множество $\{\dot V = 0\}$ не содержит целых траекторий, кроме положения равновесия $(\omega_0, 0, 0)$, как и в [13], докажем, что $\Omega(T)$ совпадает с точкой $(\omega_0, 0, 0)$. Последнее вместе с леммой 3 доказывают утверждение теоремы 1.

4.2. Теорема 2 следует из теоремы 1 (см. п. 3.1). Теорема 3 доказывается вполне аналогично теореме 1 с использованием функции V, задаваемой формулой (6), где в последнем интеграле функция $\varphi(\xi)$ заменена на $\varphi(\omega, \xi)$.

4.3. Доказательства теорем 4 и 5. Оценим LV_1, где V_1 определяется формулой (11). Имеем $LV_1 = -\omega y(\beta y - 2k)f(y) - \delta(k\omega^2 - c)[y - f(y)] - \delta y^2(b - \beta\omega^2) + (\sigma^2/2 - a + \delta)z^2 \leq 0$ в области $K_1 = \{V_1 \leq 0,\ \ 0 \leq \omega \leq \bar{\omega}\}$ в силу условий теоремы 4.

Теперь, рассматривая функцию $V_2 = V_1 - V_1^*$ $(V_1^* = V_1(\omega_0, 0, 0) = -2ac\sqrt{c}/(3\sqrt{k}))$ в области K_1 и применяя к ней теорему 3.1 [14, гл. V, с. 207], получаем утверждение теоремы 4.

Для доказательства теоремы 5 заметим прежде всего, что сечениями поверхности $\partial S_\Gamma = \{V_1 = \Gamma\}$ плоскостями $\omega = \tilde{\omega}$, где $b - \beta\tilde{\omega} > 0$ (что равносильно неравенству $2x_0 < r$), являются эллипсы $E_{\tilde{\omega}}$: $(\eta - \eta_0)^2/\Delta + \zeta^2/(\Delta(b - \beta\tilde{\omega}^2)) = 1$; здесь $\eta = y$, $\zeta = z + ay$, $\eta_0 = -(k\tilde{\omega}^2 - c)/(b - \beta\tilde{\omega}^2)$, $\Delta = 2[3\Gamma - a\tilde{\omega}(k\tilde{\omega} - 3c)]/[3(b - \beta\tilde{\omega}^2)] + (k\tilde{\omega}^2 - c)^2/[2(b - \beta\tilde{\omega}^2)^2]$. Легко подсчитать, что эллипс $E_{\tilde{\omega}}$ вырождается в точку при

$$\Gamma = 3^{-1}a\tilde{\omega}\,(k\tilde{\omega}^2 - 3c) - 4^{-1}(k\tilde{\omega}^2 - c)^2/(b - \beta\tilde{\omega}^2).$$

В частности, при $\omega = \bar{\omega}$ получаем $\Gamma = -kc^2/(bk - 3\beta c) = \Gamma_*$. Таким образом, поверхность $\partial S_{\Gamma_*} = \{V = \Gamma_*\}$ является замкнутой и расположена между плоскостями $\omega = -\bar{\omega}$ и $\omega = \bar{\omega}$. Отсюда ясно, что замкнутыми будут и поверхности $\{V = \Gamma,\ \ \Gamma \in (V_1^*, \Gamma_*)\}$ (лежащие внутри ∂S_{Γ_*}).

Так как $LV_1 \leq 0$ в области $K_1 \supset \{S_{\Gamma_*},\ \ \omega \geq 0\}$, то, применяя к функции $V_2 = V_1 - V_1^*$ теорему 2 из [15, с. 57], получаем утверждение теоремы 5.

4.4. Доказательство теоремы 6. В качестве стохастической функции Ляпунова используем функцию V, определяемую формулой (6). Используя условия теоремы 6, получаем оценку $LV \leq -\omega y(\beta y - 2k)f(y) - \delta k\omega^2[y - f(y)] + \delta\beta\omega^2 y^2 - \delta y\psi(y) - \delta cf(y) \leq 0$ в области $K = \{V \leq 0,$ $0 \leq \omega \leq \bar{\omega}\}$. Теперь утверждение теоремы 6 следует из упомянутых выше общих теорем из [14, 15] (примененных к функции $V_3 = V - V(\omega_0, 0, 0)$).

Автор приносит благодарность Г.А. Леонову за внимание к этой работе и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шумафов М.М.* // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2001. Вып. 1. С. 53–59.
2. *Леонов Г.А.* Математические проблемы теории управления. Мотивация к анализу. СПб., 1999.
3. *Огурцов А.И.* // Изв. вузов. 1958. № 1. С. 124–129.
4. *Ezeilo J.O.* // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1963. V. 13. № 49. P. 99–124.
5. *Ezeilo J.O.* // J. London Math. Soc. Part 4. 1962. V. 37. № 148. P. 405–409.
6. *Haas V.A.* // J. London Math. Soc. 1965. V. 40. P. 31–33.
7. *Гайшун И.В.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 2. С. 305–312.
8. *Барбашин Е.А.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 3. С. 424–429.
9. *Тузов А.П.* // Вестн. ЛГУ. 1957. № 1. С. 57–75.
10. *Эфендиев А.Р., Балитинов М.А.* // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 618–624.
11. *Балитинов М.А.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 6. С. 1091–1100.
12. *Балитинов М.А.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 6. № 2. С. 254–262.
13. *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 3. С. 453–456.
14. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., 1969.
15. *Кушнер Г.Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. М., 1969.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию
21.06.2001 г.