А. Н. Сергеев, Векторные и ковекторные инварианты супералгебр Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 1996, том 30, выпуск 3, 90–93

DOI: 10.4213/faa543

довательные его вершины $A$, $B$, $C$, не лежащие на одной прямой, расположен внутри угла $\angle ABC$.

Следствие 4. *Неособый регулярный многоугольник на плоскости с числом сторон, большим трех, имеет не менее четырех экстремальных вершин.*

Это утверждение является прямым обобщением теоремы [1] на случай невыпуклых многоугольников.

Определение. Опорная вершина $V$ плоского многоугольника называется *внутренней* (*внешней*), если некоторые его вершины лежат внутри (вне) опорной окружности, проходящей через вершину $V$ и две ее соседние.

Следствие 5 [6]. *Выпуклый многоугольник на плоскости, не вписывающийся в окружность, имеет не менее двух внутренних и двух внешних вершин.*

Следствие 6. *Любой несамопересекающийся регулярный многоугольник на плоскости либо вписывается в окружность, либо имеет не менее двух внешних вершин.*

Имеются и другие варианты теоремы о четырех вершинах для многоугольника (обзор см., например, в [7]). Автор благодарен О. Р. Мусину, заметившему, что условие регулярности плоского несамопересекающегося многоугольника эквивалентно тому, что этот многоугольник является подграфом *триангуляции Делоне* множества своих вершин (см. [2, 5]).

## Литература

**1.** *Мусин О. Р.* Квант (1996) (в печати). **2.** *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение. Мир, М., 1989. **3.** *Седых В. Д.* Функц. анализ и его прил., **26**, вып. 1, 35–41 (1992). **4.** *Седых В. Д.* Функц. анализ и его прил., **29**, вып. 3, 41–50 (1995). **5.** *Guibas L., Stolfi J.* ACM Trans. Graphics., **4**, 74–123 (1985). **6.** *Schatteman A.* Geom. Dedicata, **34**, 229–242 (1990). **7.** *Wegner B.* Math. Pannon., **6**, No. 1, 121–132 (1995).

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»

Поступило в редакцию 25 декабря 1995 г.

УДК 519.46

# Векторные и ковекторные инварианты супералгебр Ли

© 1996. А. Н. Сергеев

Пусть $V$ — конечномерное суперпространство над $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{g}$ — подсупералгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$. В работе приводится описание образующих алгебр $\mathfrak{g}$-инвариантных элементов, содержащихся в $\mathfrak{A}_{k,l}^{p,q} = S(V^k \oplus \pi(V)^l \oplus V^{*p} \oplus \pi(V^*)^q)$. Полученные результаты являются обобщением работы [3], где аналогичное описание дано с точностью до операторов поляризации.

**1. Инварианты супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(V)$.** Для заданного суперпространства $E$ через $B(E)$ обозначим множество $\{1, \dots, \alpha, \overline{1}, \dots, \overline{\beta}\}$, где $\alpha = \dim E_{\overline{0}}$, а $\beta = \dim E_{\bar 1}$, и выберем базис $\{e_i\}$, $i \in B(E)$, так, что четность базисного вектора совпадает с четностью соответствующего индекса. В пространстве $E^*$ выберем базис $\{e_i^*\}$ — левый дуальный к базису пространства $E$. Если $t$ — стандартная таблица Юнга (см. [2]), то через $e_t = \sum \varepsilon(\tau)\sigma\tau$ и $\tilde e_t = \sum \varepsilon(\tau)\tau\sigma$ обозначим минимальные идемпотенты в групповой алгебре симметрической группы, причем суммирование ведется по $\tau$ из столбцового стабилизатора и по $\sigma$ из строчного стабилизатора таблицы $t$. Для последовательности $I$ с элементами из $B(E)$ обозначим через $e_I$ элемент $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots$. Последовательность $I$ называется $t$-полустандартной, если при вписывании ее элементов в клетки таблицы $t$ ($i_\alpha$ вписывается в ту клетку, где стоит $\alpha$) ее элементы не убывают слева направо вдоль строк и сверху вниз по столбцам и, кроме того, четные элементы строго возрастают вдоль столбцов, а нечетные — вдоль строк. Обозначим через $\varphi_E$ канонический гомоморфизм тензорной алгебры $T(E)$ на симметрическую алгебру $S(E)$. Легко видеть, что $\mathfrak{A}^{p,q}_{k,l} = S(U \otimes V \oplus V^* \otimes W)$. Пусть $\{u_\alpha\}$, $\{w_\beta\}$, $\{v_i\}$, $\{v_i^*\}$ — базисы в пространствах $U$, $W$, $V$, $V^*$ соответственно. Для последовательностей $I$ и $J$ с элементами из $B(U)$ и $B(V)$ соответственно положим

$$P_t^{U,V}(I,J) = \varphi_{U\otimes V}(e_t(u_I) \otimes v_J), \qquad \widetilde P_t^{U,V}(I,J) = \varphi_{U\otimes V}(\tilde e_t(u_I) \otimes v_J).$$

Пусть $t$ — прямоугольная таблица размера $(n+k)\times m$, заполненная числами от 1 до $(n+k)m$ так, что вначале заполнена таблица, состоящая из первых $n$ строк, по столбцам, а затем оставшаяся часть также заполняется по столбцам. Пусть $s$ — прямоугольная таблица размера $n \times (m+k)$, заполненная последовательно по столбцам. Для последовательностей $I$ и $J$ через $I * J$ обозначим последовательность, полученную дописыванием к элементам последовательности $I$ элементов последовательности $J$. Через $I_k$ обозначим $k$-кратное повторение последовательности $12\dots n$, а через $J_k$ — последовательность, состоящую из $k$ символов $\bar 1$, затем $k$ символов $\bar 2$ и т.д. до $k$ символов $\bar m$, где $(n,m) = \dim V$. Обозначим через $d(I)$ число $(-1)^{p(I,I)}$, где $p(I,I) = \sum_{\beta>\alpha} p(i_\alpha)p(i_\beta)$, а $p$ — функция четности, $p(I) = \sum p(i_\alpha)$.

Теорема 1. *Алгебра* $\mathrm{sl}(V)$*-инвариантных элементов порождена многочленами*

(а) $(v_\alpha^*, v_\beta)$, $\alpha \in B(U)$, $\beta \in B(W)$ (*см.* [3]);

(б) $F_k(S,T) = \sum d(L) P_s^{U,V}(S, I_k * L)\, \widetilde P_t^{V^*,W}(L * J_k, T)$;

(в) $F_{-k}(S,T) = \sum d(L)(-1)^{p(L)mk} \widetilde P_t^{U,V}(S, L * I_k)\, P_s^{V^*,W}(J_k * L, T)$,

*где* $k \in \mathbb{N}$, $S$ *и* $T$ *суть* $t$- *и* $s$-*полустандартные последовательности с элементами из* $B(U)$ *и* $B(W)$ *соответственно, а суммирование ведется по всем последовательностям* $L$ *длины* $nm$ *с элементами из* $B(V)$.

**2. Инварианты супералгебр Ли $\mathrm{osp}(V)$.** Наличие четной инвариантной формы на модуле $V$ определяет изоморфизм $\mathfrak{A}^{p,q}_{k,l} = \mathfrak{A}^{p+k,q+l}$ как $\mathrm{osp}(V)$-модулей и как алгебр; поэтому можно ограничиться случаем $k = l = 0$. Если $\dim V = (n,m)$, то для $i \in B(V)$ определим сопряженный $\tilde i \in B(V)$ по правилам: $\tilde i = n - i + 1$, если $p(i) = \bar 0$, и $\tilde i = \overline{m - i + 1}$, если $p(i) = \bar 1$. Пусть $t$ — прямоугольная таблица размера $n \times m$, заполненная по столбцам, и $L$ — последовательность с элементами из $t$. Заполним таблицу $t$ элементами последовательности $L$ ($l_\alpha$ стоит в той клетке, где было $\alpha$). Пару символов в $L$

назовем отмеченной, если они находятся в одной строке и в соседних столбцах, причем номер первого столбца нечетный. Обозначим через $\mathfrak{T}_1$ множество последовательностей $L$, таких, что все отмеченные пары, кроме, возможно, пар последней строки, состоят из попарно сопряженных элементов; если из последней строки удалить все отмеченные пары с попарно сопряженными элементами, то оставшееся множество $N(L) = \{K_1, \dots, K_{2s}\}$ состоит из попарно различных нечетных элементов и инвариантно относительно сопряжения. Пусть $L \in \mathfrak{T}_1$; тогда определены числа $d(L) = d(L_1 * L_2)\, d(L_3 * L_4) \dots$, где $L_1, L_2, \dots$, — последовательные столбцы последовательности $L$ и

$$K(L) = \sum_{q=s}^{s+\nu} (k+1)^r 2^{r-q} (r-q)!\, k^q \sigma_{q-s}(k_1, \dots, k_\nu),$$

где $r = m/2$, $\nu$ — количество различных отмеченных пар последней строки, состоящих из попарно сопряженных нечетных элементов, не принадлежащих множеству $N(L)$, $k_1, \dots, k_\nu$ — кратности, с которыми эти пары входят в последнюю строку, $k = k_1 + \dots + k_\nu$ и $\sigma_l$ — элементарная симметрическая функция.

Теорема 2. *Алгебра* $\operatorname{osp}(V)$-*инвариантных многочленов порождена элементами*

(а) $(v_\alpha, v_\beta)$, $\alpha, \beta \in B(W)$ (*см.* [3]);

(б) $R(J) = \sum d(L) K(L) P_s^{V^*, W}(I_1 * L, J)$,

*причем суммирование ведется по* $L \in \mathfrak{T}_1$, $s$ — *прямоугольная таблица размера* $n \times (m+1)$, *заполненная по столбцам, и* $J$ *есть* $s$-*полустандартная последовательность с элементами из* $B(W)$.

**3. Инварианты суперaлгебры Ли $\mathbf{sp}(V)$.** Наличие нечетной инвариантной билинейной формы на пространстве $V$ определяет изоморфизм $\mathfrak{A}_{k,l}^{p,q} = \mathfrak{A}^{p+l, q+k}$ как $\operatorname{sp}(V)$-модулей и как алгебр; поэтому можно ограничиться случаем $k = l = 0$. Так как $\dim V_{\bar 0} = \dim V_{\bar 1}$, то для $i \in B(V)$ определен сопряженный элемент $\bar i$. Обозначим через $\mathfrak{T}_2$ множество последовательностей длины $n^2$, рассматриваемых как $n \times n$-таблицы, заполненные по столбцам, которые обладают следующими свойствами: по главной диагонали стоят числа $\bar 1, \dots, \bar n$; выше главной диагонали стоят четные числа и числа, симметричные относительно главной диагонали, сопряжены; на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца стоит одно из чисел $\{i, j, \bar i, \bar j\}$.

Для $I \in \mathfrak{T}_2$ пусть $\varepsilon(I) = (-1)^\nu$, где $\nu$ — количество четных чисел в $I$, не совпадающих с номером своего столбца, $m_k(I) = \prod_1^n \frac{(n+k)!}{(n+k-k_i)!}$, где $k \geqslant 0$ и $k_i$ — количество чисел в $i$-м столбце, не равных $i$ и $\bar i$. Пусть $t$ и $s$ — такие же таблицы, как в теореме 1.

Теорема 3. *Алгебра* $\operatorname{sp}(V)$-*инвариантных элементов порождена многочленами*

(i) $(v_\alpha, v_\beta)$, $\alpha, \beta \in B(W)$ (*см.* [3]);

(ii) $Q_k(J) = \sum \varepsilon(I) m_{k-1}(I) P_t^{V^*, W}(I * J_{k-1}, J)$;

(iii) $Q_{-k}(J) = \sum \varepsilon(I) m_0(I) P_s^{V^*, W}(I * I_{k+1}, J)$,

*где* $k \geqslant 1$ *и* $J$ *есть* $t$- ($s$-)*стандартная последовательность с элементами из* $B(W)$ *и суммирование ведется по* $I \in \mathfrak{T}_2$.

## Литература

**1.** *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. ИЛ, М. (1947). **2.** *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла. Мир, М. (1985). **3.** *Сергеев А. Н.* Функц. анализ и его прил., **26**, вып. 3, 88–90 (1992).

Балаковский институт техники,
технологии и управления

Поступило в редакцию
15 декабря 1994 г.

УДК 517.98

# Об одной теореме о неподвижной точке

© 1996. Чан Куок Бинь, Нгуен Минь Чыонг

**1.** Теорема 1. *Пусть $H$ — замкнутое ограниченное множество в нормированном пространстве $X$ и $T$ — отображение множества $H\times H$ в $H$, удовлетворяющее следующему условию*:

$$\|T(x,y)-T(z,t)\|\begin{cases} < \max\{\|x-z\|,\|y-t\|\}, & \text{если } (x,y)\neq(z,t) \\ & \text{и } x\neq y \text{ или } z\neq t, \\ \leqslant \|x-z\|=\|y-t\|, & \text{если } x=z \text{ и } z=t, \end{cases} \tag{1}$$

*при всех $x,y,z,t\in H$ (см.* [5, 6]*).*

*Предполагается, кроме того, что либо $H$ компактно, либо $T$ — отображение множества $H\times H$ в компактное подмножество множества $H$.*

*Тогда уравнение*

$$T(x,x)=x \tag{2}$$

*имеет единственное решение в $H$. Кроме того, каждое уравнение*

$$x_n=T(x_n,x_{n-1}),\qquad n\geqslant 1, \tag{3}$$

*имеет единственное решение $x_n$ и последовательность $\{x_n\}$, определенная уравнением* (3)*, сходится к решению уравнения* (2) *при любом выборе точки $x_0\in H$.*

Эта теорема доказывается без труда при помощи теоремы Эдельстейна из [3] для отображения $T_v(x)=T(x,v)$.

Заметим, что настоящая теорема распространяет теорему Эдельстейна из [3] на отображение $T(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$. Если вместо (3) в тех же предположениях, что и в теореме 1, использовать итерацию Пикарда для $T_*(x)=T(x,x)$, как это сделано в работах [1–3, 10] и др., то нельзя будет говорить о существовании и сходимости приближенных решений для уравнения (2).

**2.** Аналогично доказательству теоремы 1 доказывается

Теорема 2. *Пусть $H$ — замкнутое ограниченное подмножество в метрическом пространстве $(X,d)$ и $g(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\colon H\times H\to[0,\infty)$ — функция, обладающая следующими свойствами*:

а) $g(x,y)=0$*, если и только если $x=y$ для всех $x,y\in H$*;

б) *$g$ непрерывна по $(x,y)$*;

в) *если $g(x,y)\to 0$, то $d(x,y)\to 0$.*