A. V. Kolodzei, A theorem on the probabilities of large deviations for decomposable statistics that do not satisfy Cramér's condition,
Diskr. Mat., 2005, Volume 17, Issue 2, 87–94

Дискретная математика

том 17 выпуск 2 * 2005

УДК 519.2

Теорема о вероятностях больших уклонений для разделимых статистик, не удовлетворяющих условию Крамера

© 2005 г. А. В. Колодзей

Находится асимптотика вероятностей больших уклонений симметричных разделимых статистик в обобщенных схемах размещения при невыполнении условия Крамера. Исследуется случай так называемых малых выборок.

1. Пусть $h(n,N) = (h_0, h_1, \dots, h_N)$ — вектор частот исходов в обобщенной схеме размещения n частиц по N ячейкам, распределение этого вектора имеет вид

$$\mathbf{P}\{h(n,N) = (r_1, \dots, r_N)\} = \mathbf{P}\left\{\xi_\nu = r_\nu,\ \nu = 1, \dots, N \mid \sum_{\nu=1}^{N} \xi_\nu = n\right\}, \tag{1}$$

где $\xi_1, \dots, \xi_N$ — независимые неотрицательные целочисленные случайные величины.

Понятие обобщенной схемы размещения введено В. Ф. Колчиным [1]. В частности, если случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ распределены по закону Пуассона, то вектор $h(n,N)$ имеет полиномиальное распределение [2].

Будем предполагать, что производящие функции

$$P_\nu(z) = \mathbf{M} z^{\xi_\nu}, \qquad \nu = 1, \dots, N,$$

сходятся в некотором круге радиуса R и представимы в виде

$$P_\nu(z) = \frac{Q(\theta_\nu z)}{Q(\theta_\nu)}, \qquad 0 < \theta_\nu < \infty,$$

где $Q(z)$ — аналитическая в окрестности точки $z = 0$ функция. Это равносильно тому, что все случайные величины ξ_ν распределены по одному и тому же параметрическому закону $\Pi(\theta)$, каждая со своим параметром θ_ν (см. [3]).

В качестве критериев согласия с последовательностью простых гипотез

$$H_0(n,N)\colon \quad \theta_1 = \ldots = \theta_N,$$

рассмотрим критерии, которые отклоняют гипотезу $H_0(n,N)$ при

$$L_N(h(n,N)) = \sum_{\nu=1}^{N} f(h_\nu) > c_n, \tag{2}$$

где f — некоторая действительная функция, $L_N(h(n, N))$ — симметричная разделимая статистика, $\{c_n\}$ — некоторая последовательность констант. Термин разделимая (аддитивно разделимая) статистика впервые был введен Ю. И. Медведевым в [4]. Как было показано в [5], анализ асимптотических свойств критериев при несближающихся альтернативах требует наличия теорем о вероятностях больших уклонений для распределений разделимых статистик.

Случайная величина η удовлетворяет условию Крамера, если производящая функция моментов $\mathbf{M}e^{\eta}$ конечна в некотором интервале $|t| < H$ (см. [6]). В настоящей статье изучаются вероятности больших уклонений симметричных разделимых статистик в обобщенных схемах размещения в случае, когда случайные величины $f(\xi_1)$ не удовлетворяет условию Крамера. Условие Крамера не выполняется, например, для статистики χ^2 от пуассоновских случайных величин, образующих полиномиальную схему размещения.

2. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ одинаково распределены. Для любого $0 < z < R$ через $\xi(z)$ обозначим случайную величину такую, что

$$\mathbf{P}\{\xi(z) = k\} = \frac{z^k}{P(z)}\mathbf{P}\{\xi_1 = k\},$$

где $P(z)$ — производящая функция случайной величины ξ_1. Пусть $\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} > 0$ для всех $k = 0, 1, \dots$, функция

$$p(k) = -\ln \mathbf{P}\{\xi_1 = k\},$$

взятая как функция непрерывного аргумента, — правильно меняющаяся функция порядка p, $0 < p < \infty$ (см. [7]), то есть она положительна, и при $t \to \infty$

$$\frac{p(tx)}{p(t)} \to x^p.$$

Если функция $f(x)$ при достаточно больших значениях аргумента — положительная строго возрастающая правильно меняющаяся функция порядка $q > 1$, $2/q - 1 < p/q < 1$, то случайная величина $f(\xi_1)$ имеет моменты любого порядка и не удовлетворяет условию Крамера.

Определим функцию $\varphi(x)$, положив для достаточно больших x

$$\varphi(x) = p(f^{-1}(x)).$$

Ясно, что $\varphi(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. На остальной числовой оси $\varphi(x)$ может быть задана произвольно, но так, что она является ограниченной и измеримой.

Теорема 1. *Пусть при достаточно больших x функция $\varphi(x)$ монотонно не убывает, функция $\varphi(x)/x$ монотонно не возрастает, $n, N \to \infty$ так, что $n/N \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, z_λ — единственный корень уравнения*

$$\mathbf{M}\xi_1(z) = \lambda.$$

Тогда для любого $c > b(z_\lambda)$, где $b(z) = \mathbf{M}f(\xi_1(z))$, существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\varphi(N)} \ln \mathbf{P}\{L_N(h(n, N)) > cN\} = -(c - b(z_\lambda))^{p/q}.$$

Для доказательства теоремы потребуются две следующие леммы.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 1 *для любого* $a > 0$ *существует предел*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\varphi(N)} \ln \mathbf{P}\{f(\xi_1) \geqslant aN\} = -a^{p/q}. \tag{3}$$

Лемма 2. *В условиях теоремы* 1 *для любого* $c > b$, $b = \mathbf{M} f(\xi_1)$, *существует предел*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\varphi(N)} \ln \mathbf{P}\{L_N \geqslant cN\} = -(c-b)^{p/q}, \tag{4}$$

где

$$L_N = f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_N).$$

Доказательство леммы 1. При $k \to \infty$

$$\exp\{\varphi(tf(k))\}\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \exp\{p(k)(t^{p/q} - 1 + o(1))\},$$

и для любого t, $0 < t < 1$,

$$\mathbf{M} \exp\{\varphi(tf(\xi_1))\} < \infty.$$

Если функция $\varphi(x)$ монотонна при $x > X$, то для любых $a > 0$, $N > X/(ta)$

$$\exp\{\varphi(taN)\}\mathbf{P}\{f(\xi_1) \geqslant aN\} \leqslant \mathbf{M}\exp\{\varphi(tf(\xi_1)))\}$$

и

$$\frac{1}{\varphi(N)} \ln \mathbf{P}\{f(\xi_1) \geqslant aN\} \leqslant \frac{\mathbf{M}\exp\{\varphi(tf(\xi_1))\}}{\varphi(N)} - \frac{\varphi(taN)}{\varphi(N)}.$$

Отсюда,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{\varphi(N)} \ln \mathbf{P}\{f(\xi_1) \geqslant aN\} \leqslant -a^{p/q}.$$

Пусть $k_{a,N}$ — минимальное целое число такое, что $f^{-1}(aN) \leqslant k_{a,N} < f^{-1}(aN) + 1$, $f(k_{a,N}) \geqslant aN$. Тогда

$$\mathbf{P}\{f(\xi_1) \geqslant aN\} \geqslant \mathbf{P}\{\xi_1 = k_{a,N}\} = \exp\{-p(k_{a,N})\}.$$

При $N \to \infty$

$$\frac{p(k_{a,N})}{\varphi(N)} \to a^{p/q}.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть

$$\eta_j = f(\xi_j) - b, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

$G(x)$ — функция распределения случайной величины η_1, $S_N = \eta_1 + \ldots + \eta_N$ и G_N — функция распределения случайной величины S_N.

Для любого $c > b$ и $a = c - b$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{L_N \geqslant cN\} &= \mathbf{P}\{S_N \geqslant aN\} \geqslant \mathbf{P}\{\eta_1 \geqslant aN, \eta_2 + \ldots + \eta_N \geqslant 0\} \\ &= \mathbf{P}\{f(\xi_1) \geqslant (c-b)N + b\}\mathbf{P}\{S_{N-1} \geqslant 0\}. \end{aligned}$$

Так как η_j, $j = 1, 2, \ldots$, — независимые одинаково распределенные центрированные случайные величины, обладающие третьими моментами, то по центральной предельной теореме

$$\mathbf{P}\{S_{N-1} \geqslant 0\} \to \frac{1}{2}$$

при $N \to \infty$. С учетом (3), получаем, что

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{\varphi(N)} \ln \mathbf{P}\{f(\xi_1) \geqslant aN\} \geqslant -a^{p/q}. \tag{5}$$

Для оценки вероятности $\mathbf{P}\{S_N \geqslant aN\}$ сверху запишем ее, следуя [8], в виде

$$\mathbf{P}\{S_N \geqslant aN\} = \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} P_{Nm}, \tag{6}$$

где

$$P_{Nm} = \mathbf{P}\{S_N \geqslant aN, \eta_i \geqslant aN, i = 1, \ldots, m, \eta_j < aN, j = m+1, \ldots, N\}.$$

Ясно, что при $N \to \infty$

$$\sum_{m=2}^{N} \binom{N}{m} P_{Nm} = O((N\mathbf{P}\{\eta_1 \geqslant aN\})^2) = o(\mathbf{P}\{\eta_1 \geqslant aN\}), \tag{7}$$

$$P_{N1} \leqslant \mathbf{P}\{\eta_1 \geqslant aN\}. \tag{8}$$

Для оценки P_{N0} используем метод сопряженных распределений. Пусть s — некоторый положительный параметр. Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\eta_1(s) < u\} = \frac{1}{f_{aN}(s)} \int_{-\infty}^{u} e^{sv} dG(v) \quad \text{при } u \leqslant aN, \\ &\mathbf{P}\{\eta_1(s) < u\} = 1 \quad \text{при } u > aN, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$f_{aN}(s) = \int_{-\infty}^{aN} e^{sv} dG(v).$$

Обращая (9), получаем равенство

$$P_{N0} = f_{aN}^N(s) \exp\{-aNs\} \int_0^\infty e^{-su} dG_N(u + aN). \tag{10}$$

Для любого $s > 0$

$$\int_0^\infty e^{-su} dG_N(u + aN) \leqslant 1.$$

Положим

$$s = \frac{\varphi(aN)}{aN}(1 - \theta),$$

где $\theta \to 0$ при $N \to \infty$.

Тогда $s \to 0$ при $N \to \infty$. Конкретный выбор θ будет указан позже. Разобьем интеграл $f_{aN}(s)$ на две части:

$$f_{aN}(s) = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty}^{1/s} e^{sv} dG(v),$$

$$I_2 = \int_{1/s}^{aN} e^{sv} dG(v).$$

Для любого x, $-\infty < x \leqslant 1$,

$$e^x \leqslant 1 + x + (e-2)x^2,$$

поэтому

$$I_1 \leqslant \int_{-\infty}^{1/s} dG(v) + s\int_{-\infty}^{1/s} u dG(v) + (e-2)s^2 \int_{-\infty}^{1/s} u^2 dG(v) \leqslant 1 + o(s),$$

поскольку

$$\int_{-\infty}^{1/s} dG(v) \leqslant 1, \quad \int_{-\infty}^{1/s} u dG(v) \leqslant 0, \quad \int_{-\infty}^{1/s} u^2 dG(v) \leqslant \infty.$$

Если функция $\varphi(x)/x$ монотонно не возрастает при $x \geqslant X$, то при всех N таких, что $1/s \geqslant X$,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{1/s}^{aN} \exp\{\varphi(aN)/(aN)\}(1-\theta) u dG(u) \\ &\leqslant \exp\{-\theta\varphi(1/s)\} \int_{1/s}^{aN} e^{\varphi(u)} dG(u). \end{aligned}$$

Положим

$$\theta = \left(1 + \frac{1}{q}\right) \frac{\ln N}{\varphi(aN/\varphi(aN))}.$$

Тогда $\theta \to 0$ при $N \to \infty$, и

$$\frac{\varphi(1/s)}{\varphi(aN/\varphi(aN))} \to 1,$$

$$I_2 = o(s),$$

$$f_{aN}(s) \leqslant 1 + o(s) = \exp\{o(s)\},$$

$$P_{N0} \leqslant \exp\{-aNs + o(Ns)\} = \exp\{-\varphi(aN)(1 + o(1)\}.$$

Из (6),(7),(8) и последней оценки следует, что

$$\mathbf{P}\{S_N \geqslant aN\} \leqslant \exp\{-\varphi(aN)(1 + o(1)\}.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Для получения оценки снизу воспользуемся приемом, аналогичным использованному в [10].

Пусть k — минимальное целое число такое, что

$$cN - f(k) \leqslant (N-1)b(z_{\lambda_k}), \qquad \lambda_k = \frac{n-1}{N-1}.$$

Ясно, что такое k существует, $0 < k < f^{-1}(cN)$, и при $N \to \infty$

$$\begin{aligned} &k = o(N), \quad \lambda_k \to \lambda, \quad b(\lambda_k) \to b(\lambda), \\ &k = f^{-1}(N(c - b(z_\lambda))(1 + o(1)). \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{L_N(h(n,N)) \geqslant cN\} &\geqslant \mathbf{P}\{h_1 = k, f(h_2) + \ldots + f(h_N) \geqslant cN - f(k)\} \\ &\geqslant \mathbf{P}\{h_1 = k\}\mathbf{P}\{L_{N-1}(hn - k \geqslant (N-1)b(z_{\lambda_k})\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Из теоремы 4 в [5] следует, что при $N \to \infty$

$$\mathbf{P}\{L_{N-1}(h(n-k)\} \geqslant (N-1)b(z_{\lambda_k})\} \to \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Далее,

$$\mathbf{P}\{(h_1 = k)\} = \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 = k\}\mathbf{P}\{\xi_2 + \ldots + \xi_N = n - k\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}}. \tag{14}$$

По интегральной формуле Коши

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\} = \frac{1}{2\pi i}\oint P(z)^N z^{-n-1}\,dz,$$

где $P(z)$ — производящая функция случайной величины ξ_1, в качестве контура интегрирования взята окружность с центром в точке $z = 0$ и радиусом $0 < r < R$. Применяя для оценки этого интеграла метод перевала [9], получим асимптотическое разложение

$$\frac{1}{N}\ln \mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\} = \ln \mathbf{P}\{z_\lambda\} - \lambda\ln(z_\lambda) + O\left(\frac{\ln N}{N}\right). \tag{15}$$

Единственность точки перевала обеспечивается условием $\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} > 0$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ Учитывая, что z_λ — корень уравнения

$$\frac{zP'(x)}{P(z)} = \lambda,$$

получаем, что

$$\frac{1}{N}\ln \mathbf{P}\{h_1 = k\} = \frac{1}{N}\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} + O(z_\lambda - z_{\lambda_k})^2 + O\left(\frac{\ln N}{N}\right)$$

Так как

$$z_\lambda - z_{\lambda_k} = O(\lambda - \lambda_k) = O\left(\frac{k}{N}\right),$$

из (12)–(14), последнего равенства и леммы 1 следует, что

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{\varphi(N)}\ln \mathbf{P}\{L_N(h(n,N)\geqslant cN\}\geqslant -(c-b(z_\lambda))^{p/q}. \qquad (16)$$

Перейдем к оценке $\mathbf{P}\{L_N(h(n,N)\geqslant cN\}$ сверху. По формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}\{L_N(h(n,N)\geqslant cN\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{P(z)^N}\mathbf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}\mathbf{P}\{L_N(h(n,N)\geqslant cN\}.$$

По интегральной формуле Коши

$$\mathbf{P}\{L_N(h(n,N)\geqslant cN\}=\frac{1}{2\pi i\ln \mathbf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}}\oint F_N(z)z^{-n-1}dz, \qquad (17)$$

где

$$F_N(z)=P(z)^N\mathbf{P}\{L_N(\xi(z))\geqslant cN\}$$
$$=\sum_{f(k_1)+\ldots+f(k_n)\geqslant cN} z^{k_1+\ldots+k_n}\mathbf{P}\{\xi_1=k_1\}\ldots\mathbf{P}\{\xi_N=k_N\}.$$

Взяв в качестве контура интегрирования окружность $|z|=z_\lambda$ и используя лемму 5.1 из [9], получим оценку

$$\frac{1}{N}\ln \mathbf{P}\{L_N(h(n,N)\geqslant cN\}$$
$$\leqslant \frac{1}{N}\ln \mathbf{P}\{L_N(h(n,N))\}-\frac{1}{N}\ln \mathbf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}-\ln P(z_\lambda)\lambda\ln z_\lambda.$$

Используя (15), получаем, что

$$\frac{1}{N}\ln \mathbf{P}\{L_N(h(n,N)\geqslant cN\}\leqslant\frac{1}{N}\ln \mathbf{P}\{L_N(h(n,N))\}+O\left(\frac{\ln N}{N}\right).$$

Используя лемму 2 и оценку (16), получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 1. Когда условие Крамера не выполняется, большие уклонения разделимых статистик в обобщенной схеме размещения определяются вероятностью уклонения одного независимого слагаемого. Когда условие Крамера выполняется, это, как подчеркивалось в [11], не так.

Замечание 2. Функция $\varphi(x)$ такова, что математическое ожидание $\mathbf{M}e^{\varphi(tf(\xi_1))}$ конечно при $0<t<1$ и бесконечно при $t>1$.

Замечание 3. Для разделимых статистик, не удовлетворяющих условию Крамера, предел (3) равен 0, что доказывает справедливость гипотезы, высказанной в [11].

Замечание 4. Для статистики хи-квадрат в полиномиальной схеме при $n,N\to\infty$ так, что $n/N\to\lambda$, из теоремы 1 непосредственно следует, что

$$\ln \mathbf{P}\{\chi^2\geqslant cN\}=-\frac{1}{\sqrt{n}}(c-\lambda-\lambda^2)^{1/2}\ln N(1+o(1)).$$

Этот результат был получен в [10] другим методом.

Список литературы

1. Колчин В. Ф., Один класс предельных теорем для условных распределений. *Лит. матем. сб.* (1968) **8**, №1, 111–126.
2. Колчин В. Ф., *Случайные отображения.* Наука, Москва, 1984.
3. Колчин А. В., Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения. *Дискретная математика* (2003) **15**, №4, 148–157.
4. Медведев Ю. И., Некоторые теоремы об асимптотическом распределении статистики χ^2. *Докл. АН СССР* (1970) **192**, №5, 997–989.
5. Ронжин А. Ф., Критерии для обобщенных схем размещения частиц. *Теория вероятностей и ее применения* (1988) **33**, №1, 94–104.
6. Крамер Г., Об одной новой предельной теореме теории вероятностей. *Успехи матем. наук* (1944) **10**, 166–178.
7. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения,* т. 2. Мир, Москва, 1984.
8. Нагаев А. В., Интегральные предельные теоремы с учетом вероятностей больших уклонений. I. *Теория вероятностей и ее применения* (1969) **14**, №1, 51–63.
9. Федорюк М. В., *Метод перевала.* Наука, Москва, 1977.
10. Quine M. P., Robinson J., Efficiencies of chi-square and likelihood ratio goodness-of-fit tests. *Ann. Stat.* (1985) **13**, 727–742.
11. Ронжин А. Ф., Теорема о вероятностях больших уклонений для разделимых статистик и ее статистическое приложение. *Матем. заметки* (1984) **36**, №4, 610–615.

Статья поступила 01.04.2004.