Б. А. Розенфельд, А. Ф. Масагутова, Фокально-евклидовы и фокально-римановы пространства,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 7, 78–80

Б. А. Розенфельд, А. Ф. Масагутова

УДК 514.764

ФОКАЛЬНО-ЕВКЛИДОВЫ И ФОКАЛЬНО-РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА[1]

§ 1. Фокально-аффинные, фокально-евклидовы и фокально-римановы пространства

В работе [1] были определены *фокально-аффинные пространства* Af_N, т. е. вещественные аффинные пространства A_N, в бесконечно удаленных гиперплоскостях которых заданы поверхности, а в качестве фундаментальных групп рассматриваются подгруппы групп аффинных преобразований, переводящие эти поверхности в себя. В большинстве случаев эти поверхности являются фокальными поверхностями конгруэнций прямых или плоскостей пространств P_{N-1}, являющихся бесконечно удаленными гиперповерхностями пространств A_N. Поэтому пространства Af_N называются фокально-аффинными, а поверхности, определяющие их фундаментальные группы, — *фокальными поверхностями* этих пространств. В том случае, когда фокальные поверхности являются мнимыми поверхностями, фокально-аффинные пространства обозначаются через Af^*_N.

Частными случаями фокально-аффинных пространств являются *биаффинные пространства* B^*_{2n} и B_{2n}, образующие вещественные интерпретации соответственно аффинных пространств $\boldsymbol{C}A_n$ и $'\boldsymbol{C}A_n$ над полем $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел и алгеброй $'\boldsymbol{C}$ двойных чисел $a+be'$ $e^2=1$, *сегреаффинные пространства* As^*_{4n} и As_{4n}, образующие вещественные интерпретации аффинных пространств $\boldsymbol{H}A_n$ и $'\boldsymbol{H}\overline{S}_n$ над телом $\boldsymbol{H}$ кватернионов и алгеброй $'\boldsymbol{H}$ антикватернионов $a+bi+ce+df$, $i^2=-1$, $e^2=1$, $ie=-ei=f$, *сегреаффинные пространства* As_{nm^2}, образующие вещественные интерпретации аффинных пространств $\boldsymbol{R}_mA_n$ над алгебрами $\boldsymbol{R}_m$, вещественных матриц m-го порядка и более общие сегреаффинные пространства $As_{m(N-m-1)}$ определенные В. А. Добромысловым [2], образующие модели многообразия $(m-1)$-плоскостей квазиаффинного пространства A^{m-1}_N (проективного пространства P_N с выделенной $(N-m)$-плоскостью), а также определенные в [3] *липшицаффинные пространства* Al^*_8, Al_8, Al^*_{16} и Al_{16}, образующие модели аффинных прямых $\boldsymbol{O}A_1$ и $'\boldsymbol{O}A_1$ и плоскостей $\boldsymbol{O}A_2$ и $'\boldsymbol{O}A_2$ над альтернативным телом $\boldsymbol{O}$ октав и альтернативной алгеброй $'\boldsymbol{O}$ антиоктав.

Термин „сегреаффинное пространство“ был введен В. А. Добромысловым [2] по аналогии с термином „сегреевклидово пространство“, впервые примененным И. И. Савоськиной [4]. В работах [5] и [6] применялись термины „сегреевклидово пространство“ и „сегриманово пространство“ в разных смыслах. Целью данного краткого сообщения являются определение этих терминов и более общих терминов „фокально-евклидово пространство“ и „фокально-риманово пространство“, а также доказательства основных теорем об этих пространствах. Будем называть *фокально-евклидовым пространством* Ef_N или Ef^*_N евклидово пространство E_N, в бесконечно удаленной гиперплоскости которого задана поверхность, расположенная определенным образом по отношению к абсолюту пространства E_N, а в качестве фундаментальных групп этих пространств рассматриваются подгруппы движений пространства E_N, переводящие в себя эти поверхности. Фокально-евклидовы пространства являются пространствами Af_N и Af^*_N с евклидовой метрикой и обозначаются через Ef_N и Ef^*_N в соответствии с тем, является ли их фокальная поверхность вещественной или мнимой. Заменяя в определении пространств Ef_N и Ef^*_N евклидову метрику псевдоевклидовой метрикой пространства ${}^LE_N$, получим *фокально-псевдоевклидовы пространства* ${}^LEf_N$ и ${}^LEf^*_N$.

Будем называть *фокально-римановым пространством* Vf_N или Vf^*_N риманово пространство V_N, в бесконечно удаленных гиперплоскостях касательных евклидовых пространств E_N которого задана фокальная поверхность пространств Ef_N или Ef^*_N. Заменяя в определении пространств Vf_N или Vf^*_N риманову метрику псевдоримановой метрикой пространства ${}^LV_N$, получим *фокально-псевдоримановы пространства* ${}^LVf_N$ и ${}^LVf^*_N$.

§ 2. Биевклидовы и бирimановы пространства

Уже А. П. Норден [7] и его ученики рассматривали биаффинные пространства с евклидовыми метриками. В случаях евклидовых метрик в пространствах B^*_{2n} и B_{2n} получим соответственно *биевклидовы пространства* Eb^*_{2n} и Eb_{2n}, в случае псевдоевклидовых метрик в пространствах B^*_{2n} и B_{2n} получим соответственно *бипсевдоевклидовы пространства* ${}^lEb^*_{2n}$

---

[1] §§1, 2 и 4 написаны Б. А. Розенфельдом, § 3 — А. Ф. Масагутовой.

и $^nEb_{2n}$. В случае пространств Eb^*_{2n} и Eb_{2n} мнимо сопряженные $(n-1)$-плоскости, составляющие фокальные поверхности пространств B^*_{2n} и B_{2n}, являются соответственно плоскими образующими абсолюта пространства S_{2n-}, являющегося бесконечно удаленной плоскостью пространства Eb^*_{2n}, и парой мнимо сопряженных взаимно полярных $(n-1)$-плоскостей пространства $^nS_{2n-1}$, являющегося бесконечно удаленной гиперплоскостью пространства B_{2n}. В случае пространств $^nEb_{2n}$ и $^nEb^*_{2n}$ вещественные $(n-1)$-плоскости, составляющие фокальные поверхности пространств B^*_{2n} и B_{2n}, являются соответственно плоскими образующими абсолюта пространства $^nS_{2n-1}$ и парой взаимно полярных $(n-1)$-плоскостей пространства S_{2n-1}.

Теорема 1. *Пространства* Eb^*_{2n} *и* $^nEb_{2n}$ *образуют вещественные интерпретации комплексного и двойного эрмитовых евклидовых пространств* $\mathbf{C}\overline{E}_n$ *и* $'\mathbf{C}\overline{E}_n$ ([8], с. 572), *а пространства* $^nEb^*_{2n}$ *и* Eb_{2n} *образуют вещественные интерпретации комплексного и двойного квадратичных евклидовых пространств* $\mathbf{C}E_n$ *и* $'\mathbf{C}E_n$ ([8], сс. 56, 572).

Будем называть *бириманoвыми пространствами* Vb^*_{2n} и Vb_{2n} римановы пространства V_{2n}, в бесконечно удаленных гиперплоскостях касательных евклидовых пространств E^n_2 которых заданы фокальные поверхности пространств Eb^*_{2n} и Eb_{2n}. Заменяя в определении пространств Vb^*_{2n} и Vb_{2n} риманову метрику псевдоримановой метрикой пространства $^nV_{2n}$, получим соответственно *бипсевдоримановы пространства* $^nVb^*_{2n}$ и $^nVb_{2n}$.

Теорема 2. *Пространства* Vb^*_{2n} *и* $^nVb_{2n}$ *образуют вещественные интерпретации комплексного и двойного эрмитовых эллиптических пространств* $\mathbf{C}\overline{S}_n$ *и* $'\mathbf{C}\overline{S}_n$ ([8], с. 622), *а пространства* $^nVb^*_{2n}$ *и* Vb_{2n} *образуют вещественные интерпретации комплексного и двойного квадратичных эрмитовых пространств* $\mathbf{C}S_n$ *и* $'\mathbf{C}S_n$ ([8], сс. 159, 608).

§ 3. Сегреевклидовы и сегрериманoвы пространства

В случае евклидовых метрик в пространствах As^*_M и As_M, $M = nm^2$, получим соответственно сегреевклидовы пространства Es^*_M и Es_M, а в случае псевдоевклидовых метрик в пространствах As^*_M и As_M получим соответственно *сегрепсевдоевклидовы пространства* $^{M/2}Es^*_M$ и $^{M/2}Es_M$.

Теорема 3. *Пространства* Es^*_{4n} *и* $^{2n}Es_{4n}$ *образуют вещественные интерпретации кватернионного и антикватернионного эрмитовых евклидовых пространств* $\mathbf{H}\overline{E}_n$ *и* $'\mathbf{H}E_n$ ([8], с. 572), *а пространства* $^{2n}Es^*_{4n}$ *и* Es_{4n} *образуют вещественные интерпретации кватернионного и антикватернионного квазисимплектических пространств* $\mathbf{H}\overline{S}p^0_n$ *и* $'\mathbf{H}Sp^0_n$ [9].

Теорема 4. *Пространство* Es_{nm^2} *образует вещественную интерпретацию эрмитова евклидова пространства* $\mathbf{R}_m\overline{E}_n$ *над алгеброй* $\mathbf{R}_m$ *вещественных матриц* m*-го порядка* [10].

Будем называть *сегрериманoвыми пространствами* Vs^*_M и Vs_M, $M = nm^2$, римановы пространства V_M, в бесконечно удаленных гиперплоскостях касательных евклидовых пространств E_M которых заданы фокальные поверхности пространств Es^*_M и Es_M. Заменяя в определении пространств Vs^*_M и Vs_M риманову метрику псевдоримановой метрикой пространства $^{M/2}V_M$, получим *сегрепсевдоримановы пространства* $^{M/2}Vs^*_M$ и $^{M/2}Vs_M$.

Теорема 5. *Пространства* Vs^*_{4n} и $^{2n}Vs_{4n}$ *образуют вещественные интерпретации кватернионного и антикватернионного эрмитовых эллиптических пространств* $\mathbf{H}\overline{S}_n$ *и* $'H\overline{S}_n$ ([8], с. 622). *Пространства* $^{2n}Vs^*_{4n}$ *и* Vs_{4n} *образуют вещественные интерпретации эрмитовых симплектических пространств* $\mathbf{H}\overline{S}p_n$ и $'\mathbf{H}Sp_n$ *над теми же алгебрами* [11], *а пространство* V_{nm^2} *образует вещественную интерпретацию эрмитова эллиптического пространства* $\mathbf{R}_m\overline{S}_n$ *над алгеброй* $\mathbf{R}_m$ [12].

Если в общем случае пространство Vs_{nm^2} и многообразие $(m-1)$-плоскостей пространства S_N не обладают комплексной структурой, то наличие такой структуры в пространствах $^{2n}Vs^*_{4n}$ и Vs_{4n} объясняется тем, что абсолютные нуль-системы пространств $\mathbf{H}\overline{S}p_n$ и $'\mathbf{H}\overline{S}p_n$ приводятся к виду $u_i = \overline{x}'i$, где i — фиксированный элемент базиса алгебр $\mathbf{H}$ и $'\mathbf{H}$, а комплексная структура в многообразии прямых пространства S_N объясняется тем, что прямые этого пространства высекают из мнимого абсолюта этого пространства пары мнимо сопряженных точек и на многообразие этих прямых переносится комплексная структура этого мнимого абсолюта. В случае пространства S_3 многообразие прямых обладает, кроме этой комплексной структуры, второй комплексной структурой, определяемой полярами прямых, и двойной структурой, операторы которой являются произведениями операторов двух комплексных структур (эта двойная структура лежит в основе „перенесения Котельникова — Штуди“, в силу которого прямые пространства S_3 изображаются точками сферы пространства $'CE_3$). Аналогично объясняется наличие комплексной структуры в пространствах ${}^{2n}Es^*_{4n}$ и Es_{4n} и в многообразии эллиптических прямых пространства S^M_N.

§ 4. Липшиц-евклидовы и липшиц-римановы пространства

В случае евклидовой метрики в пространстве Al^*_{16} получаем *липшиц-евклидово пространство* El^*_{16}, а в случае псевдоевклидовой метрики в пространстве Al_{16} получаем *липшиц-псевдоевклидово пространство* ${}^8E_{16}$. Будем называть *липшиц-римановым пространством* Vl^*_{16} и *липшиц-псевдоримановым пространством* ${}^8Vl_{16}$ пространства V_{16} и ${}^8V_{16}$, в бесконечно удаленных гиперплоскостях касательных пространств E_{16} и ${}^8E_{16}$ которых заданы фокальные поверхности пространств El^*_{16} и ${}^8El_{16}$.

Теорема 6. *Пространства El^*_{16} и ${}^8El_{16}$ образуют вещественные интерпретации октавной и антиоктавной эрмитовых евклидовых плоскостей $O\overline{E}_2$ и $'O\overline{E}_2$, а пространства Vl^*_{16} и ${}^8Vl_{16}$ образуют вещественные интерпретации октавной и антиоктавной эрмитовых эллиптических плоскостей $O\overline{S}_2$ и $'O\overline{S}_2$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенфельд Б. А., Кострикина Л. П., Степанова Г. В., Юхтина Т. И. Фокально-аффинные пространства // Изв. вузов. Математика.— 1990.— № 5.— С. 60—68.

2. Добромыслов В. А. О геометрии k-квазиаффинного пространства // Ткани и квазигруппы.— Калинин, 1988.— С. 147—155.

3. Розенфельд Б. А., Бурцева Т. А. Липшицианы, липшиц-аффинные пространства и октавная геометрия // Изв. вузов. Математика.— 1990.— № 6.— С. 81—83.

4. Савоськина И. И. Конгруэнции прямых квазиэллиптического пространства S^1_n // Геометрия погруж. многообразий.— М., 1986.— С. 93—99.

5. Масагутова А. Ф. Геометрия многообразия m-плоскостей эллиптического n-пространства.— М., 1989.— 24 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 13.07.89. № 4680— В89.

6. Юхтина Т. И. Геометрия многообразий, погруженных в кватернионные и антикватернионные пространства: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— М., 1989.— 12 с.

7. Норден А. П. Биаффинное пространство и его отображение на себя // Учен. зап. Казанск. ун-та.— 1952.— Кн. 112.— № 10.— С. 3—11.

8. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии.— М.: ГИТТЛ, 1955.— 744 с.

9. Горжалцан И. М. Кватернионная квазисимплектическая геометрия // Учен. зап. Моск. пед. ин-та.— 1967.— № 271.— С. 261—268.

10. Криворучко Г. В. Дифференциальная геометрия вещественных кривых евклидова пространства над алгеброй матриц // Тр. геометрич. семин.— Казань, 1988, вып. 18.— С. 17—21.

11. Румянцева Л. В. Кватернионная симплектическая геометрия // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу.— 1963.— № 12.— С. 287—314.

12. Джавадов М. А. Неевклидовы геометрии над алгебрами // Учен. зап. Азерб. ун-та.— 1957.— № 4.— С. 3—16.

г. Москва
г. Стерлитамак

Поступила
03.08.1989