МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 3 (1980)

ПРЕДЕЛЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ $(C, \varkappa)$-СРЕДНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА И $H^{\varkappa}$-ИНТЕГРАЛ КРОССА

В. А. Скляренко

В настоящей работе продолжаются исследования общности H^k-интеграла Кросса (см. [1]—[3]). Показано, что любая $\overline{P}^2$-интегрируемая функция H^k-интегрируема при $k \geqslant 3$ и значения интегралов совпадают.

Приведем необходимые обозначения и определения. Пусть дана 2π-периодическая суммируемая функция

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Назовем верхним и нижним k-ми чезаровскими производными числами функции $F(x)$ в точке x выражения

$$H^k\overline{D}^2F(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{d^2}{dx^2}[\sigma_n^k(F, x)]$$

и

$$H^k\underline{D}^2F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d^2}{dx^2}[\sigma_n^k(F, x)]$$

соответственно, где $\sigma_n^k(F, x)$ — чезаровские средние порядка k ряда Фурье $F(x)$. Если функция $\Phi(x)$ представима в виде $\Phi(x) = F(x) + Cx^2$, где $F(x)$ — рассмотренная выше функция, то полагаем

$$H^k\overline{D}^2\Phi(x) = 2C + H^k\overline{D}^2F(x), \quad H^k\underline{D}^2\Phi(x) = 2C + H^k\underline{D}^2F(x).$$

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Математические заметки», 1980

Суммируемую 2π-периодическую функцию $F(x)$ будем называть H^k-непрерывной в точке x, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^k(F, x) = F(x)$.

Определение 1. Пусть $f(x)$ определена на $[0, 2\pi]$ и далее продолжена периодически. Число M и функция $M(x)$, определенная во всех точках, образуют верхнюю H^k-аппроксимативную пару $\{M, M(x)\}$ для $f(x)$, если

1) $F(x) = M(x) - Mx^2/(4\pi)$ является 2π-периодической функцией;

2) функция $F(x)$ суммируема на отрезке $[0, 2\pi]$ и H^k-непрерывна при всех x;

3) функция $F(x)$ асимптотически непрерывна и обладает свойством R^*: на любом совершенном множестве $P \subset [0, 2\pi]$ найдется непустая его порция δP, на которой $F(x)$ полунепрерывна сверху;

4) $M(-2\pi) = M(2\pi) = 0$;

5) $H^k\underline{D}^2M(x) \geqslant f(x)$, $H^k\underline{D}^2M(x) > -\infty$ всюду, кроме, быть может, точек счетного множества E;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{d^2}{dx^2}\sigma_n^k(F, x) = 0$ в точках множества E.

Число m и функция $m(x)$ образуют нижнюю H^k-аппроксимативную пару $\{m, m(x)\}$ для функции $f(x)$, если $\{-m, -m(x)\}$ — верхняя аппроксимативная пара для $-f(x)$.

Определение 2. Функция $f(x)$ H^k-интегрируема, если $\inf M = \sup m = I$, где грани берутся по множествам соответствующих H^k-аппроксимативных пар. В этом случае полагаем $(H^k)\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = I$. Функцию $\Phi(x) = \sup M(x) = \inf m(x)$ будем называть H^k-примитивной для $f(x)$.

Приведем ряд определений, связанных с P^2-интегралом Джеймса (см. [4]).

Вторую разность функции $F(x)$ в точке x будем обозначать $\Delta^2F(x; h)$ $(\Delta^2F(x; h) = F(x+h) - 2F(x) + F(x-h))$.

Функцию $F(x)$ называют гладкой в точке x, если

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Delta^2F(x; h) = 0.$$

Под производными числами Шварца $\overline{D}^2F(x)$ и $\underline{D}^2F(x)$ понимают пределы выражения $\frac{1}{h^2}\Delta^2F(x;h)\,(h\to 0)$.

Определение 3. Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Непрерывная функция $M(x)$ $(m(x))$ называется P^2-мажорантой (P^2-минорантой) для $f(x)$ на $[a, b]$, если

1) $M(a) = M(b) = 0$ $(m(a) = m(b) = 0)$;

2) $\underline{D}^2M(x) \geqslant f(x)$ $(\overline{D}^2\, m(x) \leqslant f(x))$, $x \in (a, b)$;

3) $\underline{D}^2M(x) > -\infty$ $(\overline{D}^2m(x) < \infty)$, $x \in (a, b)$.

Функция $f(x)$ называется P^2-интегрируемой на $[a, b]$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся P^2-мажоранта $M(x)$ и P-миноранта $m(x)$ такие, что $m(x) - M(x) < \varepsilon$. В качестве значения P^2-примитивной в точке x принимается $F(x) = \inf m(x) = \sup M(x)$, где грани берутся по множествам минорант и мажорант соответственно.

Заметим, что не теряя общности P^2-интеграла, можно ограничиться рассмотрением всюду конечных функций $f(x)$ (см. [5]).

Для получения с помощью P^2-интеграла числа, обобщающего значение определенного интеграла на отрезке, естественно ввести некоторое его сужение, первый определенный P^2-интеграл (см. [6]).

Определение 4. Пусть определенная на $[a, b]$ функция $f(x)$ после периодического продолжения P^2-интегрируема на $[2a - b, b]$ и $F(a)$ — значение ее P^2-примитивной в точке a. Тогда функцию $f(x)$ назовем P^2-интегрируемой на $[a, b]$ и значение $\overline{P}^2$-интеграла определим равенством $I = -2\pi a/(b - a)$.

ЛЕММА 1. *При* $x \in [0, \pi]$, $n \geqslant 0$,

$$[K_n^3(x)]''\sin x - [K_n^3(x)]'(2 - \cos x) \geqslant 0,$$

где $K_n^\alpha(x)$ — *ядро метода суммирования* (C, α).

Доказательство. Из определения метода (C, α) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha \sigma_n^\alpha r^n = (1 - r)^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n. \qquad (1)$$

Применяя формулу к ряду $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ и дифференцируя, получаем для $\alpha = 3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^3\{[K_n^3(x)]''\sin x - [K_n^3(x)]'(2 - \cos x)\}\, r^n =$$

$$= (1-r)^{-4} \sum_{n=0}^{\infty} [-n^2 \cos nx \sin x + n \sin nx (2-\cos x)] r^n =$$

$$= (1-r)^{-4} \left[\sin x \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(r, x) - (2-\cos x) \frac{\partial}{\partial x} P(r, x) \right],$$

где $P(r, x)$ — ядро Пуассона. Отсюда

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^3 \{[K_n^3(x)]'' \sin x - [K_n^3(x)]' (2-\cos x)\} r^n =$$

$$= 8r \sin x \left[\frac{1-r^2}{2(1-r)^2(1-2r\cos x + r^2)} \right]^2 \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{4r \sin^2 x}{(1-r^2)^2} \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos x + r^2)} + \frac{1-\cos x}{1-r^2} \right\}.$$

Достаточно показать, что последнее выражение имеет положительные коэффициенты в разложении в ряд по степеням r. Имеем

$$\frac{1-\cos x}{1-r^2} + \frac{4r \sin^2 x}{(1-r^2)^2} \left[\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos x + r^2)} \right] =$$

$$= (1-\cos x) \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} + 4r \sin^2 x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^{2n} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n,$$

при этом c_n неотрицательны,

$$c_{2k} = 4 \sin^2 x \left[\sum_{i=0}^{k-1} (k-i) \cos (2i+1) x \right] + 1 - \cos x =$$

$$= 1 - \cos (2k+1) x,$$

$$c_{2k+1} = 4 \sin^2 x \left[\frac{k+1}{2} + \sum_{i=1}^{k} (k+1-i) \cos 2ix \right] =$$

$$= 1 - \cos 2(k+1) x.$$

Используя (1) для $\alpha = 1$, получим

$$\frac{1-r^2}{2(1-r)^2(1-2r\cos x + r^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^1 K_n^1(x) r^n,$$

причем ядро Фейера неотрицательно. Отсюда вытекает утверждение леммы.

ЛЕММА 2. *Пусть* $f(x) \in L(0, \pi)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \int_0^{\pi} f(x) [K_n^3(x)]'' \, dx \leqslant \lim_{h \to 0} \frac{3}{2h^3} \int_0^h [f(h) - f(t)] \, dt. \qquad (2)$$

Доказательство. Приведем некоторые неравенства для производных ядра $K_n^3(x)$:

$$K_n^3(x) = \frac{(n+2)^2 \sin^2 \frac{1}{2} x - \sin^2 \frac{n+2}{2} x}{8A_n^3 \sin^4 \frac{1}{2} x}.$$

Отсюда получаем

$$[K_n^3(x)]' = \frac{1}{8A_n^3} \left[\frac{n+2}{2} \frac{(n+2)\sin x - \sin(n+2)x}{\sin^4 x/2} - \right.$$

$$\left. -2 \frac{(n+2)^2 \sin^2 \frac{1}{2} x - \sin^2 \frac{n+2}{2} x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \sin^4 \frac{1}{2} x} \right].$$

Следовательно,

$$\left| \frac{d}{dx} K_n^3(x) \right| \leqslant \frac{C_1}{nx^3} \quad \text{при} \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \pi. \tag{3}$$

В [7, стр. 94—95] показано, что

$$\left| \frac{d^2}{dx^2} K_n^3(x) \right| \leqslant n^3 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{4}$$

$$\left| \frac{d}{dx} K_n^3(x) \right| \leqslant n^2 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{5}$$

$$\left| \frac{d^2}{dx^2} K_n^3(x) \right| \leqslant \frac{C_2}{nx^4} \quad \text{при} \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \pi. \tag{6}$$

Заметим, что в условиях леммы

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{3}{2h^3} \int_0^h [f(h) - f(t)]\, dt = \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{3}{2h^3} \int_0^h [f(h) - f(t)] \cos t\, dt,$$

следовательно, неравенство (2) достаточно доказать с правой частью, равной

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{3}{2h^3} \int_0^h [f(h) - f(t)] \cos t\, dt.$$

Пусть

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{3}{2h^3} \int_0^h [f(h) - f(t)] \cos t\, dt < A. \tag{7}$$

Докажем, что тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) [K_n^3(x)]''\, dx \leqslant A, \tag{8}$$

откуда будет вытекать утверждение леммы.

Используя (7), возьмем δ, $0 < \delta < \pi$ так, чтобы

$$\frac{3}{2h^3}\int_0^h [f(h) - f(t)]\cos t\,dt < A \quad \text{при} \quad 0 < h < \delta.$$

Из (6) получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)[K_n^3(x)]''\,dx = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta f(x)[K_n^3(x)]''\,dx. \quad (9)$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta f(x)[K_n^3(x)]''\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\delta f(x)\left\{\frac{[K_n^3(x)]'}{\sin x}\right\}'\sin x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\delta f(x)\frac{[K_n^3(x)]'}{\sin x}\cos x\,dx.$$

Второе слагаемое интегрируем по частям

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta f(x)\frac{[K_n^3(x)]'}{\sin x}\cos x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{[K_n^3(x)]'}{\sin x}\int_0^x f(u)\cos u\,du\,\Big|_0^\delta -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_0^\delta\int_0^x f(u)\cos u\,du\left\{\frac{[K_n^3(x)]'}{\sin x}\right\}'dx.$$

Из (3) следует, что проинтегрированный член есть $o(1)$. Отсюда

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta f(x)[K_n^3(x)]''\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\delta\left\{\frac{[K_n^3(x)]'}{\sin x}\right\}'\left[f(x)\sin x - \int_0^x f(u)\cos u\,du\right]dx + o(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{[K_n^3(x)]''\sin x - [K_n^3(x)]'(2-\cos x)}{\sin^2 x}\,x^3\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{x^3}\int_0^x [f(x) - f(u)]\cos u\,du\right\}dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\delta 2\frac{[K_n^3(x)]'(1-\cos x)}{\sin^2 x}\left\{\int_0^x [f(x) - f(u)]\cos u\,du\right\}dx +$$

$$+ o(1) = J_1 + J_2 + o(1).$$

Из (3) и (5) вытекает, что

$$J_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \quad (10)$$

Используя неравенства (3)—(6) и свойства ядра $K_n^3(x)$ нетрудно получить, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta x^3\frac{[K_n^3(x)]''\sin x-[K_n^3(x)]'(2-\cos x)}{\sin^2 x}\,dx=\frac{3}{2}. \tag{11}$$

Из (11), леммы 1 и выбора δ следует

$$J_1\leqslant\frac{2}{3}A\frac{1}{\pi}\int_0^\delta\frac{[K_n^3(x)]''\sin x-[K_n^3(x)]'(2-\cos x)}{\sin^2 x}x^3\,dx=A.$$

Отсюда и из (9) и (10) вытекает (8). Лемма доказана.

Следующая теорема для средних Абеля — Пуассона, доказанная в [8], непосредственно вытекает из леммы 2.

ТЕОРЕМА 1. *Для суммируемой на* $[0, 2\pi]$, 2π-*периодической функции* $F(x)$, *удовлетворяющей в точке* x *условию* $F(x)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(x+t)+F(x-t)}{2}$, *имеет место неравенство*

$$\lim_{h\to 0}\frac{3}{2h^3}\int_0^h[\Delta^2F(x;h)-\Delta^2F(x,t)]\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{d^2}{dx^2}[\sigma_n^3(F,x)]\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{d^2}{dx^2}[\sigma_n^3(F,x)]\leqslant$$
$$\leqslant\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{3}{2h^3}\int_0^h[\Delta^2F(x;h)-\Delta^2F(x;t)]\,dt.$$

Следуя [6] и используя теорему 1, получим теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $f(x)$ — *функция,* $\bar{P}^2$-*интегрируемая на* $[0, 2\pi]$. *Тогда* $f(x)$ H^k-*интегрируема при* $k\geqslant 3$ *и значения интегралов совпадают.*

Доказательство. Так как $f(x)$ P^2-интегрируема на $[0, 2\pi]$, она после периодического продолжения $\bar{P}^2$-интегрируема на $[-2\pi, 2\pi]$ и, следовательно, P^2-интегрируема на отрезках $[0, 2\pi]$ и $[-2\pi, 0]$ с P^2-примитивными $\Phi_1(x)$ и $\Phi_1(x+2\pi)$. По теореме 2 [9] P^2-примитивной $f(x)$ на $[-2\pi, 2\pi]$ является функция

$$\Phi(x)=\begin{cases}\Phi_1(x)+\alpha(|x|-2\pi) & \text{при } x\in[0, 2\pi],\\ \Phi_1(x+2\pi)+\alpha(|x|-2\pi) & \text{при } x\in[-2\pi, 0]\end{cases}$$

при некотором α.

Поскольку $f(x)$ P^2-интегрируема на $[0, 2\pi]$, по лемме 2 [10] для $\varepsilon>0$ найдутся P^2-мажоранта $\psi(x)$ и P^2-миноранта $\varphi(x)$ для $f(x)$ такие, что для выпуклой функции

$\tau_1(x) = \psi(x) - \varphi(x)$ выполнены неравенства $|\tau_1(x)| < \varepsilon$ при $x \in [0, 2\pi]$, $|\tau_1'(0)| < \varepsilon$, $|\tau_1'(2\pi)| < \varepsilon$. Функция

$$\tau(x) = \begin{cases} \tau_1(x) + \frac{1}{2}[\tau_1'(2\pi) - \tau_1'(0) + \varepsilon](|x| - 2\pi) + \\ \qquad + \frac{1}{2}\varepsilon(x^2 - 4\pi^2), \quad x \in [0, 2\pi], \\ \tau_1(x + 2\pi) + \frac{1}{2}[\tau_1'(2\pi) - \tau_1'(0) + \varepsilon](|x| - 2\pi) + \\ \qquad + \frac{1}{2}\varepsilon(x^2 - 4\pi^2), \quad x \in [-2\pi, 0], \end{cases}$$

выпукла на $[-2\pi, 2\pi]$, $\tau(2\pi) = \tau(-2\pi) = 0$, $|\tau(x)| < 55\varepsilon$ при $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

Проверим, что функция $M(x) = \Phi(x) + 4\tau(x)$ и число $M = -\frac{1}{\pi}M(0)$ образуют верхнюю H^k-аппроксимативную пару $\{M, M(x)\}$ для $f(x)$ при $k \geqslant 3$.

1) Используя 2π-периодичность функции $|x| - x^2/(2\pi)$ на $[-2\pi, 2\pi]$, нетрудно убедиться, что $F(x) = M(x) - Mx^2/(4\pi)$ имеет период 2π.

2) и 3) вытекают из непрерывности функции $F(x)$.

4) $M(2\pi) = \Phi(2\pi) + 4\tau(2\pi) = 0 = M(-2\pi)$.

5) Учитывая, что пределы неопределенности $(C, \alpha + h)$-средних ($\alpha > -1$, $h > 0$) ряда заключены между пределами неопределенности (C, α)-средних того же ряда (см. [10, стр. 132]), используя теорему 1 и оценку (6), получим при достаточно малом $\delta > 0$, $k \geqslant 3$

$$H^k \underline{D}^2 M(x) \geqslant H^3 \underline{D}^2 M(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} M(x+t)[K_n^3(t)]'' \, dt \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{h\to 0} \frac{3}{2h^3} \int_0^h [\Delta^2 M(x; h) - \Delta^2 M(x; t)] \, dt \quad \text{при} \quad x \in (0, 2\pi),$$

$$\underline{D}^2(\Phi + \tau)(x) = \underline{D}^2(\Phi_1 + \tau_1)(x) + \varepsilon \geqslant f(x) \geqslant$$
$$\geqslant \overline{D}^2(\Phi_1 - \tau_1)(x) - \varepsilon = \overline{D}^2(\Phi - \tau)(x).$$

Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < t < \delta$

$$t^2 f(x) + \Delta^2\tau_1(x; t) > \Delta^2\Phi(x; t) =$$
$$= \Delta^2\Phi_1(x; t) > t^2 f(x) - \Delta^2\tau_1(x; t).$$

Отсюда, воспользовавшись для выпуклой функции $\tau(x)$

неравенством $\int_0^h [\Delta^2\tau(x;\, h) - 2\Delta^2\tau(x;\, t)]\, dt \geqslant 0$ (см. [9, лемма 1]), получим при $0 < h < \delta$

$$\frac{3}{2h^3}\int_0^h [\Delta^2 M(x;\, h) - \Delta^2 M(x;\, t)]\, dt >$$

$$> \frac{3}{2h^3}\int_0^h [h^2 f(x) - \Delta^2\tau_1(x;\, h) + 4\Delta^2\tau_1(x;\, h) - t^2 f(x) -$$

$$- \Delta^2\tau_1(x;\, t) - 4\Delta^2\tau_1(x;\, t)]\, dt = \frac{3}{2h^3}\int_0^h [h^2 - t^2] f(x)\, dt +$$

$$+ \frac{3}{2h^3}\int_0^h [3\Delta^2\tau_1(x;\, h) - 5\Delta^2\tau_1(x;\, t)]\, dt \geqslant f(x).$$

Следовательно, при $x \in (0,\, 2\pi)$ $H^k\underline{D}^2 M(x) \geqslant f(x) > -\infty$. Аналогичное неравенство имеет место и для $x \in (-2\pi,\, 0)$. При $x = 0$ из гладкости функции $\Phi(x)$ получаем, что

$$H^k\underline{D}^2 M(0) \geqslant H^3\underline{D}^2 M(0) \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{h\to 0} \frac{3}{2h^3}\int_0^h \{\varepsilon(h - t) + [o(h) + o(t)]\}\, dt = \infty > f(x) > -\infty.$$

То есть 5) выполнено.

6) Проверять не нужно, так как E пусто. Аналогично доказывается, что функция $m(x) = \Phi(x) - 4\tau(x)$ и число $m = -m(0)/\pi$ образуют при $k \geqslant 3$ нижнюю H^k-аппроксимативную пару $\{m,\, m(x)\}$. При этом $0 < M - 2\alpha = 2\alpha - m < 16\varepsilon$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что число $2\alpha = -\Phi(0)/\pi$ является H^k-интегралом функции $f(x)$.

Отметим, что одновременно доказано, что H^k-примитивная $f(x)$ на $[-2\pi,\, 2\pi]$ при $k \geqslant 3$ совпадают. Теорема доказана.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
15.I.1979

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Cross G., An integral for Cesaro summable series, Canad. Math. Bull., **10**, № 1 (1967), 85—97.

[2] Скворцов В. А., Общность H^k-интеграла Кросса, Вестник МГУ, Сер. матем., механ., 5 (1968), 19—23.

[3] Скляренко В. А., Связь между H^k и P-интегралами, Вестник МГУ, Сер. матем., механ., 2 (1971), 69—77.

[4] James R. D., A generalised integral. II, Canad. J. Math., **3** (1950), 297—306.
[5] Скляренко В. А., Некоторые свойства P^2-примитивной, Матем. заметки, **12**, № 6 (1972), 693—700.
[6] Скворцов В. А., Взаимосвязь между AP-интегралом Тейлора и P^2-интегралом Джеймса, Матем. сб., **70**, № 3 (1966), 380—393.
[7] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 2, М., «Мир», (1965).
[8] Verblunsky S., On the theory of trigonometric series. I, Proc. London Math. Soc., **34** (1932), 441—456.
[9] Скворцов В. А., По поводу определений P^2- и SCP-интегралов, Вестник МГУ, Сер. матем., механ., 6 (1966), 12—19.
[10] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1, М., «Мир», (1965).