Н. М. Зобин, В. Г. Зобина, Интерполяция в пространствах, имеющих заданные симметрии, *Функц. анализ и его прил.*, 1978, том 12, выпуск 4, 85–86

*Функциональный анализ и его приложения,*
т. 12, вып. 4, 1978, 85—86

УДК 513.88

# ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ, ИМЕЮЩИХ ЗАДАННЫЕ СИММЕТРИИ

Н. М. Зобин, В. Г. Зобина

0. Пусть $(V, V')$ — дуальная пара пространств над $\mathbf{R}$, $G$ — группа (слабо) непрерывных линейных операторов в пространстве $V$. Нашей целью является описание и изучение достаточных наборов выпуклых слабо замкнутых $G$-инвариантных множеств $\{S_\alpha\}$ $(S_\alpha \subset V)$, т. е. таких наборов, что если для некоторого линейного непрерывного оператора $L$ при любом $\alpha$ верны включения $LS_\alpha \subset S_\alpha$, то верно включение $LS \subset S$ для любого $G$-инвариантного выпуклого замкнутого $S \subset V$. Если группа $G$ содержит $-1$, то наша задача совпадает с задачей о строгой интерполяции линейных операторов (см. [1], [2]). Случай пространств над $\mathbf{C}$ требует незначительных модификаций.

В этой заметке мы ограничимся конечной размерностью, хотя результаты п. 1 можно перенести и на бесконечномерный случай. Подробно бесконечномерный случай будет рассмотрен в другой статье.

1. Будем предполагать, что замкнутая выпуклая оболочка орбиты любого элемента — ограниченная окрестность нуля *). Опишем конструкцию достаточных наборов. Возьмем произвольное $x \in V$ ($\|x\| = 1$ для определенности) и построим поляру **) его орбиты $(\mathrm{Orb}\, x)^0$. Это выпуклое ограниченное множество в $V'$. Соберем его крайние точки в множество $\mathrm{Extr}^*(x)$. Возьмем произвольный $y \in \mathrm{Extr}^*(x)$ и построим поляру его орбиты $(\mathrm{Orb}^*\, y)^0$ под действием сопряженной группы. Это также выпуклое ограниченнее множество, крайние точки которого составляют множество $\mathrm{Extr}_x(y)$. Положим

$$N_1 = \{z\colon \|z\| = 1,\ \mu z \in \bigcup_{\substack{x \in V\\ \|x\|=1\\ y\in \mathrm{Extr}^*(x)}} \mathrm{Extr}_x(y)\}, \ \ldots$$

$$\ldots,\ N_k = \{z\colon \|z\| = 1,\ \mu z \in \bigcup_{\substack{x \in N_{k-1}\\ y\in \mathrm{Extr}^* x}} \mathrm{Extr}_x(y)\}, \ \ldots$$

Ясно, что $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots \supseteq N_k \supseteq \ldots$ Обозначим через $\mathrm{Co}_G z$ выпуклую замкнутую оболочку орбиты $z$. Это $G$-инвариантное выпуклое замкнутое множество.

Теорема 1. *Наборы* $\{\mathrm{Co}_G z\}$ $(z \in N_k)$ *достаточные* $(k = 1, 2, \ldots)$.

2. Пусть теперь $V$ — действительное (конечномерное) пространство и $G$ — конечная неприводимая группа Кокстера (см. [3]). В этом случае удобно считать, что $V' = V$ и двойственность задается $G$-инвариантным скалярным произведением. Ясно, что тогда $N_1 \subseteq \bigcup_{x\in V} \mathrm{Extr}^*(x)$.

Предложение 1. $\bigcup_{x\in V} \mathrm{Extr}^*(x)$ *совпадает с крайними лучами камер Вейля группы $G$.*

В частности, векторы из $N_1$ являются крайними лучами камер Вейля.

Группа $G$ описывается своим графом Кокстера (см. [3]). В графе Кокстера каждой грани камеры Вейля сопоставлена вершина. Поскольку камера Вейля — симплициальный конус, то для каждой грани найдется один и только один крайний луч, не лежащий в этой грани. Поэтому будем считать, что каждому крайнему лучу камеры Вейля сопоставлена вершина графа Кокстера.

Предложение 2. $N_1 = N_2 = \ldots$, *и* $z \in N_1$ *тогда и только тогда, когда соответствующая вершина графа Кокстера — висячая (т. е. из нее выходит только одно ребро) или, что равносильно,* $\mathrm{Stab}_G(z) = \{g \in G,\ gz = z\}$ *действует неприводимо на* $z^\perp$.

Теорема 2. *Если граф Кокстера не имеет точек ветвления, то в любой конечный достаточный набор входят множества* $\{\pm \mathrm{Co}_G z\}$ $(z \in N_1)$. *В случае, когда граф Кокстера имеет точку ветвления, множества* $\{\pm \mathrm{Co}_G z\}$ $(z \in N_1)$ *входят в любой конечный достаточный набор, составленный из множеств вида* $\mathrm{Co}_G x$, $x \in V$.

В случае группы октаэдра теорема 1 и предложение 2 дают конечномерную теорему Б. С. Митягина [2]: любое симметричное пространство строго интерполяционно

---

*) В случае компактной группы $G$ это условие эквивалентно неприводимости.

**) Под *полярой* множества $W \subset V$ мы понимаем множество $W^0 = \{y \in V'\colon \langle x, y\rangle \leqslant 1 \ \ \forall x \in W\}$.

между $l_1^N$ и $l_\infty^N$. Теорема 2 дополнительно утверждает, что $l_1^N$ и $l_\infty^N$ входят в любой конечный «достаточный» набор.

3. Положение с минимальностью, а тем более единственностью наборов $\{\mathrm{Co}_G z\}$ ($z \in N_k$) может значитеьно усложниться, если группа $G$ не порождена отражениями. Так, например, для группы поворотов плоскости $\mathbf{R}^2$ на углы, кратные $\pi/2$, $N_1 = N_2 = \ldots =$ единичной окружности *). В этом случае можно показать, что если $G$-инвариантное множество $\Sigma$ не всюду плотно на окружности, то набор $\{\mathrm{Co}_G\, z\}_{z\in\Sigma}$ недостаточен.

4. Мы глубоко благодарны С. Г. Крейну, предложившему нам эту тему. Мы обсуждали результаты этой работы с М. Г. Зайденбергом, Е. М. Семеновым, В. И. Овчинниковым и И. Я. Шнейбергом и благодарны им за ценные замечания.

Примечание при корректуре. Недавно второй автор получил полное описание достаточных наборов, состоящих из множеств вида $\mathrm{Co}_G\, z$, и получил окончательные результаты о минимальности и единственности таких наборов. Статья с изложением этих результатов направлена в печать.

Казанский химико-технологический институт им. С. М. Кирова

Поступило в редакцию 16 июня 1977 г.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г. (ред.), Функциональный анализ (СМБ), М., «Наука», 1972. 2. Митягин Б. С., Матем. сб. 66 (1965), 473—482. 3. Бурбаки Н., Группы Ли и алгебры Ли, гл. 4—6, М., «Мир», 1972.

*) Этот пример предложен А. Г. Насыбуллиным.