



A. I. Khisamutdinov, Statistical simulation of one type of pairs of random variables with the use of fictitious jumps,  
*Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2007, Volume 47, Number 1, 162–173

<https://www.mathnet.ru/eng/zvmmf355>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

April 20, 2025, 23:04:57



УДК 519.676

## СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОГО ТИПА ПАР СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ “ФИКТИВНЫХ СКАЧКОВ”

© 2007 г. А. И. Хисамутдинов

(630090 Новосибирск, пр-т акад. Коптюга, 3, Ин-т геофиз. СО РАН)

e-mail: [khisam@emf.ru](mailto:khisam@emf.ru)

Поступила в редакцию 26.05.2005 г.  
Переработанный вариант 12.11.2005 г.

Рассматривается статистическое моделирование посредством техники отбора пары случайных величин  $(T, \mathcal{U})$ ,  $T \in [0, +\infty)$ ,  $\mathcal{U} \in \mathcal{R}^d$ ,  $d \geq 1$ . Задано совместное распределение пары в форме, которая объединяет родственные задачи из разных областей; оно имеет вид

$$\mathbf{P}\{T \in dt, \mathcal{U} \in du\} = f(t, u) \exp\left(-\int_0^t \int_{\mathcal{R}^d} f(t', u') m(du') dt'\right) dtm(du),$$

где  $f$  и  $m$  – некоторые функция и мера соответственно. Первая из величин  $T$  – хорошо известное случайное время ожидания. Конструируется метод розыгрыша пары  $(T, \mathcal{U})$  вводом реализации вспомогательной марковской последовательности пробных пар, и рассматриваются его применения в переносе частиц и кинетике разреженных газов. Библ. 18.

**Ключевые слова:** статистическое моделирование, пара случайных величин, совместное распределение, техника отбора, марковская последовательность пробных пар, трудоемкость алгоритма, розыгрыш соударений частиц, метод Монте-Карло.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Идеи “отбора” являются основой многих эффективных методов для моделирования различных случайных величин (см., например, [1]–[3]). В настоящей работе эти идеи и представления используются для конструирования методов розыгрыша пары случайных величин  $(T, \mathcal{U})$ :  $T \in [0, +\infty)$ ,  $\mathcal{U} \in \mathcal{R}^d$ ,  $d \geq 1$ . Совместное распределение пары имеет вид

$$\mathbf{P}\{T \in dt, \mathcal{U} \in du\} = w^{(1)}(t, u) p(t, u) \exp\left(-\int_0^t w(t') dt'\right) m(du) dt, \quad (1.1)$$

где

$$w(t) = \int_{\mathcal{R}^d} w^{(1)}(t, u) p(t, u) m(du), \quad (1.2)$$

$w^{(1)}(\cdot, \cdot)$  – некоторая неотрицательная измеримая функция на  $[0, +\infty) \otimes \mathcal{R}^d$ ,  $m(du)$  есть  $\sigma$ -конечная мера на  $\sigma$ -алгебре борелевых множеств из  $\mathcal{R}^d$ , а  $p(t, u)$  по переменной  $u$ ,  $u \in \mathcal{R}^d$ , является плотностью относительно меры  $m(du) \forall t \in [0, +\infty)$  и есть измеримая функция по  $t \forall u \in \mathcal{R}^d$ . Важными в данной работе частными случаями  $m$  являются лебегова мера ( $m(dm) = du$ ) и считающая мера; последняя является атомической, и каждый атом наделен массой 1. Первая из величин  $T$  – случайное время ожидания с показательным распределением

$$\mathbf{P}\{T > t\} = \exp\left(-\int_0^t w(t') dt'\right), \quad 0 \leq t < +\infty, \quad (1.3)$$

а условное распределение  $d$ -мерной случайной величины  $\mathcal{U}$  имеет вид

$$\mathbf{P}\{\mathcal{U} \in du | T = t\} = w^{(1)}(t, u)p(t, u)m(du)/w(t), \quad u \in \mathcal{R}^d. \quad (1.4)$$

Например, пара  $(T, \mathcal{U})$  характерна для марковских скачкообразных процессов, в том числе в их применениях в переносе частиц и в кинетике разреженных газов; причем распределение (1.4) для  $\mathcal{U}$  входит в вероятностную “смесь”, задающую распределение значений скачка в момент  $T = t$ . Следует заметить, что о многомерных случайных величинах нередко говорят, как о случайных векторах или о случайных точках; данное замечание в случае  $d \geq 2$  касается как  $\mathcal{U}$ , так и других случайных величин, которые вводятся ниже. Эффективность методов розыгрыша распределения (1.1) зависит от свойств функций  $w^{(1)}$  и  $p$ . В физических применениях функции  $w^{(1)}$  и  $w$  можно охарактеризовать как парциальную и полную частоты взаимодействий.

Методы отбора и их разновидности применяются для моделирования распределений вида (1.3) и (1.4). В физике переноса частиц известен метод (дополнительного)  $\delta$ -рассеяния, или “выравнивания полной частоты (полного сечения)”, в применении к (1.3); как правило, его применяют, чтобы обойти трудности, связанные с вычислением интеграла  $\int_0^t w(\kappa) d\kappa$ . При этом сама функция  $w$  считается легко вычислимой. Рассмотрение и формальное обоснование метода отбора для (1.3), в котором функция  $w$  мажорируется постоянной и разновидностью которого является названный метод выравнивания  $w$ , было дано в [4]. Описания в связи с переносом частиц метода выравнивания  $w$  и вообще приема “введение дополнительного  $\delta$ -рассеяния” (и истоков последнего) имеются в [5]–[7] и др. Пример моделирования (1.4) в переносе частиц в случае, когда  $w^{(1)}$  – функция вида

$$w^{(1)}(t, u) = \text{const}|v_0 - u|, \quad d = 3, \quad u \in \mathcal{R}^3, \quad v_0 \in \mathcal{R}^3, \quad (1.5)$$

а  $p$  является плотностью нормального (максвелловского) распределения, дается работой [8];  $v_0$  – некоторый заданный вектор. Здесь посредством того самого метода отбора (в узком смысле) или исключения, которое было определено в [1], обходится трудность вычисления  $w$ , т.е. интеграла (1.2). В настоящей работе рассматривается общий абстрактный случай, когда функция  $w(\cdot)$  не является “легко вычислимой” и поэтому последовательное моделирование  $T$  согласно (1.3), а затем  $\mathcal{U}$  согласно условному распределению (1.4) не является эффективным; мы рассматриваем случай, когда более эффективными, т.е. менее трудоемкими, оказываются алгоритмы методов, связанных с непосредственным моделированием совместного распределения (1.1) с помощью техники отбора посредством марковской последовательности “пробных” пар.

В переносе частиц и кинетике разреженных газов способ дополнительного  $\delta$ -рассеяния как метод выравнивания уже парциальной частоты  $w^{(1)}$  применяется для непосредственного розыгрыша совместного распределения (1.1). Данный метод имеет ясную физическую интерпретацию, и именно на основе физических соображений он рассматривался в ряде работ, включая [9], [10]. Отметим характерные черты способов дополнительного  $\delta$ -рассеяния для розыгрыша как (1.3), так и (1.1). В этих способах соответствующая частота взаимодействий является ограниченной и в качестве верхней границы для этой частоты взаимодействий назначается постоянная; разность между верхней границей и частотой трактуется как частота “фиктивных рассеяний”, которые не изменяют скоростей, энергий и положений соударяющихся частиц, т.е. не изменяют соответствующей фазовой плотности частиц. Будем трактовать оба названных метода выравнивания как разновидности методов отбора (см. п. 2.3).

В настоящей работе, рассматривая указанный выше абстрактный случай, мы вводим некоторую общую конструкцию – вспомогательный марковский скачкообразный процесс и на его основе рассматриваем розыгрыш пары  $(T, \mathcal{U})$ . Конструируется метод отбора, использующий некоторые функции  $w_M^{(1)}$  и  $W$ , посредством которых задается скачкообразный процесс (и последовательность пробных пар);  $w^{(1)}(\cdot) \leq w_M^{(1)}(\cdot)$ , а  $w(\cdot) \leq W(\cdot)$ . Заметим, что функция  $w_M^{(1)}$  может быть и неограниченной. В разд. 3 и 4 выделены два подслучая вида функции  $w^{(1)}$ . В обоих подслучаях рассматриваются конкретные приложения

$$\int_{\mathcal{R}^d} p(t, u)m(du) < +\infty, \quad w(t) \leq \text{const} < +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t w(\kappa) d\kappa = +\infty.$$

Символ  $\mathbf{P}\{\cdot\}$  обозначает везде вероятность соответствующего события. Далее множество интегрирования не указывается, если оно совпадает со всем или полным множеством определения подынтегрального выражения. Термины “легко вычисляемая” функция, трудность вычисления и менее трудоемкий используются в данной работе в контексте вычислительной математики и математического моделирования и не будут более уточняться и формализовываться. В тексте их истолкование не вызывает неоднозначности.

## 2. ОБЩАЯ КОНСТРУКЦИЯ

2.1. Пусть  $w_M^{(1)}(t, u)$  и  $W(t)$  – измеримые функции на  $[0, +\infty) \otimes \mathcal{R}^d$  и  $[0, +\infty)$  соответственно и такие, что

$$w^{(1)}(t, u) \leq w_M^{(1)}(t, u), \quad w_M(t) \equiv \int w_M^{(1)}(t, u)p(t, u)m(du) \leq W(t) \leq C_W < +\infty,$$

где  $C_W$  – некоторая постоянная. Введем теперь (вспомогательный) марковский скачкообразный процесс  $\{(\alpha_t, Y_t)\}_0^\infty$  с состояниями в  $\{\bar{f}, p\bar{h}\} \otimes \mathcal{R}^d$ , где  $\bar{f}$  и  $p\bar{h}$  – символы, соответственно, фиктивного и истинного (“физического”) скачков и где  $\alpha_t$  означает тип скачка, который совершается последним в интервале  $[0, t)$  (или непосредственно предшествует моменту  $t + 0$ ). Процесс считается непрерывным справа, и полагается, что в начальный момент  $t = 0$  задано состояние после “нулевого” скачка  $t_0 = 0$  и  $\alpha_{t_0} = \bar{f}$ . Пусть  $v$  и  $t_v$  – соответственно, случайные номер и момент скачка такие, что  $v \geq 1$ ,  $t_v > 0$  и впервые  $\alpha_{t_v} = p\bar{h}$ , т.е.  $\alpha_{t_0} = \dots = \alpha_{t_{v-1}} = \bar{f}$ ,  $\alpha_{t_v-0} = \bar{f}$ , а  $\alpha_{t_v} = p\bar{h}$ . В процессе  $\{(\alpha_t, Y_t)\}_0^\infty$  нас будут интересовать именно этот случайный момент  $t_v$  и значение  $Y_{t_v}$ , т.е. пара  $(t_v, Y_{t_v})$ . Будем использовать далее обозначение  $Y_j \equiv Y_{t_j}, j \geq 1$ . Нам достаточно задавать процесс  $\{(\alpha_t, Y_t)\}_0^\infty$  как марковскую последовательность (цепь) случайных пар

$$(t_0, Y_0), \dots, (t_v, Y_v), \quad v \geq 1, \tag{2.1}$$

тем самым фактически трактуя состояния со значением  $p\bar{h}$  как поглощающие состояния. Переходная плотность вероятностей цепи (2.1), а именно плотность вероятностей события  $(t', \alpha_{t'}, Y_{t'} \rightarrow t, \alpha_t, Y_t)$  при условии, что  $\alpha_{t'} = \bar{f}$ , конструируется в форме произведения плотностей  $p_1$  и  $p_2$ :

$$p_1(t' \rightarrow t | \alpha_{t'} = \bar{f}) p_2(\alpha_{t'}, Y_{t'} | t).$$

Следствием этого определения является такое свойство: если  $\alpha_t = \bar{f}$ , то моделирование  $Y_t$  можно не производить, поскольку распределение следующей после  $(\alpha_t, Y_t)$  пары не зависит от  $Y_t$ . Учитывая данное свойство, случайную величину  $Y_0$  в (2.1) можно, в частности, не доопределять.

Введем (вспомогательную) последовательность случайных величин  $\{T'_j\}_{j=1}^\infty$  такую, что

$$t_j = t_{j-1} + T'_j, \quad j \geq 1.$$

Теперь в случае использования этих величин последовательность (2.1) и, главное, пара  $(t_v, Y_v)$  в ней определяются следующими положениями.

1. Все  $T'_j, 1 \leq j$ , являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами,

$$\forall j \geq 1 \quad \mathbf{P}\{T'_j > \Delta t | t_{j-1} = t' \geq 0, \alpha_{t_{j-1}} = \bar{f}\} = \exp\left(-\int_0^{\Delta t} W(t' + \kappa) d\kappa\right), \quad \Delta t \geq 0.$$

2.  $\forall j \geq 1$

$$\mathbf{P}\{v > j | t_j = t\} \equiv \mathbf{P}\{\alpha_{t_j} = \alpha_{t_{j-0}} = \bar{f} | t_j = t\} = c_1(t) + c_2(t),$$

$$c_1(t) = 1 - w_M(t)/W(t), \quad c_2(t) = w_M(t)/W(t) - w(t)/W(t).$$

3. Все  $Y_j, j \geq 1$ , являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами,

$$\mathbf{P}\{Y_j \in du | t_j = t\} = \frac{w_M(t)w_M^{(1)}(t, u)}{W(t)w_M(t)}p(t, u)m(du).$$

4а.  $\forall j \geq 1 \quad \mathbf{P}\{v = j | t_j = t, Y_j = u\} \equiv \mathbf{P}\{\alpha_{t_j} = p\bar{h} | t_j = t, Y_j = u\} = w^{(1)}(t, u)/w_M^{(1)}(t, u).$

4б.  $\mathbf{P}\{v > j | t_j = t, Y_j = u\} = 1 - w^{(1)}(t, u)/w_M^{(1)}(t, u).$

Нетрудно видеть, что

$$c_2(t) = \int \mathbf{P}\{v > j | t_j = t, Y_j = u\} \mathbf{P}\{Y_j \in du | t_j = t\} = \int (1 - w^{(1)}(t, u)/w_M^{(1)}(t, u)) \frac{w_M^{(1)}(t, u)}{W(t)} p(t, u)m(du)$$

и что

$$\mathbf{P}\{Y_j \in \mathcal{R}^d | t_j = t\} = \frac{w_M(t)}{W(t)} = 1 - c_1(t).$$

**Алгоритм моделирования перехода**

$$(t_{j-1} = t', \alpha_{t'} = \bar{f}, Y_{j-1}) \longrightarrow (t_j, \alpha_{t_j}, Y_j), \quad j \geq 1, \tag{2.2}$$

предлагаемый здесь, имеет следующий вид.

**Шаг 1.**  $t_j = t' + T'_j$ ,  $T'_j$  разыгрывается согласно ее плотности вероятностей  $W(t' + \Delta t) \exp[-\int_0^{\Delta t} W(t' + \kappa) d\kappa]$ ; полагается  $t_j = t' + \Delta t$ .

**Шаг 2.** С вероятностью  $c_1(t)$  полагается  $\alpha_{t_j} = \bar{f}$  (и  $v > j$ ), т.е. последовательность продолжается; с п. 1) начинается моделирование следующего  $(j + 1)$ -го перехода.

**Шаг 3.** С вероятностью  $(1 - c_1(t)) = w_M(t)/W(t)$  моделируется  $Y_j$  согласно распределению  $\frac{w_M^{(1)}(t, u)}{w_M(t)} \cdot p(t, u)m(du)$  и полагается  $Y_j = u$ .

**Шаг 4а.** С вероятностью  $w^{(1)}(t, u)/w_M^{(1)}(t, u)$  цепь обрывается,  $\alpha_{t_j} = p\bar{h}$  и  $v = j$ ; пара  $(t_v, Y_v)$  принимается в качестве  $(T, \mathcal{U})$ .

**Шаг 4б.** С вероятностью  $1 - [w^{(1)}(t, u)/w_M^{(1)}(t, u)]$  последовательность продолжается,  $\alpha_{t_j} = \bar{f}$  и  $v > j$ . С шага 1 начинается моделирование следующего,  $(j + 1)$ -го перехода.

В данном алгоритме нигде не фигурируют интегралы  $\int w^{(1)}(t, u)p(t, u)m(du)$  и  $\int_0^{\Delta t} w_M(\kappa)d\kappa$ . Собственно говоря, суть предлагаемого метода в том и состоит, чтобы обойтись без вычисления этих двух интегралов. Справедлива

**Теорема 1.** В случайном процессе  $\{(\alpha_v, Y_v)\}_0^\infty$  с состояниями в  $\{\bar{f}, p\bar{h}\} \otimes \mathcal{R}^d$  случайная пара  $(t_v, Y_v)$ ,  $v \geq 1$ , идентична паре  $(T, \mathcal{U})$ , т.е. распределена согласно (1.1).

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} \forall j \geq 1 \quad \mathbf{P}\{Y_j \in du \wedge v = j | t_j = t\} &= \frac{w_M(t)w_M^{(1)}(t, u)}{W(t)w_M(t)}p(t, u)m(du) \frac{w^{(1)}(t, u)}{w_M^{(1)}(t, u)} = \\ &= \frac{w^{(1)}(t, u)}{W(t)}p(t, u)m(du), \end{aligned}$$

что отличается от (1.4) только множителем, зависящим от  $t$ . Следовательно,  $Y_v$  эквивалентна  $\mathcal{U}$ .

Условная вероятность обрыва последовательности  $\forall j \geq 1$  есть

$$\mathbf{P}\{v = j | t_j = t\} = \int \frac{w^{(1)}(t, u)}{W(t)} p(t, u) m(du) = \frac{w(t)}{W(t)}.$$

Рассмотрим случайную последовательность моментов скачков:  $\{t_0, \dots, t_v; v \geq 1\}$  из (2.1). Здесь  $\mathbf{P}\{t_v > t\} \equiv \mu_f(t), t \geq 0$ , – вероятность такого события: “1-й истинный скачок произойдет после момента  $t$ ”. В соответствии с определением процесса  $\{(\alpha_t, Y_t)\}_0^\infty$  имеет место “управляющее” уравнение

$$\mu_f(t) = \exp\left(-\int_0^t W(\kappa) d\kappa\right) + \int_0^t dt' \mu_f(t') W(t') \left[1 - \frac{w(t')}{W(t')}\right] \exp\left(-\int_{t'}^t W(\kappa) d\kappa\right), \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

Введем такие обозначения:

$$\tau_w(t' \rightarrow t) \equiv \int_{t'}^t d\kappa W(\kappa), \quad \tau_\Delta(t' \rightarrow t) \equiv \int_{t'}^t d\kappa [W(\kappa) - w(\kappa)], \quad W_i - w_i \equiv W(t_i) - w(t_i), \quad i \geq 1.$$

Пусть  $\vartheta: \mathcal{R} \rightarrow \{0, 1\}$  – хорошо известная функция:  $\vartheta(u) = 1$ , если  $u \geq 0$ , и  $\vartheta(u) = 0$ , если  $u < 0$ . В этих обозначениях, например, уравнение (2.3) примет вид

$$\mu_f(t) = \exp[-\tau_w(0 \rightarrow t)] + \int_0^t dt' \mu_f(t') [W(t') - w(t')] \exp[-\tau_w(t' \rightarrow t)].$$

Применяя теперь к событию  $\{t_v > t\}$  формулу полной вероятности, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{t_v > t\} &= \mathbf{P}\{t_1 > t\} + \sum_{j=1}^\infty \mathbf{P}\{t_{j+1} > t \geq t_j \geq \dots \geq t_1 \geq 0\} = \exp[-\tau_w(0 \rightarrow t)] + \\ &+ \sum_{j=1}^\infty \int_0^t \dots \int_0^{t_j} dt_1 \dots dt_j \exp[-\tau_w(0 \rightarrow t_1)] [W_1 - w_1] \times \\ &\times \prod_{i=2}^j \vartheta(t_i - t_{i-1}) \exp[-\tau_w(t_{i-1} \rightarrow t_i)] [W_i - w_i] \exp[-\tau_w(t_j \rightarrow t)] = \\ &= \exp[-\tau_w(0 \rightarrow t)] \left(1 + \sum_{j=1}^\infty \int_0^t dt_j (W_j - w_j) \int_0^{t_j} dt_{j-1} (W_{j-1} - w_{j-1}) \dots \int_0^{t_2} dt_1 (W_1 - w_1)\right). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что записанная выше сумма для  $\mu_f$  есть ряд Неймана для уравнения (2.3). Произвольное  $j$ -е слагаемое,  $j \geq 1$ , под знаком последней суммы преобразуется к виду  $\frac{[\tau_\Delta(0 \rightarrow t)]^j}{j!}$ .

Ряд этих слагаемых, включая 1 в качестве начального члена, является сходящимся на  $[0, +\infty)$ , и его сумма есть непрерывная функция  $\exp[\tau_\Delta(0 \rightarrow t)]$ . (Отметим, что  $0 \leq \tau_\Delta(0 \rightarrow t) \leq C_w t$  на  $[0, +\infty)$ .) В итоге

$$\mathbf{P}\{t_v > t\} = \exp[-\tau_w(0 \rightarrow t)] \exp[\tau_\Delta(0 \rightarrow t)] = \exp\left(-\int_0^t d\kappa w(\kappa)\right) = \mathbf{P}\{T > t\}.$$

Итак, пары  $(t_v, Y_v)$  и  $(T, \mathcal{U})$  эквивалентны и теорема доказана.

Случайная последовательность  $\{t_0, \dots, t_v; v \geq 1\}$  относится к известному типу процессов “размножение – гибель” (см., например, [11, т. 1]), и уравнение (2.3), естественно, непосредственно

относится к нему. Дифференциальная форма уравнения (2.3) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\mu_f(t) + W(t)\mu_f(t) = (W(t) - w(t)) \cdot \mu_f(t), \quad \mu_f(0) = 1. \quad (2.4)$$

Таким образом, предлагаемый метод связан с переходом от задачи

$$\frac{d}{dt}\mu_f(t) + w(t)\mu_f(t) = 0, \quad \mu_f(0) = 1,$$

к эквивалентной задаче (2.4).

В случайной последовательности (2.1) моменты  $t_1, \dots, t_{v-1}$  являются моментами вспомогательных искусственных скачков. Этим объясняется название метода: “метод с фиктивными скачками”.

Марковское свойство случайной переменной  $t_v$  позволяет возобновлять моделирование этой переменной от произвольного (достигнутого) момента  $t^{(1)} > t_0$  (см., например, [11, т. 2]).

Пусть моменты  $t_1, \dots, t_{v-1}$  в последовательности (2.1) рассматриваются как такие моменты  $t^{(1)}$ , и пусть от каждого из них розыгрыш  $t_v$  (и  $Y_v$ ) возобновляется заново; тогда мы получаем иной алгоритм моделирования ( $t_v, Y_v$ ), в котором фиктивные и истинные (“физические”) скачки как бы равноправны. Именно этот иной алгоритм с равноправными типами скачков присущ методам выравнивания  $w$  и  $w^{(1)}$  в переносе частиц и физической кинетике.

Шаг 3 в алгоритме (2.2) содержит возможности модификаций метода, связанных с различными способами розыгрыша  $Y_r$ . Если поставить условие минимальности трудоемкости алгоритма метода, то, естественно, это условие уменьшает количество приемлемых модификаций. Как будет видно, содержание разд. 4 есть своего рода иллюстрация и подтверждение данного высказывания.

2.2. Она из двух величин, определяющих эффективность предлагаемого метода, есть среднее число  $\bar{v} \equiv \mathcal{M}(v)$  скачков в последовательности (2.1), т.е. среднее число проб для реализации (1.1). Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(v) &= \mathcal{M}\left(\sum_{j=1}^v 1_{\bar{f}}(\alpha_{t_j-0})\right) = \mathcal{M}\left(\frac{1}{w(t_v)/W(t_v)}\right) = \\ &= \mathcal{M}\left(\frac{W(T)}{w(T)}\right) = 1 + \int_0^{+\infty} w_f(t) \exp\left(-\int_0^t w(t') dt'\right) dt, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $1_{\bar{f}}(\cdot)$  – индикатор состояния  $\bar{f}$ ,  $w_f(t) \equiv [W(t) - w(t)]$ . Несложно видеть, что если  $w(t) \geq w_{\min} > 0$ , то  $\bar{v} \leq C_w/w_{\min}$ , и если  $w_f(\cdot) \leq C_f \cdot w(\cdot)$ , где  $C_f$  – некоторая заданная постоянная, то  $\bar{v} \leq 1 + C_f$ . Также ясно, что если в качестве  $W(\cdot)$  могут быть выбраны функции  $W'(\cdot)$  и  $W''(\cdot)$ , причем такие, что  $W'(\cdot) \leq W''(\cdot)$ , то  $\bar{v}' \leq \bar{v}''$ , где  $\bar{v}'$  и  $\bar{v}''$  отвечают  $W'(\cdot)$  и  $W''(\cdot)$  соответственно.

2.3. Выделим два типа назначений пары функций  $(w_M^{(1)}, W)$ , которые как бы дополняют друг друга. В первом типе имеет место равенство  $w_M^{(1)}(t, u) = w^{(1)}(t, u)$  всюду (и  $W(t) \geq w(t)$ ). Во втором типе назначений  $W(t) = w_M(t)$  (и  $w_M^{(1)}(t, u) \geq w^{(1)}(t, u)$ ).

Для первого типа вследствие назначений оказывается, что  $w_M(t) = w(t)$ ,  $c_2(t) = 0$  и  $c_1(t) = 1 - w(t)/W(t)$ . Шаг 4б алгоритма перехода (2.2) аннулируется, шаг 4а выполняется всегда (с вероятностью 1). Сам алгоритм вырождается в последовательный розыгрыш: сначала  $T$ , а затем  $U$  согласно (1.3) и (1.4) соответственно. При этом метод розыгрыша  $T$  выступает как некоторое обобщение метода отбора из [4] и метода выравнивания  $w$  для случая теории переноса (см. также [12]). Действительно, в первом типе при  $W(t) = \text{const} \geq w(t)$  метод розыгрыша  $T$  как раз является методом из [4].

Для второго типа оказывается, что  $c_1(t) = 0$ ; шаг 2 алгоритма моделирования перехода (2.2) аннулируется, а шаг 3 выполняется с вероятностью 1 (т.е. всегда). Если теперь полагать  $w_M^{(1)}(t, u) =$

$= \text{const} \geq w^{(1)}(t, u)$ , то получаем непосредственный аналог метода выравнивания  $w^{(1)}(\cdot, \cdot)$  из физической кинетики и переноса частиц.

Итак, попутно с методом для розыгрыша (1.1) оказывается построенным (как вырожденный случай при  $w_M^{(1)}(\cdot) = w^{(1)}(\cdot)$ ) и метод для розыгрыша (1.3) с использованием функции  $W$  (и  $w$ ). Уравнение (2.3) и задача (2.4) имеют непосредственное отношение к этому методу.

Мы трактуем методы “выравнивания частот с дополнительными  $\delta$ -рассеяниями” (ВЧд $\delta$ -Р), применяемые в физической кинетике и переносе частиц, как разновидности соответствующих методов отбора. Дело в том, что методы ВЧд $\delta$ -Р появляются (или вводятся) в рамках представлений о взаимодействии частиц или даже в контексте моделирования некоторого исходного марковского (физического) процесса с этими взаимодействиями. И решение задачи о розыгрыше распределений (1.3) или (1.1) посредством этих методов проступает (проявляется) как розыгрыш некоторой новой расширенной модели взаимодействий или как моделирование нового марковского однородного процесса, в определенном смысле эквивалентных исходным (модели и процессу); причем вводимое фиктивное  $\delta$ -рассеяние рассматривается как равноправное с физическими взаимодействиями. Все это приводит к некоторым дополнительным ограничениям на выбор верхней границы для соответствующих частот взаимодействий в сравнении с возможностями в рамках формальной техники отбора для заданных отдельных распределений. Отсутствие дополнительных ограничений в аналогичном методе отбора позволяет уменьшать трудоемкость розыгрыша, и при этом могут вводиться неоднородные марковские процессы с фиктивными взаимодействиями. Отметим, что о равноправности взаимодействий (фиктивных и истинных) уже говорилось выше.

### 3. СЛУЧАЙ, КОГДА $w^{(1)}$ – КОМПОЗИЦИЯ ФУНКЦИЙ, ОДНА ИЗ КОТОРЫХ НЕПРЕРЫВНАЯ ВОГНУТАЯ

3.1. Рассмотрим моделирование пары  $(T, \mathcal{U})$  для случая, когда функция  $w^{(1)}$  является композицией двух заданных функций  $w_1(\cdot)$  и  $g(\cdot, \cdot)$ ,  $w^{(1)}(t, u) = w_1(g(t, u))$ . Предварительно дополним, что  $\mathcal{R}^d$  рассматривается как евклидово пространство, и обозначим через  $w_1'(\cdot) \equiv \frac{dw_1(\cdot)}{dg}$  производную функции  $w_1(\cdot)$ ,  $g_0(t) \equiv g(t, u)|_{u=0}$ . Полагаем следующее:

$$w_1: [0, +\infty) \Rightarrow [0, +\infty);$$

$w_1$  есть непрерывная вогнутая (или выпуклая вверх) функция на  $[0, +\infty)$ ; далее, функция  $w_1$  дифференцируема на  $[0, +\infty)$ , за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых производная  $w_1'$  может претерпевать разрыв I рода (конечный скачок);

$$g: [0, +\infty) \otimes \mathcal{R}^d \Rightarrow [0, +\infty);$$

$$\forall (t, u) \in [0, +\infty) \otimes \mathcal{R}^d \quad g(t, u) \leq g_0(t) + \lambda|u|, \quad 0 < \lambda < +\infty;$$

$g_0(t)$  – ограниченная кусочно-непрерывная функция на  $[0, +\infty)$ .

Из определения  $w_1$  следует, что она является монотонно неубывающей функцией на  $[0, +\infty)$ . В качестве примера функции  $g$  приведем функцию  $|v_0(t) - u|$ , где  $v_0(t)$  – некоторая заданная вектор-функция на  $[0, +\infty)$  со значениями в  $\mathcal{R}^d$ ; в этом примере постоянная  $\lambda$  равна 1. В качестве другого примера укажем функцию  $g_{\text{ex}}$  такую, что  $g_{\text{ex}}(t, u) \forall t$  – дифференцируемая по  $u$  на  $\mathcal{R}^d$  функция такая, что  $|\nabla_u g_{\text{ex}}(t, u)| \leq 1$ .

Введем для рассматриваемой функции  $w^{(1)}(t, u) = w_1(g(t, u))$  (мажорирующую) функцию  $w_M^{(1)}(t, u)$ , полагая

$$w_M^{(1)}(t, u) = w_1(g_0(t)) + \lambda w_1'(g_0(t))|u|, \quad (t, u) \in [0, +\infty) \otimes \mathcal{R}^d;$$

в точках, где производная  $w_1'$  претерпевает разрыв, считается, что она равна либо значению какой-нибудь из односторонних производных, либо значению соответствующей линейной комбинации этих двух односторонних производных. Справедлива



**Лемма.** *Всюду на  $[0, +\infty) \otimes \mathcal{R}^d$  выполняется неравенство*

$$w_1(g(t, u)) \leq w_M^{(1)}(t, u). \tag{3.1}$$

**Доказательство.** Вследствие монотонного неубывания функции  $w_1$  имеем

$$w_1(g(t, u)) \leq w_1(g_0(t) + \lambda|u|).$$

Используя теперь вогнутость функции  $w_1$ , получаем неравенство

$$w_1(g_0(t) + \lambda|u|) \leq w_1(g_0(t)) + \lambda w_1'(g_0(t))|u|$$

и в итоге – неравенство (3.1). Доказательство завершено.

Для записи функции  $w_M$  предварительно обозначим  $n(t) \equiv \int p(t, u)m(du)$ ,  $t \in [0, +\infty)$ , и пусть

$$\int |u| p(t, u)m(du) = n(t)\langle |u| \rangle(t), \quad t \in [0, +\infty);$$

$\langle |u| \rangle(t) \equiv \langle |u| \rangle_t$  – среднее значение функции  $|u|$  по распределению  $p(t, u)m(du)$ . Теперь после интегрирования  $w_M^{(1)}(t, u)$  функция  $w_M(t)$  записывается в виде

$$w_M(t) = n(t)[w_1(g_0(t)) + \lambda w_1'(g_0(t))\langle |u| \rangle(t)], \quad t \in [0, +\infty).$$

Говоря о реализации метода, а именно о розыгрыше  $\Upsilon$  на шаге 3 алгоритма моделирования перехода (2.2), мы предполагаем, что среднее значение  $\langle |u| \rangle(t)$  является легко вычисляемой функцией  $\forall t$  и что существуют моделирующие формулы с малым количеством вычислительных операций для розыгрыша распределений  $p(t, u)m(du)$  и  $|u|p(t, u)m(du)$ . Распределение для  $\Upsilon$  представляется в виде смеси указанных двух распределений; действительно,

$$\frac{w_M^{(1)}(t, u)}{w_M(t)} p(t, u)m(du) = \left[ \frac{w_1(g_0(t))n(t)}{w_M(t)} \frac{1}{n(t)} + \frac{\lambda w_1'(g_0(t))n(t)\langle |u| \rangle(t)}{w_M(t)} \frac{|u|}{n(t)\langle |u| \rangle(t)} \right] p(t, u)m(du).$$

Рассмотрим случай, когда функции  $n(t)$  и  $\langle |u| \rangle(t)$  (наряду с  $g_0(t)$ ) являются ограниченными кусочно-непрерывными. Пусть  $t_0^* = 0, t_1^*, \dots, t_L^*, t_{L+1}^* = +\infty$  – границы интервалов, внутри каждого из которых эти три функции непрерывны,  $1 \leq L < +\infty$ . Используя свойства рассматриваемых функций, положим  $W$  на каждом из интервалов  $(t_l^*, t_{l+1}^*, 0 \leq l \leq L$ , равной выражению

$$W(t) = \sup n(t)[w_1(\sup g_0(t)) + \lambda w_1'(\inf g_0(t))\sup \langle |u| \rangle(t)], \tag{3.2}$$

где верхние и нижние грани определяются в соответствующем интервале. Вместо верхних и нижних граней в (3.2) могут быть использованы соответствующие верхние и нижние границы; это приводит к увеличению  $W(\cdot)$ . Функция  $W$  является ограниченной ступенчатой функцией на

$[0, +\infty)$ , ее интеграл  $\int_0^t W(t')dt'$  – “легко вычисляемая” функция.

3.2. Сделаем одно замечание, которое расширяет класс применений описанного в п. 3.1 метода. Пусть функция (частота)  $w_1$  не имеет всех тех свойств, которые предопределены ей в п. 3.1, а функция  $\tilde{w}_1 : [0, +\infty) \Rightarrow [0, +\infty)$  обладает всеми этими свойствами и такова, что  $w_1(\cdot) \leq \tilde{w}_1(\cdot)$  на  $[0, +\infty)$ . Но функция

$$\tilde{w}_1(g_0(t)) + \tilde{w}_1'(g_0(t))\lambda|u|, \quad \tilde{w}_1'(g) \equiv \frac{d\tilde{w}_1}{dg}(g), \tag{3.3}$$

является мажорирующей также и для  $w_1(g(t, u))$ , поскольку

$$w_1(g(t, u)) \leq \tilde{w}_1(g(t, u)) \leq \tilde{w}_1(g_0(t)) + \tilde{w}_1'(g_0(t))\lambda|u|.$$

Итак, функция (3.3) может быть назначена в качестве  $w_M^{(1)}(t, u)$  для  $w_1(g(t, u))$  и тем самым определяет соответствующий метод “с фиктивными скачками” из п. 3.1.

3.3. Метод с фиктивными скачками использовался в [13], [14] для розыгрыша взаимодействий “перезарядка” (charge exchange) между нейтральным атомом  $H$  и протоном плазмы. Как известно, в физических явлениях переноса атомов водорода в Гелиосфере этот тип взаимодействий является важнейшим. Пусть атом стартует в момент  $t = 0$  из точки с радиус-вектором  $r_0 \in \mathcal{R}^3$  и движется в неоднородной среде (протонной плазме) с постоянной скоростью  $v \in \mathcal{R}^3$ . Пусть  $v_p = v_p(r) \in \mathcal{R}^3$  – случайная скорость протона среды в точке  $r$ ; пространственная плотность протонов  $n_p(r)$  и плотность их распределения по скоростям  $f_M(v_p|r)$  считаются стационарными и заданными;  $f_M(v_p|r)$  – плотность максвелловского (нормального) распределения со средним  $V_p(r)$  и дисперсией одной компоненты скорости  $\sigma^2(r)$ ;  $u = u_p - V_p$ ,  $\sigma^2(r) = k_B T_M(r)/m_p$ ,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $m_p$  – масса протона,  $T_M$  – температура газа протонов. В применении к данной проблеме величины в (1.1) суть

$$d = 3, \quad m(du) = du, \quad p(t, u) = n_p(r)f_M(v_p|r), \quad g(t, u) = |v - v_p(r)| = |v_0(r) - u|,$$

$$v_0(r) = v - V_p(r), \quad \langle |u| \rangle(t) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma(r), \quad \text{где } r = r_0 + tv,$$

$$w_1(g) = bg[A - \ln(g)]^2,$$

где  $b$  и  $A$  – заданные положительные постоянные (см. [15]), причем в физически значимой области скоростей  $\ln(g) < A - 2$ .

Была введена (вспомогательная) функция  $\tilde{w}_1(\cdot)$ , описанная в п. 3.2, а именно полагалось

$$\tilde{w}_1(g) = \begin{cases} w_1(\varepsilon) + (g - \varepsilon)w_1'(\varepsilon), & \text{если } 0 \leq g < \varepsilon, \\ w_1(g), & \text{если } \varepsilon \leq g \leq A - 2, \\ w_1[\exp(A - 2)], & \text{если } \exp(A - 2) < g. \end{cases}$$

Далее, метод с фиктивными скачками для розыгрыша момента взаимодействия  $T$  и скорости протона  $v_p = V_p + \mathcal{U}$  был построен с мажорирующей функцией (3.3). Интервал  $[0, \varepsilon]$  с достаточно малым значением  $\varepsilon$  выделен с целью, чтобы производная  $\tilde{w}_1'(\cdot)$  существовала всюду на  $[0, +\infty)$ . Заметим, что  $\lim_{g \rightarrow 0+} \tilde{w}_1'(g) = +\infty$  при  $g \rightarrow 0+0$ . Нетрудно видеть, что функцию типа  $\tilde{w}_1(g) = w_1(\varepsilon + g)$ , где  $\varepsilon = \varepsilon(g) \geq 0$ , также можно использовать.

В рассмотренной задаче о распространении атомов  $H$  функции  $n_p(r)$ ,  $\sigma^2(r)$  и  $V_p(r)$  являлись осесимметричными и кусочно-постоянными. Поэтому функции  $n(t) = n_p(r(t))$  и  $\langle |u| \rangle(t) = \sqrt{(8/\pi)\sigma(r(t))}$  оказываются ступенчатыми и определение значений  $\sup n(t)$  и  $\sup \langle |u| \rangle(t)$  в каждом из интервалов их постоянства  $(t_l^*, t_{l+1}^*)$ ,  $0 \leq l \leq L$ , не представляет труда. Специфичным оказалось то, что  $g_0(t) = |v_0(r(t))|$  – непрерывная, монотонно невозрастающая функция на каждом из интервалов ее непрерывности  $(t_l^*, t_{l+1}^*)$ ,  $0 \leq l \leq L$ . Поэтому значения  $\sup g_0(t)$  и  $\inf g_0(t)$  в формуле (3.2) для  $W(t)$  являются односторонними пределами в граничных точках соответствующего интервала  $(t_l^*, t_{l+1}^*)$ ,  $0 \leq l \leq L$ . Указанная монотонность  $g_0(t)$  является следствием факта, что радиальная компонента скорости  $V_p(\cdot)$  всегда направлена от центральной оси этого поля скоростей. Действительно, в силу осесимметричности  $V_p(\cdot)$  имеем  $(g_0)^2 = |v|^2 + |V_p|^2 - 2v_z V_{pz} - 2v_\rho V_{p\rho}$ , где  $v_z$ ,  $v_\rho$  и  $V_{pz}$ ,  $V_{p\rho}$  – ортогональные проекции векторов  $v$  и  $V_p$  на ось  $OZ$  и вектор  $\{r_x, r_y, 0\}$ ,  $r = \{r_x, r_y, r_z\}$ . В каждом из интервалов постоянства  $V_{pz}$  и  $V_{p\rho}$  – постоянные и  $V_{p\rho} \geq 0$ , функция же  $v_\rho(t)$  монотонно неубывающая;  $v_\rho(t) \{ [r_x(t)]^2 + [r_y(t)]^2 \}^{1/2} = v_x r_x(t) + v_y r_y(t) + v_\rho(t) \rightarrow (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$  при  $t \rightarrow +\infty$  (а угол между  $\{v_x, v_y, 0\}$  и  $\{r_x(t), r_y(t), 0\}$  является монотонно убывающей до 0 функцией).

В процессе вычислений в [13], [14] оценивалась также эффективность метода. Вычислялось среднее число  $\bar{v}$  скачков, необходимое для реализации данного физического взаимодействия; оказалось, что  $\bar{v} \approx 1.4$ . Это говорит о достаточно высокой эффективности метода с фиктивными скачками для розыгрыша взаимодействия перезарядки.

4. СЛУЧАЙ, КОГДА  $w_M^{(1)}$  – ДВУХСТУПЕНЧАТАЯ ФУНКЦИЯ

4.1. Рассмотрим моделирование пары  $(T, \mathcal{U})$  для случая, когда  $w^{(1)}$  – ограниченная функция,  $p(t, u) = p(u)$  и когда возможно определить некоторое семейство множеств  $(G_0)|_t \subset \{u: w^{(1)}(t, u) = 0\}|_t$  таких, что  $\forall t \geq 0, \int_{(G_0)|_t} p(u)m(du) > 0$ . Положим

$$\forall t \geq 0 \quad w_M^{(1)}(t, u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \in (G_0)|_t, \\ W^{(1)}, & \text{если } u \notin (G_0)|_t, \quad 0 < W^{(1)} < +\infty, \end{cases} \quad (4.1)$$

и пусть  $m_p\{du\} = p(u)m(du)$ . Заметим, что мера  $m_p\{\cdot\}$  не зависит от  $t$ . Тогда

$$w_M(t) = \int w_M^{(1)}(t, u)p(u)m(du) = W^{(1)}(m_p\{\mathcal{R}^d\} - m_p\{(G_0)|_t\}),$$

причем считается, что  $m_p\{(G_0)|_t\} = \text{const}$ , т.е. не зависит от переменной  $t$ , хотя поэлементный состав  $(G_0)|_t$  может варьироваться (изменяться). Далее полагаем

$$W(t) = w_M(t) \equiv W^{(1)}m_p\{\mathcal{R}^d \setminus (G_0)|_t\} = \text{const},$$

и тем самым метод розыгрыша пары определен. Характерным в методе для настоящего случая (помимо равенства  $c_1(t) = 0$ ) является то, что розыгрыш  $Y_j$  на шаге 3 алгоритма моделирования перехода производится на множестве  $\mathcal{R}^d \setminus (G_0)|_t$  согласно вероятности  $m_p\{du\}/m_p\{\mathcal{R}^d \setminus (G_0)|_t\}$ . Нетрудно видеть из формулы (2.5), что среднее число  $\bar{v}$  пробных пар в методе с (4.1) меньше, чем в методе с  $w_M^{(1)}(t, u) = W^{(1)} \forall u \in \mathcal{R}^d$  и с  $W(t) = W^{(1)}m_p\{\mathcal{R}^d\}$ , т.е. в методе, аналогичном методу выравнивания  $w^{(1)}$  из физической кинетики.

4.2. Содержание настоящего пункта имеет тесную связь с методами работ [16]–[18], где речь идет об эволюции разреженного газа в соответствии с нелинейным уравнением Больцмана и пара  $(T, \mathcal{U})$  есть, соответственно, случайный момент соударения какой-либо пары в заданной системе частиц и случайный номер соударяющейся пары. Пусть  $N$  – заданное число всех частиц газа,  $N_{pf} \equiv N(N-1)/2$  – полное число всех пар, а  $\mathcal{N}$  – множество натуральных чисел. В данном применении сначала конкретизируем величины в (1.1):  $d = 1, m(du)$  – считающая мера, сосредоточенная на  $\mathcal{N}$ ,  $p(t, u) = p(u) = 1$ , если  $1 \leq u \leq N_{pf}$ , и  $p(u) = 0 \forall u > N_{pf}$ ;  $w^{(1)}(t, u)$  – заданная частота взаимодействия пары с номером  $u$ ,  $w(t) = \sum_{u=1}^{N_{pf}} w^{(1)}(t, u)$ . В применении к разреженному газу множество  $(G_0)|_t$  есть совокупность назначенных пар частиц; количество таких пар  $N_p^{(0)} = m_p\{(G_0)|_t\}$ . В методе настоящего пункта на шаге 3 алгоритма моделирования перехода (2.2) распределение случайной величины  $Y_j = Y_t, t_j = t$ , является атомическим равномерным на множестве  $\{1, 2, \dots, N_{pf}\} \setminus (G_0)|_t$ , которое содержит  $N_{pf} - N_p^{(0)}$  пар. Если рассматривается рассеяние по закону “упругих шаров” с заданным интегральным сечением рассеяния  $\sigma_0 = \text{const}$ , то в качестве  $W^{(1)}$ , как правило, назначают величину  $2v_M \cdot \sigma_0$ , где  $v_M$  – максимум модулей скоростей всех частиц системы. Применение метода позволяет избежать подсчета  $w$  (посредством перебора всех пар частиц) и дает существенный выигрыш в трудоемкости.

Если  $(G_0)|_t = \emptyset$  и  $N_p^{(0)} = 0$ , то в качестве одного из (двух) частных случаев получается метод выравнивания  $w^{(1)}$  (null collision), рассмотренный впервые в [10]. Достаточно типичным для пространственно-неоднородных течений газов является случай, когда  $(N_{pf} - N_p^{(0)}) \ll N_{pf}$ ; именно этот случай мы подразумеваем, когда идет речь о классе задач, к которым следует применять метод с двухступенчатой функцией  $w_M^{(1)}$ . Если  $N_p^{(0)} > 0$ , то одной из проблем является модификация метода и организация вычислений с тем, чтобы избежать трудоемкого перебора всех  $N_{pf}$  пар. Некоторые модификации этого метода, в которых не производится перебор всех пар, излагались в [16]–[18].

4.3. Опишем модифицированный метод, в котором производится перебор списка всех частиц (но не всех пар частиц). Выделим из множества всех  $N_{\text{pf}}$  пар подмножество  $\{1, 2, \dots, N_{\text{pf}}\} \setminus (G_0)_t$  и, предполагая это возможным, представим его в виде

$$\bigcup_{k=1}^N k \otimes (N_{1M})|_{k,t}, \quad (4.2)$$

где  $(N_{1M})|_{k,t}$  – подмножество частиц в количестве  $N_{1M}$ , каждой из которых предписано взаимодействовать с частицей  $k$ ;  $N_{1M} \leq (N-1)$ . В (4.2) каждая пара  $u \equiv (k, l)$  представлена дважды;  $N_p^{(0)} = N(N-1 - N_{1M})/2$ . Итак,

$$w_M^{(1)}(t, (k, l)) = \begin{cases} W^{(1)}, & \text{если } (k, l) \in \bigcup_{k=1}^N k \otimes (N_{1M})|_{k,t}, \\ 0, & \text{если } (k, l) \notin \bigcup_{k=1}^N k \otimes (N_{1M})|_{k,t}, \end{cases}$$

$w_M(t) = \frac{NN_{1M}}{2} W^{(1)}$ . В данном модифицированном методе адекватным является рассмотрение двумерной случайной величины  $\mathcal{U} = (\mathcal{H}, \mathcal{L})$  со значениями в  $\mathcal{R}^2$ ;  $m(du)$  – считающая мера, сосредоточенная на множестве  $\mathcal{N} \otimes \mathcal{N}$ ;  $u = (k, l)$ :

$$p(k, l) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } (1 \leq k, l \leq N) \wedge (k \neq l), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В немодифицированном методе (предыдущего пункта) розыгрыш пары  $(\mathcal{H}, \mathcal{L})$  должен производиться равномерно на множестве (4.2) согласно вероятностям  $(1/N) \times (1/N_{1M})$ ; при этом вероятность принятия пары есть  $w^{(1)}(t, (k, l)/W^{(1)}$ . В модифицированном методе розыгрыш первой частицы пары, т.е.  $\mathcal{H}$ , производится равномерно согласно вероятностям  $1/N$ , а розыгрыш второй частицы пары, т.е.  $\mathcal{L}$ , при условии, что  $\mathcal{H} = k$ , перестроен. Пусть  $k \otimes (N_k^{(1)})|_t$  – подмножество пар в множестве  $k \otimes (N_{1M})|_{k,t}$  таких, что  $w^{(1)}(t, (k, l)) > 0$ ,

$$\forall t \geq 0 \quad (N_k^{(1)})|_t = \{l: w^{(1)}(t, (k, l)) > 0, 1 \leq l \leq N\}, \quad 1 \leq k \leq N;$$

пусть  $N_k^{(1)}(t)$  – количество частиц в множестве  $(N_k^{(1)})|_t$ , а  $W_k^{(1)}(t)$  – некоторая верхняя граница для частоты  $w^{(1)}$  на множестве  $k \otimes (N_k^{(1)})|_t$ ,  $W_k^{(1)}(t) \leq W^{(1)}$ . Тогда

$$\frac{1}{N_{1M}} \times \frac{w^{(1)}(t, (k, l))}{W^{(1)}} = \frac{N_k^{(1)}(t) W_k^{(1)}(t)}{N_{1M} W^{(1)}} \frac{1}{N_k^{(1)}(t)} \frac{w^{(1)}(t, (k, l))}{W_k^{(1)}(t)}. \quad (4.3)$$

В соответствии с правой частью равенства (4.3) изменим шаги 3 и 4 алгоритма моделирования перехода из разд. 2. Напомним предварительно, что  $c_1(t) = 0$ .

**Шаг 3'.** Равномерно на  $\{1, 2, \dots, N\}$  моделируется  $\mathcal{H}$  и полагается  $\mathcal{H} = k$ ; с вероятностью  $1 - \frac{N_k^{(1)}(t) W_k^{(1)}(t)}{N_{1M} W^{(1)}}$  полагается  $\alpha_{t_j} = \bar{f}$  (и  $v > j$ ) и с шага 1 начинается моделирование следующего,

$(j+1)$ -го перехода; с вероятностью  $\frac{N_k^{(1)}(t) W_k^{(1)}(t)}{N_{1M} W^{(1)}}$  равномерно на множестве  $(N_k^{(1)})|_t$  моделируется  $\mathcal{L}$ ; полагается  $(\mathcal{H}, \mathcal{L}) = (k, l)$ .

**Шаг 4а'.** С вероятностью  $\frac{w^{(1)}(t, (k, l))}{W_k^{(1)}(t)}$  цепь обрывается,  $\alpha_{t_j} = p\bar{h}$  (и  $v = j$ ); пара  $(t_v, (\mathcal{H}_v, \mathcal{L}_v))$  принимается в качестве  $(T, (\mathcal{H}, \mathcal{L}))$ .

**Шаг 4б'.** С вероятностью  $1 - \frac{w^{(1)}(t, (k, l))}{W_k^{(1)}(t)}$  последовательность продолжается,  $\alpha_{t_j} = \bar{f}$  (и  $v > j$ ) и с шага 1 начинается моделирование следующего,  $(j + 1)$ -го перехода.

Отметим, что в данном методе посредством перебора списка  $N$  частиц определяются множества  $(N_k^{(1)})_j$ , скалярные величины  $N_k^{(1)}(t)$  и, вообще говоря,  $W_k^{(1)}(t)$ ; предполагается, что  $N_k^{(1)}(t) \leq N_{1M}$  и что число  $N \times N_{1M}$  является четным. В случае если рассматривается рассеяние по закону “упругих шаров”, в качестве  $W_k^{(1)}(t)$  можно определять  $W_k^{(1)}(t) = (|v_k(t)| + v_M)\sigma_0$ , где  $v_k(t)$  – скорость частицы  $k$ .

Автор благодарен А.А. Могольскому и С.А. Ухинову за обсуждения отдельных моментов настоящей работы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *von Neumann J.* Various techniques used in connection with random digits // NBS Appl. Math. Ser. 1951. № 12. P. 36–38.
2. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.
3. *Ермаков С.М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975.
4. *Coleman W.A.* Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique to radiation transport problems // Nucl. Sci. Engng. 1968. V. 32. № 1. P. 76–81.
5. *Spanier J., Celbard E.M.* Monte Carlo principles and neutron transport problems. Addison-Wesley Publ. Co., 1969.
6. *Михайлов Г.А.* Метод моделирования длины свободного пробега частицы // Атомная энергия. 1970. Т. 28. С. 175.
7. *Франк-Каменецкий А.Д.* Моделирование траекторий нейтронов при расчете реакторов методом Монте-Карло. М.: Атомиздат, 1978.
8. *Brown H.D.* A Monte Carlo study of neutron thermalization // J. Nucl. Energy. 1959. V. 8. P. 177–186.
9. *Lin S.L., Bardsley J.N.* Monte Carlo simulation of ion motion in drift tubes // J. Chem. Phys. 1977. V. 66. № 2. P. 435–445.
10. *Koura K.* Null-collision technique in the direct-simulation Monte Carlo method // Phys. Fluids. 1986. V. 29. № 11. P. 3509–3511.
11. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.
12. *Ермак С.М., Жиглявский А.А.* Обобщение “метода максимального сечения” для моделирования распределений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 3. С. 757–761.
13. *Khisamutdinov A.I., Phedorin M.A., Ukhinov S.A.* Non-stationary transport of neutral atoms in the Heliosphere // Proc. COSPAR Colloquia Ser. Outer Heliosphere: Next Frontiers (held in Potsdam, Germany, July 24–28, 2000). Potsdam: Pergamon, 2001. P. 317–321.
14. *Khisamutdinov A.I., Phedorin M.A.* Non-stationary transport of hydrogen neutral atoms in the Heliosphere // Transport Theory and Statist. Phys. 2002. V. 31. № 7. P. 635–658.
15. *Maher L.J., Tinsley B.A.* Atomic hydrogen escape rate due to charge exchange with hot plasmaspheric ions // J. Geophys. Res. 1977. V. 82. № 4. P. 689–695.
16. *Хисамутдинов А.И., Сидоренко Л.Л.* Алгоритмы имитационного статистического моделирования разреженных газов: Препринт № 4. Новосибирск: Ин-т матем. СО СССР, 1989. 22 с.
17. *Хисамутдинов А.И., Сидоренко Л.Л.* Алгоритмы метода Монте-Карло с непрерывным временем для кинетического уравнения разреженных газов // Матем. моделирование. 1994. Т. 6. № 2. С. 48–60.
18. *Khisamutdinov A.I.* On development of continuous time Monte Carlo methods for problems of Boltzmann equation with external forces // Transport Theory and Statist. Phys. 2004. V. 33. № 1. P. 69–89.