Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский, Об экстремальных задачах типа Никольского–Бернштейна и Турана для преобразования Данкля, *Чебышевский сб.*, 2019, том 20, выпуск 3, 394–400

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-20-3-394-400

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-394-400

Об экстремальных задачах типа Никольского – Бернштейна и Турана для преобразования Данкля[1]

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

Изучается взаимосвязь между экстремальными задачами типа Турана и Никольского – Бернштейна на $\mathbb{R}^d$ с весом Данкля. Задача Турана состоит в нахождении супремума заданного момента положительно определенной (относительно преобразования Данкля) функции с носителем в евклидовом шаре и фиксированным значением в нуле. В точном L^1-неравенстве Никольского–Бернштейна оценивается супремум-норма лапласиана Данкля целой функции экспоненциального сферического типа с единичной L^1-нормой. Также отмечается связь с экстремальными задачами типа Фейера и Бомана. Преобразование Данкля покрывает случай классического преобразования Фурье в случае единичного веса.

Неравенства Никольского - -Бернштейна являются классическими в теории приближений, а задачи типа Турана имеют приложения в метрической геометрии. Тем не менее мы доказываем, что они имеют один и тот же ответ, который явно выписывается. Простое доказательство опирается на наши старые результаты из теории решения экстремальных задач для преобразования Данкля.

Ключевые слова: вес Данкля, преобразование Фурье–Данкля, целая функция экспоненциального сферического типа, положительно определенная функция, константа Никольского–Бернштейна, экстремальная задача Турана–Фейера.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский. Об экстремальных задачах типа Никольского – Бернштейна и Турана для преобразования Данкля // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 394–400.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-394-400

Extremal Nikolskii – Bernstein- and Turán-type problems for Dunkl transform[2]

D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovolskii

Gorbachev Dmitry Viktorovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Dobrovol'sky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate professor of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

We study the interrelation between the extremal Turán-type problems and Nikolskii – Bernstein problems for nonnegative functions on $\mathbb{R}^d$ with the Dunkl weight. The Turán problem is to find the supremum of a given moment of a positive definite (with respect to the Dunkl transform) function with a support in the Euclidean ball and a fixed value at zero. In the sharp L^1-Nikolskii–Bernstein inequality, the supremum norm of the Dankl Laplacian of an entire function of exponential spherical type with the unit L^1-norm is estimated. Extremal Feuér and Beaumann problems is also mentioned. The Dunkl transform covers the case of the classical Fourier transform in the case of unit weight.

Nikolskii–Bernstein inequalities are classical in approximation theory, and the Turán-type problems have applications in metric geometry. Nevertheless, we prove that they have the same answer, which is given explicitly. The easy proof is relied on our old results from the theory of solving extremal problems to the Dunkl transform.

Keywords: Dunkl weight, Fourier–Dunkl transform, entire function of exponential spherical type, positive definite function, Nikolskii–Bernstein constant, Turán extremal problem.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovolskii, 2019, "Extremal Nikolskii – Bernstein- and Turán-type problems for Dunkl transform" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 394–400.

В этой заметке мы покажем взаимосвязь между экстремальными задачами типа Турана для положительно определенных относительно преобразования Фурье–Данкля финитных функций и задачами о точной L^1-константе Никольского–Бернштейна для неотрицательных целых функций экспоненциального сферического типа на $\mathbb{R}^d$. Если неравенства Никольского–Бернштейна относятся к классическим разделам теории приближений, то задачи типа Турана имеют приложения в метрической геометрии. Тем не менее у них будет один ответ.

Задачи Турана и их аналоги интенсивно изучались в классическом безвесовом случае преобразования Фурье (см., например, обзоры результатов в [1, 14, 5, 13, 6]). Для весового случая преобразования Данкля, включающего частным случаем многомерное преобразование Фурье,

[2]This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

эти задачи исследовались, например, в работах [13, 7]. Неравенства Никольского–Бернштейна имеют богатую историю (см., например, обзоры в [3, 9, 11]).

Основные факты из теории Данкля можно найти в [15] (см. также [13, 11]). Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $v_\kappa(x) = \prod_{a\in R_+} |\langle a, x\rangle|^{2\kappa(a)}$ — вес Данкля, определяемый заданными положительной подсистемой R_+ системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$ и функцией кратности $\kappa\colon R \to \mathbb{R}_+$, инвариантной относительно группы отражений $G(R)$, $c_\kappa^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2}v_\kappa(x)\,dx$ — интеграл Макдональда–Мета–Сельберга, $d\mu_\kappa(x) = c_\kappa v_\kappa(x)\,dx$, $L^p_\kappa(\mathbb{R}^d)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций f с конечной нормой $\|f\|_{p,k} = (\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\,d\mu_\kappa(x))^{1/p}$, $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$. Через

$$D_jf(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{a\in R_+} \kappa(a)\langle a, e_j\rangle\,\frac{f(x) - f(\sigma_a x)}{\langle a, x\rangle}, \quad j = 1, \ldots, d,$$

где e_j — единичные орты и $\sigma_a \in O(d)$ — отражение относительно гиперплоскости $\langle a, x\rangle = 0$, обозначим дифференциально-разностные операторы Данкля, $\Delta_\kappa f(x) = \sum_{j=1}^d D_j^2 f(x)$ — лапласиан Данкля.

Пусть $e_\kappa(x, y) = E_\kappa(x, iy)$ — обобщенная экспонента (ядро Данкля), являющаяся решением системы уравнений

$$D_jf(x) = iy_jf(x), \quad j = 1, \ldots, d, \qquad f(0) = 1.$$

Для $e_\kappa(x, y)$ многие свойства аналогичны свойствам экспоненты $e^{i\langle x,y\rangle}$, в частности,

$$(-\Delta_\kappa)^r e_k(x, y) = |y|^{2r} e_k(x, y), \quad r \in \mathbb{Z}_+.$$

Гармонический анализ в пространствах с весом Данкля осуществляется с помощью унитарного в $L^2_\kappa(\mathbb{R}^d)$ преобразования Данкля

$$\mathcal{F}_\kappa(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_\kappa(x, y)}\,d\mu_\kappa(x).$$

В частности, обратное преобразование Данкля $\mathcal{F}_\kappa^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}_\kappa(f)(-x)$ и

$$(-\Delta_\kappa)^r f(0) = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^{2r}\mathcal{F}_\kappa(f)(x)\,d\mu_\kappa(x). \tag{1}$$

Через T^t_κ обозначим положительный оператор обобщенного сдвига (среднего значения) Данкля [11].

В безвесовом случае $\kappa(a) \equiv 0$ индекс κ опускается, $d\mu(x) = (2\pi)^{-d/2}\,dx$ и $\mathcal{F}$, Δ, T^t — классические преобразование Фурье $\mathcal{F}$, оператор Лапласа, оператор усреднения по сферам соответственно.

Перейдем к постановкам задач. Пусть $\mathcal{E}^+_\kappa \subset L^1_\kappa(\mathbb{R}^d)$ — множество неотрицательных целых функций экспоненциального сферического типа не выше 1, $\mathcal{P}^+_\kappa$ — класс непрерывных действительных положительно определенных относительно преобразования Данкля функций f (это означает, что $\mathcal{F}_\kappa(f) \geqslant 0$), таких что $\operatorname{supp} f \subset B^d$. Эти классы двойственны в том смысле, что по теореме Пэли–Винера для преобразования Данкля справедливо равенство $\mathcal{E}^+_\kappa = \mathcal{F}_\kappa(\mathcal{P}^+_\kappa)$, и наоборот.

Точная константа Никольского между L^∞- и L^1-нормами для функций из класса $\mathcal{E}^+_\kappa$ определяется равенством

$$L_{\kappa,0} = \sup\{\|f\|_\infty\colon f \in \mathcal{E}^+_\kappa,\ \|f\|_{1,k} = 1\}. \tag{2}$$

В безвесовом случае она вычислена в работе [3].

Точная константа Никольского–Бернштейна между L^∞- и L^1-нормами для лапласиана Данкля Δ_κ и функций из класса $\mathcal{E}_\kappa^+$ определяется равенством

$$L_{\kappa,1} = \sup\{\|\Delta_\kappa f\|_\infty \colon f \in \mathcal{E}_\kappa^+,\ \|f\|_{1,k} = 1\}.$$

Экстремальная задача Турана заключается в нахождении величины

$$A_{\kappa,0} = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,d\mu_\kappa(x)\colon f \in \mathcal{P}_\kappa^+,\ f(0) = 1\right\}.$$

Для безвесового случая решение задачи см. в [16, 17, 4, 14, 2], а для преобразования Данкля — в [13]. Двойственная постановка задачи $A_{\kappa,0}$ о супремуме $f(0)$ при условии $\|f\|_{1,k} = 1$ на классе $\mathcal{F}_\kappa(\mathcal{P}_\kappa^+) = \mathcal{E}_\kappa^+$ известна как задача Фейера [13] (см. также [6, 12]). Другими словами,

$$A_{\kappa,0} = \sup\{f(0)\colon f \in \mathcal{E}_\kappa^+,\ \|f\|_{1,\kappa} = 1\}. \tag{3}$$

Отсюда и из (2) получаем неравенство $A_{\kappa,0} \leqslant L_{\kappa,0}$.

Рассмотрим следующий весовой вариант задачи Турана–Фейера: найти

$$A_{\kappa,1} = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\,d\mu_\kappa(x)\colon f \in \mathcal{P}_\kappa^+,\ f(0) = 1\right\}.$$

Эквивалентно, с учетом (1), получаем

$$A_{\kappa,1} = \sup\{-\Delta_\kappa f(0)\colon f \in \mathcal{E}_\kappa^+,\ \|f\|_{1,\kappa} = 1\}. \tag{4}$$

Отсюда заключаем, что $A_{\kappa,1} \leqslant L_{\kappa,1}$.

Полезно сравнить задачу $A_{\kappa,1}$ с экстремальной задачей Бомана для преобразования Данкля [7], в которой требуется найти $\inf \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\,d\mu_\kappa(x)$ на классе функций $\mathcal{E}_\kappa^+$ с условием $\|f\|_{1,k} = 1$.

Данные задачи обладают радиальной симметрией, поэтому основным способом их решения является применение усреднения по сферам, приводящее к радиальным экстремальным функциям $f(x) = f(|x|)$ и, как следствие, одномерным постановкам на полуоси со степенным весом $b_\alpha t^{2\alpha+1}$ и преобразованием Ганкеля $\mathcal{H}_\alpha$, ядро которого определяется нормированной функцией Бесселя j_α. Здесь $\alpha = \alpha_\kappa = d_\kappa/2 - 1 \geqslant -1/2$, $d_\kappa = d + 2\sum_{a\in R_+}\kappa(a)$ — размерность Данкля $b_\alpha^{-1} = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)$, $j_\alpha(t) = \Gamma(\alpha+1)(2/t)^\alpha J_\alpha(t)$. В безвесовом случаем имеем $\alpha = d/2-1$. Для радиальных функций лапасиан и оператор обобщенного сдвига Данкля сводятся к дифференциальному оператору и сдвигу Бесселя соответственно (их определение см., например, в [10, 8]). Для решения одномерных задач применяются квадратурные формулы Бесселя.

Сформулируем основной результат.

Предложение 1. *Имеем*

$$L_{\kappa,i} = A_{\kappa,i}, \quad i = 0, 1. \tag{5}$$

При этом

$$L_{\kappa,0} = \frac{b_{\alpha_\kappa}}{2^{d_k} d_\kappa}, \quad L_{\kappa,1} = \frac{b_{\alpha_\kappa}}{2^{d_k+1} d_\kappa (d_\kappa+2)}.$$

Экстремальные (с точностью до нормировочных констант) функции в задачах $L_{\kappa,i}$ соответственно $j^2_{\alpha_\kappa+1}(|x|/2)$ и $|x|^2 j^2_{\alpha_\kappa+2}(|x|/2)$, а в задачах $A_{\kappa,i}$ их преобразования Данкля.

Доказательство. Для доказательства будет достаточно воспользоваться результатами работ [10, теорема 1] и [11, теорема 1].

Выше мы привели неравенства $A_{\kappa,i} \leqslant L_{\kappa,i}$, $i = 0, 1$. Чтобы показать, что они точные, воспользуемся доказательством теоремы 1 из [11]. Пусть $i = 0$ или 1, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число и f_ε — допустимая функция в задаче $L_{\kappa,i}$, для которой

$$L_{\kappa,i} \leqslant (-\Delta_\kappa)^i f(x_\varepsilon) + \varepsilon, \quad x_\varepsilon \in \mathbb{R}^d.$$

Пусть $t = |x|$ и рассмотрим радиальную функцию $g_\varepsilon(t) = T_\kappa^t f_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Из свойств оператора обобщенного сдвига [11, раздел 2] следует, что она является неотрицательной целой функций экспоненциального сферического типа не больше 1 и

$$c^{-1} = \|g_\varepsilon\|_{1,\kappa} \leqslant \|f_\varepsilon\|_{1,\kappa} = 1, \quad \Delta_\kappa^i g_\varepsilon(0) = \Delta_\kappa^i f_\varepsilon(x_\varepsilon).$$

Таким образом, функция cg_ε является допустимой в задаче Фейера (3) или (4) и

$$A_{\kappa,i} \geqslant (-\Delta_\kappa)^i c g_\varepsilon(0) = c(-\Delta_\kappa)^i f_\varepsilon(x_\varepsilon) \geqslant c(L_{\kappa,i} - \varepsilon) \geqslant L_{\kappa,i} - \varepsilon,$$

откуда при $\varepsilon \to 0$ выводим обратное неравенство $A_{\kappa,i} \geqslant L_{\kappa,i}$.

Эти рассуждения также показывают, что при поиске экстремумов в этих задачах можно ограничиться радиальными функциями, а тогда, как было отмечено выше, получаются одномерные формулировки на полуоси со степенным весом $b_\alpha t^{2\alpha+1}$. Мы не выписываем их, поскольку они даны в [10]. Применяя теорему 1 из этой работы для $\alpha = \alpha_\kappa$ мы завершаем доказательство. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arestov V. V., Berdysheva E. E. The Turán problem for a class of polytopes // East J. Approx. 2002. Vol. 8, no. 2. P. 381–388.

2. Bianchi G., Kelly M. A Fourier analytic proof of the Blaschke–Santaló inequality // Proc. Amer. Math. Soc. 2015. Vol. 143. P. 4901–4912.

3. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // arXiv:1708.09837. 2017; J. d'Analyse Math. 2019 (to appear).

4. Gorbachev D. V. An extremal problem for periodic functions with supports in the ball // Math. Notes. 2001. Vol. 69, no. 3–4. P. 313–319.

5. Gorbachev D. V. Selected problems of function theory and approximation theory, and their applications. Tula: Grif and Co., 2005. (In Russ.)

6. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Ofitserov E. P., Smirnov O. I. Some extremal problems of harmonic analysis and approximation theory // Chebyshevskii Sbornik. 2017. Vol. 18, no. 4. P. 139–166. (In Russ.)

7. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Bohman extremal problem for the Dunkl transform // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. Vol. 297 (Suppl 1). P. 88–96.

8. Gorbachev D. V., Tikhonov S. Y. Wiener's problem for positive definite functions // Math. Zeit. 2018. Vol. 289, no. 3–4. P. 859-874.

9. Gorbachev D. V., Dobrovolskii N. N. Nikolskii constants in $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ spaces // Chebyshevskii Sbornik. 2018. Vol. 19, no. 2. P. 67–79. (In Russ.)

10. Gorbachev D. V. Nikolskii – Bernstein constants for nonnegative entire functions of exponential type on the axis // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 2018. Vol. 24, no. 4. P. 92–103. (In Russ.)

11. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Nikol'skii – Bernstein constants for entire functions of exponential spherical type in weighted spaces // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN. 2019. Vol. 25, no. 2. P. 75–87. (In Russ.)

12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Turán, Fejér and Bohman extremal problems for the multivariate Fourier transform in terms of the eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem // Sb. Math. 2019. Vol. 210, no. 6. P. 809–835.

13. Ivanov A. V. Some extremal problem for entire functions in weighted spaces // Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki. 2010. No. 1. P. 26–44. (In Russ.)

14. Kolountzakis M. N., Révész Sz.Gy. On a problem of Turán about positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 131. P. 3423–3430.

15. Rösler M. Dunkl Operators: Theory and Applications. Lecture Notes in Math. Vol. 1817. Berlin: Springer, 2003. P. 93–135.

16. Siegel C. L. Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem // Acta Math. 1935. Vol. 65. P. 307–323.

17. Vaaler J. D. Some extremal functions in Fourier analysis // Bull. Amer. Math. Soc. (New Series). 1985. Vol. 12, no. 2. P. 183–216.

REFERENCES

1. Arestov V. V., Berdysheva E. E. The Turán problem for a class of polytopes // East J. Approx. 2002. Vol. 8, no. 2. P. 381–388.

2. Bianchi G., Kelly M. A Fourier analytic proof of the Blaschke–Santaló inequality // Proc. Amer. Math. Soc. 2015. Vol. 143. P. 4901–4912.

3. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // arXiv:1708.09837. 2017; J. d'Analyse Math. 2019 (to appear).

4. Gorbachev D. V. An extremal problem for periodic functions with supports in the ball // Math. Notes. 2001. Vol. 69, no. 3–4. P. 313–319.

5. Gorbachev D. V. Selected problems of function theory and approximation theory, and their applications. Tula: Grif and Co., 2005. (In Russ.)

6. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Ofitserov E. P., Smirnov O. I. Some extremal problems of harmonic analysis and approximation theory // Chebyshevskii Sbornik. 2017. Vol. 18, no. 4. P. 139–166. (In Russ.)

7. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Bohman extremal problem for the Dunkl transform // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. Vol. 297 (Suppl 1). P. 88–96.

8. Gorbachev D. V., Tikhonov S. Y. Wiener's problem for positive definite functions // Math. Zeit. 2018. Vol. 289, no. 3–4. P. 859-874.

9. Gorbachev D. V., Dobrovolskii N. N. Nikolskii constants in $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ spaces // Chebyshevskii Sbornik. 2018. Vol. 19, no. 2. P. 67–79. (In Russ.)

10. Gorbachev D. V. Nikolskii – Bernstein constants for nonnegative entire functions of exponential type on the axis // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 2018. Vol. 24, no. 4. P. 92–103. (In Russ.)

11. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Nikol'skii – Bernstein constants for entire functions of exponential spherical type in weighted spaces // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN. 2019. Vol. 25, no. 2. P. 75–87. (In Russ.)

12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Turán, Fejér and Bohman extremal problems for the multivariate Fourier transform in terms of the eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem // Sb. Math. 2019. Vol. 210, no. 6. P. 809–835.

13. Ivanov A. V. Some extremal problem for entire functions in weighted spaces // Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki. 2010. No. 1. P. 26–44. (In Russ.)

14. Kolountzakis M. N., Révész Sz.Gy. On a problem of Turán about positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 131. P. 3423–3430.

15. Rösler M. Dunkl Operators: Theory and Applications. Lecture Notes in Math. Vol. 1817. Berlin: Springer, 2003. P. 93–135.

16. Siegel C. L. Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremal problem // Acta Math. 1935. Vol. 65. P. 307–323.

17. Vaaler J. D. Some extremal functions in Fourier analysis // Bull. Amer. Math. Soc. (New Series). 1985. Vol. 12, no. 2. P. 183–216.

Получено 5.09.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.