В. М. Радыгин, И. С. Полянский, Методы конформных отображений многогранников в $\mathbb{R}^3$,
Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2017, том 27, выпуск 1, 60–68

УДК 517.54

© *В. М. Радыгин, И. С. Полянский*

МЕТОДЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ В $\mathbb{R}^3$

В статье разработаны методы, необходимые для решения задач конформного отображения многогранников в $\mathbb{R}^3$. Результаты получены с использованием алгебры кватернионов и геометрических представлений. Определены прямое и обратное конформные отображения: верхнего полупространства на единичный шар, шаровой луночки на двугранный угол, двугранного и многогранного углов на верхнее полупространство. При помощи полученных результатов найдены решения прямой и обратной задач конформного отображения многогранников на верхнее полупространство. Решение прямой задачи конформного отображения основано на результатах теоремы Кристоффеля–Шварца. Решение обратной задачи выполнено методом последовательных конформных отображений. В целом полученные взаимно однозначные отображения основаны на том, что по теореме Лиувилля все конформные диффеоморфизмы любой области в пространстве являются преобразованиями Мёбиуса.

Ключевые слова: конформное отображение, многогранник, двугранный угол, многогранный угол, верхнее полупространство.

DOI: 10.20537/vm170106

Введение

Широкий круг граничных задач математической физики, например [1–3], в прикладном применении определяет необходимость прямого и обратного конформных отображений односвязной области с кусочно-линейной границей на каноническую, заданных в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. С учетом известных решений [4, 5] для $\mathbb{R}^2$ особый интерес представляют задачи конформного отображения в $\mathbb{R}^3$, в основе которых лежит обобщение условий Коши–Римана для некоммутативной алгебры кватернионов [6]. В связи с этим целью статьи является изложение методов конформного отображения многогранников в $\mathbb{R}^3$, разработанных авторами.

§ 1. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{C}$ — некоторая комплексная алгебра с заданной комплексной плоскостью $\xi = \xi_0 + i\xi_1 = R \cdot e^{i\tilde{\theta}} \in \Theta$ $\big(\xi_0, \xi_1 \in \mathbb{R}; i$ — мнимая единица$\big)$. Под $\mathbb{H}$ будем понимать пространство алгебры кватернионов Гамильтона. Кватернион $q \in \mathbb{H}$ задается линейной комбинацией $q = q_0 + j_1q_1 + j_2q_2 + j_3q_3$ $\big(q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R};\ j_1, j_2, j_3$ — мнимые единицы$\big)$ или $q = R\big(\cos\psi + \big[\big(j_1\cos\varphi + j_2\sin\varphi\big)\sin\theta + j_3\cos\theta\big]\sin\psi\big)$ в гиперсферической системе координат со скалярными характеристиками и кватернионными операциями [6].

В $\operatorname{Im}\mathbb{H}$ построим многогранник Ω, представляющий собой пересечение конечного числа замкнутых полупространств — односвязную область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-линейной границей. Геометрический центр Ω совпадает с началом координат $\operatorname{Im}\mathbb{H}$. Многогранник Ω зададим последовательностью из N неповторяющихся точек (вершин) $A_1, A_2, \ldots, A_N \in \operatorname{Im}\mathbb{H}$; из M ребер $e_1, e_2, \ldots, e_M$, каждое m-е $\big(m = \overline{1, M}\big)$ из которых представлено парой вершин $e_m = \{A_n, A_{n'}\}$ $\big(n, n' \in \{\overline{1, N}\};\ n \neq n'\big)$; из K граней $E_1, E_2, \ldots, E_K$, каждая k-я $\big(k = \overline{1, K}\big)$ из которых задана множеством ребер $E_k = \{e^k_{m_1}, e^k_{m_2}, \ldots, e^k_{m_k}\}$ $\big(e^k_l \in \{e_1, \ldots, e_M\},\ k = \overline{1, K},\ l = \overline{1, m_k};\ e^k_l \neq e^k_{l'},\ k = \overline{1, K},\ l \neq l' \in \{\overline{1, m_k}\}\big)$ таких, что соседняя пара $\big(e^k_l, e^k_{l+1}\big)$, $l = \overline{1, m_k - 1}$, и пара $\big(e^k_{m_k}, e^k_1\big)$ содержат общую вершину. Зафиксируем $n \in \{\overline{1, N}\}$. Обозначим через $\mathfrak{V}_n$ n-й многогранный угол, определенный для Ω набором ребер $\{A_n, A_{n_1}\}$, $\{A_n, A_{n_2}\}$, $\ldots$, $\{A_n, A_{n_T}\}$, содержащих вершину A_n $\big(n_1, n_2, \ldots, n_T \in \{\overline{1, N}\};\ n_t \neq n_{t'}\ \forall t, t' = \overline{1, T}\big)$. Многоугольник Ψ_n, образованный вершинами $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_T}$ многогранного угла $\mathfrak{V}_n$, будем называть основанием многогранного угла. Через γ_m $(m = \overline{1, M})$ обозначим m-й двугранный угол многогранника Ω, заданный парой граней $E^m_{k_1}, E^m_{k_2} \in \{E_1, \dots, E_K\}$ с общим ребром e_m.

С учетом введенных обозначений найдем прямое и обратное конформные отображения: шара B_R на верхнее полупространство $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+ = \{(q_1, q_2, q_3) : q_3 > 0\}$, верхнего полупространства с выброшенным сегментом шара (шаровая луночка) на двугранный угол, двугранного угла на $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$, многогранного угла на $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$.

§ 2. Простейшие конформные отображения

По теореме Лиувилля [7], все конформные диффеоморфизмы любой области в пространстве (размерности больше 2) являются преобразованиями Мёбиуса. Преобразование Мёбиуса [7] $w = (w_0 q + w_1)(w_2 q + w_3)^{-1}$ реализует конформное отображение кватерниона q в w, где $w_0, \dots, w_3 \in \mathbb{H}$ — некоторые константы. Задание постоянных $w_0, \dots, w_3$ определяет конкретный вид конформного отображения и может производиться по трем точкам [7]. С учетом изложенного сформулируем утверждения для $\mathbb{R}^3$.

Теорема 1. *Функции $g_1 : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ и $g'_1 : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, заданные соотношениями*

$$g_1(q) = (j_1 - j_2 q)(j_2 - j_1 q)^{-1} \quad \text{и} \quad g'_1(q) = (j_1 q - j_2)^{-1}(j_2 q - j_1), \tag{1}$$

реализуют конформное отображение верхнего полупространства $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$ на единичный шар B_1 и обратно.

Доказательство теоремы 1 следует из того, что при отображении (1) точки $Q_1 = j_3$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = \infty$ при $Q_1, Q_2, Q_3 \in \operatorname{Im}\mathbb{H}^+$ переходят в соответствующие точки $W_1 = 0$, $W_2 = -j_3$, $W_3 = j_3$ при $W_1, W_2, W_3 \in B_1$. Обратное отображение точек $W_1, W_2, W_3 \in B_1$ в $Q_1, Q_2, Q_3 \in \operatorname{Im}\mathbb{H}^+$ приводит к аналогичному результату.

Теорема 2. *Прямое и обратное конформные отображения шаровой луночки на двугранный угол реализуют функции $g_2 : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ и $g'_2 : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, заданные соотношениями*

$$g_2(q) = (j_1 R_a - q)(j_1 q - R_a)^{-1} \quad \text{и} \quad g'_2(q) = (j_1 q + 1)^{-1}(q R_a + j_1 R_a), \tag{2}$$

где R_a — радиус основания вырезанного шарового сегмента из верхнего полупространства.

Доказательство теоремы 2 следует из того, что при отображении (2) точки $Q_1 = \infty$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = j_1 R_a$ верхнего полупространства с шаровой луночкой переходят в соответствующие точки $W_1 = j_1$, $W_2 = -j_1$, $W_3 = j_3$, где $W_1, W_2, W_3 \in \operatorname{Im}\mathbb{H}^+$. Величина двугранного угла определяется аналогично [4] через двугранный угол, образованный пересечением касательной плоскости к сфере (поверхность шаровой луночки) в точке $j_1 R_a$.

Теорема 3. *Функция $g_3 : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, заданная соотношением*

$$g_3(q) = 2\left[j_1 c d e^{j_2 \phi\pi/\gamma} + j_2 R\,(r_1 - r_2)\sin\varphi \sin\theta\right] \Big/ \, h, \tag{3}$$

реализует конформное отображение двугранного угла γ на $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$.

В выражении (3) введены следующие обозначения: $r_1 = \left(R^2 + 1 + d\right)^{\pi/\gamma}$, $r_2 = \left(R^2 + 1 - d\right)^{\pi/\gamma}$, $c = \left(2R\sqrt{1 - \sin^2\varphi \sin^2\theta}\right)^{\pi/\gamma}$, $\phi = \arctan\left(\cot\theta / \cos\varphi\right)$, $d = \sqrt{\left(R^2 - 1\right)^2 + 4R^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta}$, $h = (r_1 + r_2)d - (r_1 - r_2)\left(R^2 - 1\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Пусть в $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$ задана шаровая луночка, образованная сегментом шара, касательная плоскость к поверхности которого в точке j_1 проходит под углом $\pi - \gamma$. Рассмотрим комплексную полуплоскость $\xi = R \cdot e^{i\left(0{,}5\pi - \theta\right)}$ с выброшенной

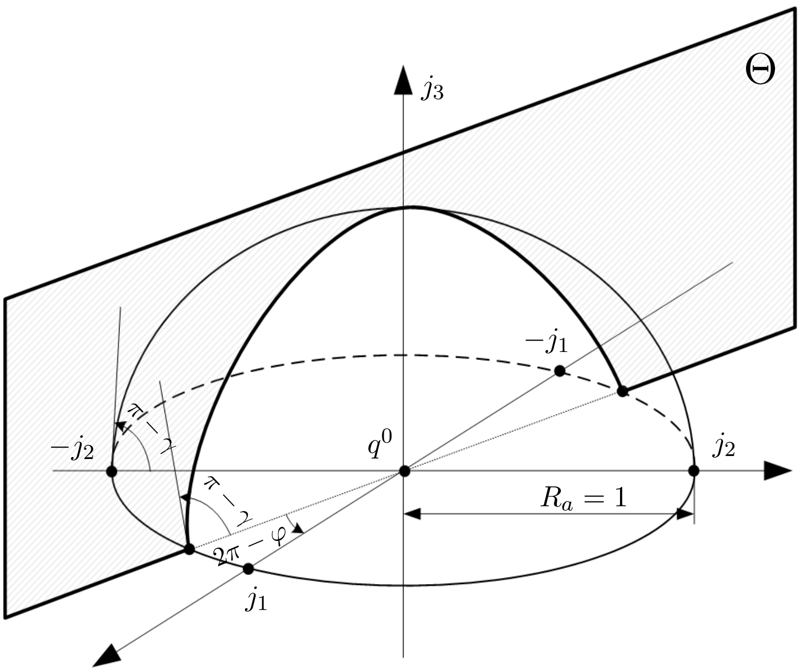

Рис. 1. Шаровая луночка в верхнем полупространстве

круговой луночкой, образованной сечением $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$ плоскостью Θ путем поворота от плоскости j_1j_2 на угол φ (рис. 1).

Известно, что отображение круговой луночки на верхнюю полуплоскость Θ реализует обобщенная функция Жуковского [4]:

$$\tilde{\xi} = \frac{\pi}{\gamma}\left[(\xi+1)^{\pi/\gamma} + (\xi-1)^{\pi/\gamma}\right] \Big/ \left[(\xi+1)^{\pi/\gamma} - (\xi-1)^{\pi/\gamma}\right]. \tag{4}$$

С учетом (4) функция, отображающая заданную шаровую луночку на $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$, будет иметь вид

$$\kappa(q) = \left|\tilde{\xi}\right| \cdot \left[(j_1\cos\varphi + j_2\sin\varphi)\cos\tilde{\theta} + j_3\sin\tilde{\theta}\right], \quad \tilde{\theta} = \arg\left(\tilde{\xi}\right). \tag{5}$$

Принимая во внимание (5), функцию $g_2'(q)$ из (2), осуществляющую конформное отображение двугранного угла на шаровую луночку, и функцию $\tilde{\kappa}(q) = \left(j_1q-\pi/\gamma\right)^{-1}\left(j_1\pi/\gamma-q\right)$, которая переводит точки верхнего полупространства $Q_1 = 0$, $Q_2 = j_1\pi/\gamma$, $Q_3 = \infty$ в соответствующие точки $W_1 = -j_1$, $W_2 = 0$, $W_3 = j_1$, получаем, что конформное отображение двугранного угла γ на $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$ будет определяться суперпозицией функций

$$g_3(q) = \tilde{\kappa}\left(\kappa\left(g_2'(q)\right)\right). \tag{6}$$

Задавая представление кватерниона q в сферической системе координат $q = R\left[\left(j_1\cos\varphi + j_2\sin\varphi\right)\sin\theta + j_3\cos\theta\right]$ для $\mathbb{R}^3$ и преобразуя суперпозицию (6) в соотношение для $\xi = R \cdot e^{i\left(0{,}5\pi-\theta\right)}$, получим выражение (3). □

Особой точкой для функции $g_3(q)$ является точка $q^0 = 0$ (середина ребра двугранного угла, см. рис. 1). Вычет функции $g_3(q)$ в точке q^0 равен $\gamma - 1$.

Теорема 4. *Конформное отображение многогранного угла $\mathfrak{V}_n$ на $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$ реализует функция $\omega : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, представленная в виде $\omega(q) = \omega_3(\omega_2(\omega_1(q)))$, где*

$$
\begin{gathered}
\omega_1 : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, \quad \omega_1(q) = 0.5\Big(\big[\overline{Q}_x q_\Delta + \overline{q}_\Delta Q_x\big] + i\big[\overline{Q}_y q_\Delta + \overline{q}_\Delta Q_y\big]\Big), \\
\omega_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \\
\omega_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{H}, \quad \omega_3(\xi') = \frac{R_\Phi}{R_\Phi^2 + |\xi'|^2}\left[j_1 \left(2R_\Phi \xi_0'\right) + j_2 \left(2R_\Phi \xi_1'\right) + j_3 \left(2R_\Phi^2 - |\xi'|^2\right)\right],
\end{gathered} \tag{7}
$$

а $\omega_2(\xi)$ — функция, определяющая конформное отображение многоугольника $(\xi = \xi_0 + i\xi_1) \in \in \Psi_n'$ на круг $(\xi' = \xi_0' + i\xi_1') \in \Phi$ радиуса R_Φ.

Доказательство. В выражении (7) переменные кватернионы q_Δ, Q_x, Q_y и радиус R_Φ задаются с учетом соотношений

$$
\begin{gathered}
q_\Delta = q - Q_n, \quad R_\Phi = |Q_s|, \quad Q_n = A_n + Q_H / R_\Phi^2, \quad Q_H = Q_h Q_s, \\
Q_h = 0,5\left[\left(\overline{q} - \overline{A}_n\right) Q_s + \overline{Q}_s (q - A_n)\right], \\
Q_s = -0,5\left(Q_v\left[\left(\overline{A}_n - \overline{A}_{n_2}\right) Q_v + \overline{Q}_v (A_n - A_{n_2})\right]\right), \\
Q_x = \frac{(A_{n_1} - A_n)|Q_h| - Q_H}{|(A_{n_1} - A_n)|Q_h| - Q_H|}, \quad Q_y = 0,5\left(Q_v \overline{Q}_x - \overline{Q}_x Q_v\right), \\
Q_v = \frac{(A_{n_1} - A_{n_2})(A_{n_3} - A_{n_2}) - (A_{n_3} - A_{n_2})(A_{n_1} - A_{n_2})}{|(A_{n_1} - A_{n_2})(A_{n_3} - A_{n_2}) - (A_{n_3} - A_{n_2})(A_{n_1} - A_{n_2})|}.
\end{gathered} \tag{8}
$$

Функция $\omega_2(\xi)$ задается для $\Psi_n' \subset \mathbb{C}$ с использованием модифицированного метода последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей [5]. Многоугольник Ψ_n' определяется набором вершин $A_{n_1}', A_{n_2}', \ldots, A_{n_T}'$ при $A_{n_t}' = \omega_1\big(A_n + \big(A_{n_t} - A_n\big)|Q_h|/R_\Phi^2\big)$.

Функция $\omega_3(\xi')$ определяет стереографическую проекцию [8] точек $(\xi' = \xi_0' + i\xi_1') \in \Phi$ круга радиуса R_Φ на поверхность верхней части полусферы этого же радиуса.

Пусть многогранный угол $\mathfrak{V}_n$ задан вершиной A_n и основанием Ψ_n с вершинами A_{n_1}, A_{n_2}, $\ldots$, A_{n_T} (рис. 2). Для многоугольника Ψ_n определим кватернион Q_v, задающий в $\mathbb{R}^3$ орт вектора внутренней нормали к основанию многогранного угла $\mathfrak{V}_n$, по трем первым вершинам $A_{n_1}, A_{n_2}, A_{n_3}$ с использованием соответствующего соотношения (8). С учетом Q_v построим проекцию A_n' вершины A_n угла $\mathfrak{V}_n$ на основание Ψ_n выражением $A_n' = A_n - 0,5\big(Q_v\big[\big(\overline{A}_n - \overline{A}_{n_2}\big)Q_v + \overline{Q}_v\big(A_n - A_{n_2}\big)\big]\big)$.

При $Q_t = 0.5\big[\big(\overline{q} - \overline{A}_n\big)\big(A_n' - A_n\big) + \big(\overline{A'}_n - \overline{A}_n\big)\big(q - A_n\big)\big]/\|A_n' - A_n\|$ проецируем точку q на прямую, проходящую через A_n и A_n' (см. рис. 2). С учетом правила подобия треугольников $A_n A_n' A_{n_t}$ и $A_n \tilde{A}_n A_{n_t}'$ зададим отображение $\tilde{A}_{n_1}, \tilde{A}_{n_2}, \ldots, \tilde{A}_{n_T}$ вершин $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_T}$ основания Ψ_n угла $\mathfrak{V}_n$ соотношением

$$
\tilde{A}_{n_t} = A_n + (A_{n_t} - A_n)|Q_h|/R_\Phi^2,
$$

задающим многоугольник Ψ_n' (проекция основания Ψ_n относительно точки q).

Определив кватернионы $Q_z = Q_v$, $Q_x = \big(\tilde{A}_{n_1} - A_n'\big)/\big|\tilde{A}_{n_1} - A_n'\big| = \big[\big(A_{n_1} - A_n\big)|Q_h| - Q_H\big]/\big|\big(A_{n_1} - A_n\big)|Q_h| - Q_H\big|$, $Q_y = 0,5\big(Q_v\overline{Q}_x - \overline{Q}_x Q_v\big)$, зададим линейную проекцию точки q в точку $\xi \in \mathbb{C}$ соотношением

$$
\xi = 0.5\Big(\big[\overline{Q}_x (q - Q_n) + \big(\overline{q} - \overline{Q}_n\big) Q_x\big] + i\big[\overline{Q}_y (q - Q_n) + \big(\overline{q} - \overline{Q}_n\big) Q_y\big]\Big),
$$

соответствующим функции $\omega_1 : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ из (7).

Функция $\omega_1(q)$ реализует линейную проекцию точки q в точку $\xi \in \mathbb{C}$, используя правила подобия, а отображения $\omega_2(\xi)$ и $\omega_3(\xi')$ являются конформными и учитывают линейное растяжение проекции $\tilde{A}_n$ точки q. При указанном обеспечении постоянства искажения масштаба получим, что суперпозиция функций $\omega(q) = \omega_3(\omega_2(\omega_1(q)))$ определяет конформное отображение. □

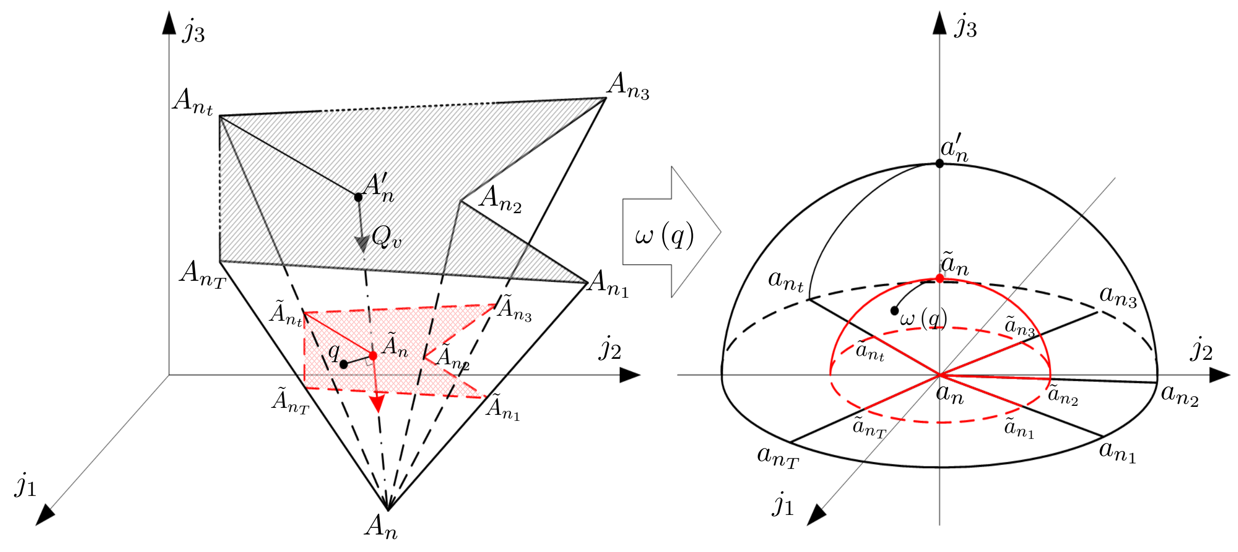

Рис. 2. Пример конформного отображения многогранного угла $\mathfrak{V}_n$ на верхнее полупространство

Следствие 1. *Обратное отображение* $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$ *на многогранный угол* $\mathfrak{V}_n$ *реализует функция* $\tilde{\omega}(q) = \tilde{\omega}_3\big(\tilde{\omega}_2\big(\tilde{\omega}_1(q)\big)\big)$, где

$$\tilde{\omega}_1 : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, \quad \tilde{\omega}_1(q) = R_\Phi(q_1 + iq_2)/(R_\Phi + q_3),$$
$$\tilde{\omega}_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \tilde{\omega}_2(\xi') = C_0 \int_0^{\xi'/R_\Phi} \left[\prod_{t=1}^{T} (1 - R_\Phi \tau / a_{n_t})^{\alpha_{n_t}/\pi - 1} \right] d\tau + C_1, \tag{9}$$
$$\tilde{\omega}_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{H}, \quad \tilde{\omega}_3(\xi) = Q_x \xi_0 + Q_y \xi_1 + Q_n.$$

При этом $\tilde{\omega}_1(q)$ — обратная стереографическая проекция; $\tilde{\omega}_2(\xi')$ — интеграл Кристоффеля–Шварца [5] для заданных проекций $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_T}$ вершин $A'_{n_1}, A'_{n_2}, \ldots, A'_{n_T}$ на круг радиуса R_Φ; $\tilde{\omega}_3(\xi)$ — линейная проекция многоугольника Ψ'_n на многогранный угол (обратная функция к $\omega_1(q)$).

Следует отметить, что функции (7), (9) удовлетворяют необходимому условию — теореме Лиувилля [9], поскольку заданное конформное преобразование 3-пространства переводит сферы в сферы; здесь под сферической поверхностью понимается также и плоскость.

Таким образом, полученные результаты позволяют перейти к непосредственному решению задач прямого и обратного конформного отображения многогранников (рис. 3).

§ 3. Прямое и обратное отображение многогранников

Теорема 5. *Если функция* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *реализует конформное отображение* $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$ *на внутренность ограниченного многогранника* Ω *при известных ребрах* $\tilde{e}_m$ *плоскости* $j_1 j_2$ *в* $Im\,\mathbb{H}^+$*, соответствующих ребрам* e_m *этого многогранника, то* $f(q)$ *для* $q = R\big[(j_1\cos\varphi + j_2\sin\varphi)\sin\theta + j_3\cos\theta\big]$ *представляется соотношением*

$$f(q) = \left|\tilde{\xi}\right| \left[(j_1\cos\varphi + j_2\sin\varphi)\cos\tilde{\theta} + j_3\sin\tilde{\theta} \right], \quad \tilde{\theta} = \arg\left(\tilde{\xi}\right),$$
$$\tilde{\xi} = C_0 \int_0^{R\cdot e^{i(0,5\pi - \theta)}} \left[\prod_{n=1}^{N(\varphi)} \left(1 - a'_n(\varphi)\right)^{\alpha_n(\varphi)/\pi - 1} \right] d\tau + C_1, \tag{10}$$

где C_0, C_1 *— некоторые комплексные постоянные.*

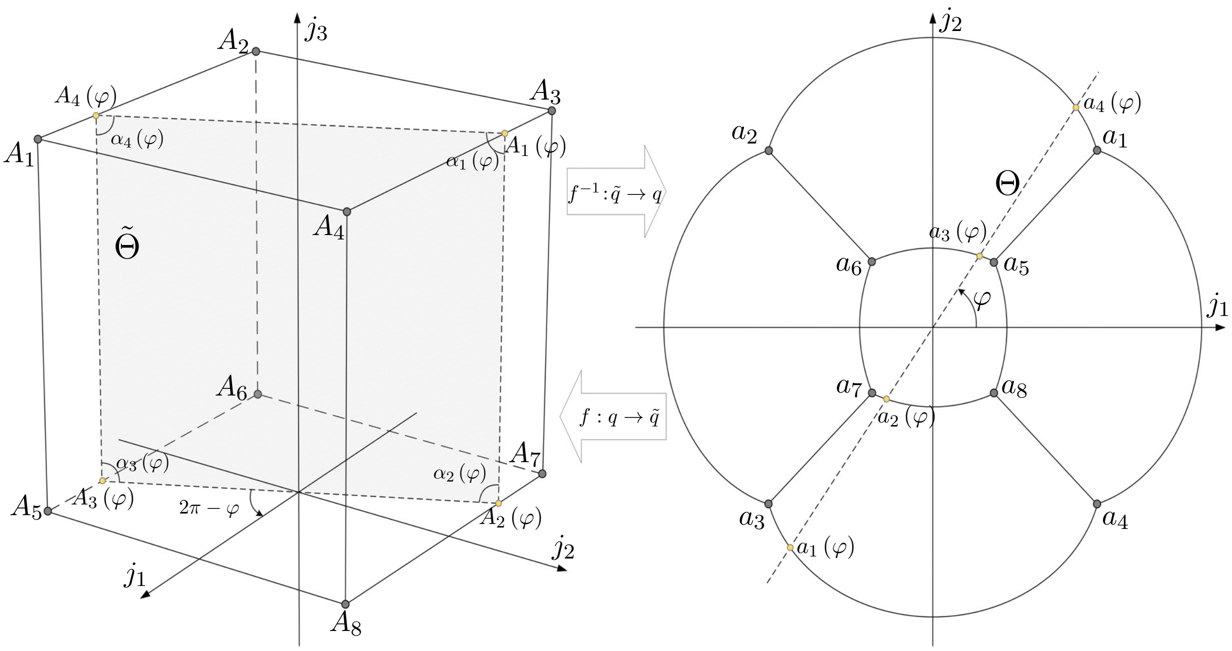

Рис. 3. Пример прямого и обратного конформного отображения куба

В выражении (10) $N(\varphi)$ — число точек $a'_n(\varphi)$ пересечения ребер $\tilde{e}_m$ с секущей плоскостью Θ, полученной путем поворота от плоскости $j_1 j_3$ на угол φ; $a'_n(\varphi)$ — точки действительной оси $\left(-\infty < a'_1(\varphi) < a'_2(\varphi) < \ldots < a'_{N(\varphi)}(\varphi) < \infty\right)$ комплексной плоскости Θ, соответствующие вершинам $A_n(\varphi)$ многоугольника $\Delta(\varphi)$, образованного сечением многогранника Ω плоскостью $\tilde{\Theta}$ (см. рис. 3); $\alpha_n(\varphi)$ — внутренние углы многоугольника $\Delta(\varphi)$ при вершинах $A_n(\varphi)$, равные по величине соответствующим двугранным углам многогранника Ω.

Доказательство теоремы 5 основывается на результатах теоремы Кристоффеля–Шварца [9].

Применение выражения (10) при решении ряда прикладных задач связано с необходимостью подбора соответствия ребер $\tilde{e}_m$ плоскости $j_1 j_2$ в $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$ с ребрами e_m многогранника Ω. Такой подбор с учетом (1) связан с решением обратной задачи — конформного отображения многогранника Ω на единичный шар.

Решение обратной задачи выполняется по аналогии с решением в $\mathbb{R}^2$ с применением модифицированного метода последовательных конформных отображений [5].

Используя дробно-линейное преобразование $\zeta = g'_1(q/R)$ (R — минимальный радиус окружности, содержащей в себе все вершины A_n многогранника Ω), отобразим внутренность Ω на $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$ с выброшенными шаровыми луночками. Для последующего отображения полученной области на $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$ применим последовательность отображений, сводящихся к решению следующей модельной задачи.

Теорема 6. *Конформное отображение* $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$ *с выброшенной областью, образованной пересечением полупространства с произвольной односвязной областью с гладкой поверхностью* Γ, *на* $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$ *осуществляется для* $q = R\left[(j_1\cos\varphi + j_2\sin\varphi)\sin\theta + j_3\cos\theta\right]$ *функцией*

$$\varpi(q) = (a-b)\,\gamma\left|\tilde{\xi}\right|\left[(j_1\cos\varphi + j_2\sin\varphi)\cos\tilde{\theta} + j_3\sin\tilde{\theta}\right] \text{ с нормировкой } \varpi(\infty) = \infty,\ \varpi'(\infty) = 1,$$

$$\text{где } \tilde{\theta} = \arg(\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} = S_3\left(S_2\left(S_1\left(R\cdot e^{i(0{,}5\pi-\theta)}\right)\right)\right), \tag{11}$$

$$S_1(\xi) = \left[\xi - a(\theta)\right]/\left[\xi - b(\theta)\right], \quad S_2(\xi) = \xi^{\gamma(\theta)}, \quad S_3(\xi) = (1+\xi)/(1-\xi).$$

В равенствах (11) $a(\theta)$, $b(\theta)$ — точки пересечения с действительной осью комплексной плоскости Θ, полученной путем поворота от плоскости $j_1 j_3$ на угол φ, соприкасающейся окружности

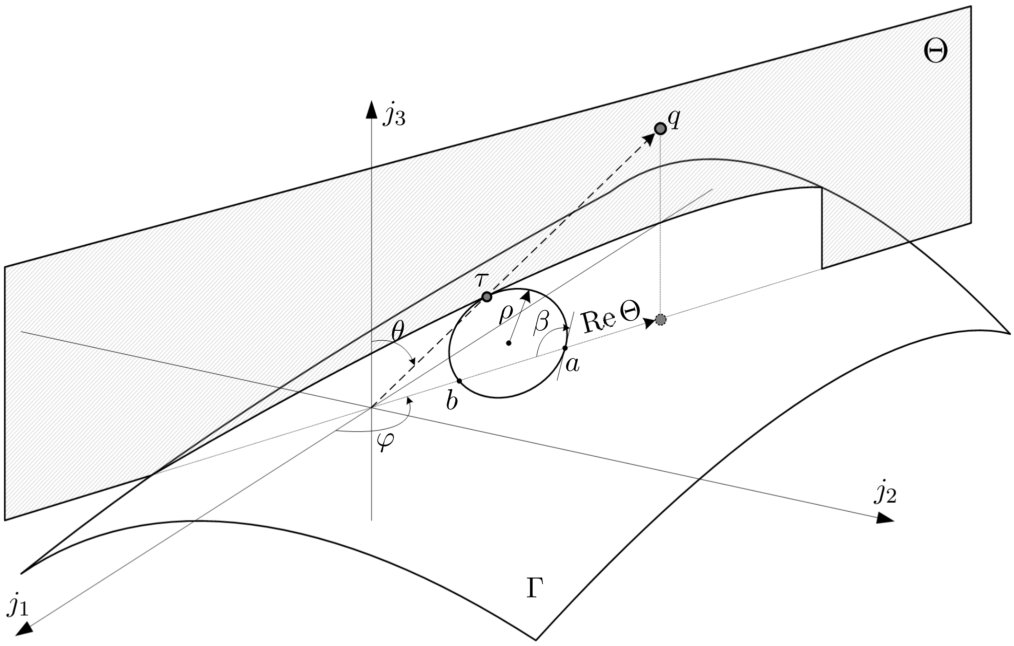

Рис. 4. Пример конформного отображения полупространства с выброшенной областью с гладкой поверхностью Γ

с границей выброшенного из полуплоскости сегмента односвязной области в окрестности точки $\tau \in \Theta$, где $\arg(\tau) = 0.5\pi - \theta$, $\gamma(\theta) = \pi/[\pi - \beta(\theta)]$, $\beta(\theta)$ — угол, образованный соприкасающейся окружностью в $a(\theta)$ (рис. 4).

Доказательство теоремы 6 основано на результатах теоремы о конформном отображении верхней полуплоскости с выброшенным сегментом с гладкой границей на верхнюю полуплоскость [5].

Частным случаем (11) является задача на построение отображения $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$ с выброшенным сегментом шара на $\operatorname{Im}\mathbb{H}^+$. В ней указанное отображение производится для грани исходного многогранника, заданного набором вершин, которые расположены на границе описанной вокруг Ω окружности радиуса R. Пример задачи представлен на рис. 1. Отображение с учетом (1)–(3) осуществляется функцией $\varpi(q) = k_0 \cdot \tilde{\kappa}'(g_3(g_2(q)))$, где $k_0 = R_a\pi/\gamma$ — коэффициент, соответствующий для $\varpi(q)$ условиям нормировки $d\varpi(j_1\infty)(dq)^{-1} = d\varpi(j_2\infty)(dq)^{-1} = 1$, $d\varpi(j_3\infty)(dq)^{-1} = 0$ для $dq = q - q_0$; $\tilde{\kappa}'(q) = (q + j_1)(j_1 q + 1)^{-1}$ — функция, переводящая точки верхнего полупространства $Q_1 = -j_2$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = j_1$ в соответствующие точки $W_1 = 0$, $W_2 = j_1$, $W_3 = \infty$.

Заключение

Полученные результаты составляют совокупность методов, необходимых для решения задач конформного отображения многогранников в $\mathbb{R}^3$. Заданные конформные отображения получены с использованием алгебры кватернионов, теории функции комплексного переменного и геометрических представлений. Другим возможным вариантом получения соотношений, задающих прямое и обратное конформные отображения двугранного угла на верхнее полупространство (3), многогранного угла на верхнее полупространство (7), верхнего полупространства на многогранник (10), является непосредственное использование алгебры кватернионов [6]. Однако возникающие при этом трудности, обусловленные некоммутативным характером алгебры $\mathbb{H}$, связаны с необходимостью вычисления большого числа постоянных при переходе от логарифмического вычета по производной мероморфной кватернион-функции, обобщающей конформное отображение (двугранного угла, или многогранного угла, или многогранника) мероморфной кватернион-функции.

В целом полученные представления с учетом теоремы Лиувилля могут быть обобщены на задачи конформного отображения многогранников в многомерных евклидовых пространствах $\mathbb{R}^N$ с применением алгебры Клиффорда, представления элемента x этой алгебры в гиперсферической системе координат $x = R\big(\cos\theta + j_1 \sin\theta \sin\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_N + j_2 \sin\theta \sin\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_N + j_3 \sin\theta \sin\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_{N-1} + j_4 \sin\theta \sin\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_{N-1} + \ldots\big)$ и последующего перехода к комплексной переменной $\xi = R \cdot e^{i\left(0{,}5\pi - \theta\right)}$ плоскости Θ, секущей пространство $\mathbb{R}^N$ под углами $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. Барицентрический метод в задачах анализа поля в регулярном волноводе с произвольным поперечным сечением // Антенны. 2015. № 1 (212). С. 32–40.
2. Полянский И.С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 1) // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2015. Т. 1. № 1 (78). С. 30–36.
3. Полянский И.С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 2) // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2015. Т. 1. № 1 (78). С. 36–42.
4. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений: Справочное руководство. Киев: Наукова думка, 1964. 536 с.
5. Радыгин В.М., Полянский И.С. Модифицированный метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1 (39). С. 25–35. DOI: 10.17223/19988621/39/3
6. Sudbery A. Quaternionic analysis // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1979. Vol. 85. Issue 2. P. 199–225. DOI: 10.1017/S0305004100055638
7. Альфорс Л. Преобразование Мёбиуса в многомерном пространстве. М.: Мир, 1986. 112 с.
8. Норден А.П. Теория поверхностей. М.: ГИТТЛ, 1956. 260 с.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Поступила в редакцию 27.10.2016

Радыгин Владимир Михайлович, д. т. н., профессор, сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, 302034, Россия, г. Орел, ул. Приборостроительная, 35.
E-mail: stepbystep000@yandex.ru

Полянский Иван Сергеевич, к. т. н., докторант, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, 302034, Россия, г. Орел, ул. Приборостроительная, 35.
E-mail: van341@mail.ru

V. M. Radygin, I. S. Polyanskii

Methods of conformal mappings of polyhedra in $\mathbb{R}^3$

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 60–68 (in Russian).

Keywords: conformal mapping, polyhedron, dihedral angle, polyhedral angle, upper half-space.

MSC2010: 30C20

DOI: 10.20537/vm170106

Methods necessary to solve problems of conformal mapping of polyhedra in $\mathbb{R}^3$ are developed. The results are obtained with the use of quaternion algebra and geometric representations. The direct and inverse conformal mappings are defined: those of the upper half-space onto the unit ball, those of a ball crescent onto the dihedral angle and those of dihedral and polyhedral angles onto the upper half-space. Solutions to the direct and inverse problems of conformal mapping of the polyhedrons onto the upper half-space are found using the results obtained. The solution to the direct problem of conformal mapping is based on the results of the Christoffel–Schwarz theorem. The solution of the inverse problem is obtained by the method of successive conformal mappings. In general, the one-to-one mappings obtained are based on the fact that, by the Liouville theorem, all conformal diffeomorphisms of any area in the space are the Möbius transformations.

REFERENCES

1. Arkhipov N.S., Polyanskij I.S., Stepanov D.E. The barycentric method for the field analysis in a regular waveguide with arbitrary cross-section, *Antenny*, 2015, no. 1 (212), pp. 32–40 (in Russian).
2. Polyansky I.S. Poisson barycentric coordinates for multivariate approximation of scalar potential within an arbitrary area (Part 1), *Vestn. Sarat. Gos. Tekh. Univ.*, 2015, vol. 1, no. 1 (78), pp. 30–36 (in Russian).
3. Polyansky I.S. Poisson barycentric coordinates for multivariate approximation of scalar potential within an arbitrary area (Part 2), *Vestn. Sarat. Gos. Tekh. Univ.*, 2015, vol. 1, no. 1 (78), pp. 36–42 (in Russian).
4. Fil'chakov P.F. *Priblizhennye metody konformnykh otobrazhenii. Spravochnoe rukovodstvo* (Approximate methods of conformal mappings. Handbook), Kiev: Naukova Dumka, 1964, 536 p.
5. Radygin V.M., Polansky I.S. Modified method of successive conformal mappings of polygonal domains, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ., Mat. Mekh.*, 2016, no. 1 (39), pp. 25–35 (in Russian). DOI: 10.17223/19988621/39/3
6. Sudbery A. Quaternionic analysis, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1979, vol. 85, issue 2, pp. 199–225. DOI: 10.1017/S0305004100055638
7. Ahlfors L. *Möbius transformations in several dimensions*, University of Minnesota, 1981. Translated under the title *Preobrazovanie Mebiusa v mnogomernom prostranstve*, Moscow: Mir, 1986, 112 p.
8. Norden A.P. *Teoriya poverkhnostei* (Theory of surfaces), Moscow: Moscow: Gos. Izd. Tekh. Teor. Lit., 1956, 260 p.
9. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* (Methods of the theory of functions of a complex variable), Moscow: Nauka, 1973, 736 p.

Received 27.10.2016

Radygin Vladimir Mikhailovich, Doctor of Engineering, Professor, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation, ul. Priborostroitel'naya, 35, Orel, 302034, Russia.
E-mail: stepbystep000@yandex.ru

Polyanskii Ivan Sergeevich, Candidate of Engineering, Doctoral Student, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation, ul. Priborostroitel'naya, 35, Orel, 302034, Russia.
E-mail: van341@mail.ru