ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 1999, т. 225, с. 301–318

УДК 517.9

# Приближенное решение обратной задачи квантовой теории рассеяния при фиксированной энергии в размерности 2

©1999 г. Р. Г. Новиков[1]

Поступило в декабре 1998 г.

Для двумерного уравнения Шрёдингера мы восстанавливаем потенциал $v \in W_\varepsilon^{N,1}(\mathbb{R}^2)$, $\mathbb{N} \ni N \geq 3$, $\varepsilon > 0$ ($N$ раз гладкий потенциал), по амплитуде рассеяния $f$ при фиксированной энергии $E$ с точностью до $O(E^{-(N-2)/2})$ в равномерной норме при $E \to +\infty$.

## ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим уравнение Шрёдингера в размерности $d \geq 2$

$$-\Delta\psi + v(x)\psi = E\psi, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \qquad E > 0, \tag{1}$$

где

$$v(x) = \overline{v(x)}, \qquad v \in W_\varepsilon^{N,1}(\mathbb{R}^d) \quad \text{для некоторого} \quad \varepsilon > 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad N > d-2, \tag{2}$$

где

$$W_\varepsilon^{N,1}(\mathbb{R}^d) = \{u \mid \Lambda^\varepsilon \partial^n u \in L^1(\mathbb{R}^d) \ \text{ при } |n| \leq N\}, \tag{3}$$

$$(\Lambda^\varepsilon u)(x) = (1+|x|^2)^{\varepsilon/2} u(x), \qquad n \in (\mathbb{N} \cup 0)^d, \qquad |n| = \sum_{j=1}^d n_j,$$

$$\partial^n = \partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d}, \qquad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Рассмотрим амплитуду рассеяния $f(k,l)$, где $k, l \in \mathbb{R}^d$, $k^2 = l^2 = E$, для этого уравнения. По поводу определений амплитуды рассеяния см., например, [3, 10]. Для нахождения $f$ по $v$ можно использовать, в частности, уравнение (1.9) и формулу (1.14).

В настоящей статье мы рассматриваем обратную задачу рассеяния, состоящую в восстановлении $v$ по $f$.

Предположим сначала, что $\|v\| \ll 1$. Тогда $f(k,l) \sim \hat{v}(k-l)$, где

$$\hat{v}(p) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ipx} v(x)\, dx.$$

[1]CNRS, UMR 6629, Département de Mathématiques, Université de Nantes, BP 92208 F-44322, Nantes cedex 03, France и МИТПАН, Москва, Россия. E-mail: novikov@math.univ-nantes.fr

В этом случае обратная задача рассеяния при фиксированной энергии $E > 0$ (так же как и задача восстановления $v$ по $f$, данной на энергетическом интервале $]0, E]$) сводится к восстановлению $v(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, по $\hat{v}(p)$, данному при $p \in \mathbb{R}^d$, $|p| \le 2\sqrt{E}$. Эта линеаризованная обратная задача рассеяния может быть решена по формуле

$$v(x) = v_{\mathrm{appr}}(x, E) + v_{\mathrm{err}}(x, E),$$

где

$$v_{\mathrm{appr}}(x, E) = \int\limits_{|p| \le 2\sqrt{E}} e^{-ipx} \hat{v}(p)\, dp, \qquad v_{\mathrm{err}}(x, E) = \int\limits_{|p| \ge 2\sqrt{E}} e^{-ipx} \hat{v}(p)\, dp.$$

Если $v \in W_\varepsilon^{N,1}(\mathbb{R}^d)$, $\mathbb{N} \ni N > d$, $\varepsilon \ge 0$, то $|\hat{v}(p)| \le C_1(N,d)\|v\|_{W^{N,1}(\mathbb{R}^d)}(1 + |p|)^{-N}$ и $|v_{\mathrm{err}}(x, E)| \le C_2(N,d)\|v\|_{W^{N,1}(\mathbb{R}^d)} E^{-(N-d)/2}$ при $p \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, $E \ge 1$, где $C_1(N,d)$, $C_2(N,d)$ — некоторые положительные константы, $\|v\|_{W^{N,1}(\mathbb{R}^d)} = \max_{|n| \le N} \|\partial^n v\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.

В [14] нам удалось дать приближенные решения нелинеаризованной обратной задачи рассеяния при фиксированной энергии $E$ в размерности $d = 2$ при $v \in W_\varepsilon^{N,1}(\mathbb{R}^2)$, $\mathbb{N} \ni N \ge 3$, $\varepsilon > 0$, с такой же скоростью убывания остатков при $E \to +\infty$, как и в линеаризованном случае.

В настоящей статье (теоремы 2.1, 2.2) мы упрощаем процедуры приближенного восстановления из [14] и уточняем оценки для остатков.

В теореме 2.1 мы даем, в частности, процедуру (линейные уравнения и формулы) для восстановления потенциала $v \in W_\varepsilon^{M,1}(\mathbb{R}^2)$, $\mathbb{N} \ni M \ge 3$, $\varepsilon > 0$, по амплитуде рассеяния $f$ при фиксированной энергии $E$ с точностью до $O(E^{-(M-2)/2})$ в равномерной норме при $E \to +\infty$.

В теореме 2.2 мы даем, в частности, алгоритм, строящий "полином" $P_{x,E,m}(\varphi(\cdot))$ степени $m$ относительно $\varphi \in L^2(S^1 \times S^1)$ такой, что

$$v(x) - \frac{1}{\pi} E^{1/2} P_{x,E,m}(f(\cdot, E)) = O(E^{-(M-2)/2}) + O(E^{\delta - m/2})$$

в равномерной норме при $E \to +\infty$, $\delta > 0$, где $v$ — потенциал, $v \in W_\varepsilon^{M,1}(\mathbb{R}^2)$, $\mathbb{N} \ni M \ge 3$, $\varepsilon > 0$, $f(\cdot, E)$ — амплитуда рассеяния при фиксированной энергии $E$, $\delta$ может быть зафиксировано сколь угодно малым. ($P_{x,E,m}$ не зависит от $v$.)

Мы не воспроизводим во введении процедуру теоремы 2.1, алгоритм теоремы 2.2 и детальные оценки для остатков, данные в этих теоремах. Однако мы хотим отметить, что процедура теоремы 2.1 содержит меньше интегральных уравнений, чем соответствующая процедура из [14], алгоритм теоремы 2.2 проще, чем соответствующий алгоритм из [14], оценки для остатков из теорем 2.1, 2.2 являются более точными, чем соответствующие оценки из [14].

В последующей статье, используя следствие 1.1, уравнения (1.32), (1.34), мы собираемся дать приближенное решение нелинеаризованной обратной задачи рассеяния при фиксированной энергии в размерности $d = 3$ при $v \in W_\varepsilon^{N,1}(\mathbb{R}^3)$, $\mathbb{N} \ni N \ge 4$, $\varepsilon > 0$, с такой же скоростью убывания остатка при $E \to +\infty$, как и в линеаризованном случае.

Мы используем результаты современной теории многомерной обратной задачи рассеяния (см. [3, 8–10, 12, 13]). При этом методы теории многомерной обратной задачи рассеяния при фиксированной энергии (восходящие к [4–7]) являются для нас наиболее существенными.

## 1. ДАННЫЕ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим

$$C^{\alpha,M}(\mathbb{R}^d) = \{u \mid \|u\|_{\alpha,M} < \infty\}, \qquad \alpha \in ]0,1], \qquad M \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где

$$\|u\|_{\alpha,M} = \|\Lambda^M u\|_\alpha, \tag{1.2}$$

$$\|w\|_\alpha = \sup_{p,\xi\in\mathbb{R}^d,\ |\xi|\le 1} (|w(p)| + |\xi|^{-\alpha}|w(p+\xi) - w(p)|), \tag{1.3}$$

$$(\Lambda^M u)(p) = (1+|p|^2)^{M/2} u(p). \tag{1.4}$$

Рассмотрим также $\mathcal{H}_{\alpha,M}$, определенное как замыкание $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ (пространство бесконечно гладких функций с компактным носителем) в $\|\cdot\|_{\alpha,M}$.

Пусть

$$\hat{v}(p) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ipx} v(x)\, dx. \tag{1.5}$$

Если $v$ удовлетворяет (2), то

$$\hat{v} \in \mathcal{H}_{\alpha,M}(\mathbb{R}^d), \qquad \alpha \in ]0,1], \qquad \mathbb{R} \ni M > d-2, \tag{1.6}$$

где $\alpha = \min(1,\varepsilon)$, $M = N$.

Для уравнения (1) при условии (1.6) мы рассматриваем функции Фаддеева (см. [3, 10])

$$\begin{aligned} \psi_\gamma(x,k) &= e^{ikx}\mu_\gamma(x,k), \qquad & h_\gamma(k,l) &= H_\gamma(k,k-l), \\ \psi(x,k) &= e^{ikx}\mu(x,k), \qquad & h(k,l) &= H(k,k-l); \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\mu_\gamma(x,k) = 1 - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\xi x} H_\gamma(k,-\xi)}{\xi^2 + 2(k+i0\gamma)\xi}\, d\xi, \tag{1.8}$$

$$H_\gamma(k,p) = \hat{v}(p) - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{v}(p+\xi) H_\gamma(k,-\xi)}{\xi^2 + 2(k+i0\gamma)\xi}\, d\xi \tag{1.9}$$

при $x,k,l,p \in \mathbb{R}^d$, $\gamma \in S^{d-1} = \{m \mid m \in \mathbb{R}^d,\ |m| = 1\}$;

$$\mu(x,k) = 1 - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\xi x} H(k,-\xi)}{\xi^2 + 2k\xi}\, d\xi, \tag{1.10}$$

$$H(k,p) = \hat{v}(p) - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{v}(p+\xi) H(k,-\xi)}{\xi^2 + 2k\xi}\, d\xi \tag{1.11}$$

при $x,p \in \mathbb{R}^d$, $k,l \in \mathbb{C}^d \backslash \mathbb{R}^d$, $\operatorname{Im} k = \operatorname{Im} l$.

При этом

$$\mu_\gamma(x,k) = \mu(x,k+i0\gamma), \qquad H_\gamma(k,p) = H(k+i0\gamma,p), \tag{1.12}$$

где $k \in \mathbb{R}^d$, $\gamma \in S^{d-1}$. Функции

$$\psi^+(x,k) = e^{ikx}\mu^+(x,k), \qquad \mu^+(x,k) = \mu_{k/|k|}(x,k), \tag{1.13}$$

$$f(k,l) = H_{k/|k|}(k,k-l), \tag{1.14}$$

где $k, l \in \mathbb{R}^d$, являются функциями из классической теории рассеяния, при этом $f(k,l)$, $k,l \in \mathbb{R}^d$, $k^2 = l^2$, называется амплитудой рассеяния.

При фиксированных $\gamma \in S^{d-1}$, $k \in \mathbb{R}^d$ мы рассматриваем (1.9) как уравнение для $H_\gamma(k,\cdot) \in C^{\alpha,M}(\mathbb{R}^d)$. При фиксированном $\gamma \in S^{d-1}$ множество всех $k \in \mathbb{R}^d$, где (1.9) не является однозначно разрешимым, мы обозначаем как $\mathcal{E}_{\mathrm{Re},\gamma}$. При фиксированном $k \in \mathbb{C}^d \backslash \mathbb{R}^d$ мы рассматриваем (1.11) как уравнение для $H(k,\cdot) \in C^{\alpha,M}(\mathbb{R}^d)$. Множество всех $k \in \mathbb{C}^d \backslash \mathbb{R}^d$, где (1.11) не является однозначно разрешимым, мы обозначаем как $\mathcal{E}$.

Рассмотрим операторы $A_\gamma(k)$, $A(k)$ из (1.9), (1.11):

$$\begin{aligned} (A_\gamma(k)u)(p) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat v(p+\xi)u(-\xi)}{\xi^2 + 2(k+i0\gamma)\xi}\,d\xi \qquad \text{при } \gamma \in S^{d-1},\ k \in \mathbb{R}^d, \\ (A(k)u)(p) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat v(p+\xi)u(-\xi)}{\xi^2 + 2k\xi}\,d\xi \qquad \text{при } k \in \mathbb{C}^d \backslash \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Через $c_j$, $E_j$ будем обозначать положительные константы. Мы будем предполагать, что вещественные степени положительных чисел обозначают положительные числа.

**Предложение 1.1.** *При условии* (1.6) *справедливы следующие оценки*:

$$\|\Lambda^M A_\gamma(k)\Lambda^{-M}u\|_\alpha \le (1/2)|k|^{-\sigma} c_1(\alpha, M, \sigma)\|\hat v\|_{\alpha,M}\|u\|_\alpha \tag{1.16}$$

*при* $\gamma \in S^{d-1}$, $k \in \mathbb{R}^d$, $k^2 \ge 1$;

$$\|\Lambda^M A(k)\Lambda^{-M}u\|_\alpha \le |\operatorname{Re} k|^{-\sigma} c_1(\alpha, M, \sigma)\|\hat v\|_{\alpha,M}\|u\|_\alpha \tag{1.17}$$

*при* $k \in \mathbb{C}^d \backslash \mathbb{R}^d$, $\mathbb{R} \ni k^2 \ge 1$, *где* $u \in C^{\alpha,0}(\mathbb{R}^d)$, $0 < \alpha < 1$, $M > d-2$, $0 \le \sigma < \min(1, M-d+2)$.

Мы пишем $1/2$ в (1.16) для удобства доказательства (1.17).

**Доказательство предложения 1.1.** Оценка (1.16) эквивалентна следующей оценке:

$$\|\Lambda_k^M \tilde A_\gamma(k)\Lambda_k^{-M}u\|_\alpha \le (1/2)|k|^{-\sigma} c_1(\alpha, M, \sigma)\|\hat v\|_{\alpha,M}\|u\|_\alpha, \tag{1.18}$$

где

$$(\tilde A_\gamma(k)u)(l) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat v(m-l)u(m)}{m^2 - k^2 + i0\gamma(m-k)}\,dm, \qquad (\Lambda_k u)(l) = (1 + |k-l|^2)^{1/2}u(l). \tag{1.19}$$

В этом можно убедиться с помощью замены переменных и следующих равенств: $\|w_k\|_\alpha = \|\tilde w\|_\alpha = \|w\|_\alpha$, где $w_k(m) = w(m-k)$, $\tilde w(m) = w(-m)$.

Имеется формула (см. [10, §2.3])

$$\tilde A_\gamma(k) = \tilde A^+(k) + \tilde{\tilde A}_\gamma(k), \tag{1.20}$$

где

$$\tilde A^+(k) = \tilde A_{k/|k|}(k), \tag{1.21}$$

$$(\tilde{\tilde A}_\gamma(k)u)(l) = -2\pi i \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat v(m-l)\delta(m^2 - k^2)\theta(\gamma(m-k))u(m)\,dm. \tag{1.22}$$

При предположениях, сформулированных для (1.16), справедливы следующие оценки:

$$\|\Lambda_k^M \tilde{A}^+(k)\Lambda_k^{-M}u\|_\alpha \le |k|^{-\sigma}\tilde{c}_1^+(\alpha,M,\sigma)\|\hat{v}\|_{\alpha,M}\|u\|_\alpha, \tag{1.23}$$

$$\|\Lambda_k^M \tilde{\tilde{A}}_\gamma(k)\Lambda_k^{-M}u\|_\alpha \le |k|^{-\sigma}\tilde{\tilde{c}}_1(\alpha,M,\sigma)\|\hat{v}\|_{\alpha,M}\|u\|_\alpha. \tag{1.24}$$

Оценка (1.23) следует из теоремы 1.1 из [12] для $d=2$ и теоремы 2.1 из [11] для $d=3$. (Отметим, что теорема 2.1 из [11] и теорема 1.1 из [12] являются развитием соответствующих результатов из [1].)

Оценку (1.24) можно получить, используя приведенную выше формулу (1.22) и лемму 1.2 из [12] для $d=2$ и лемму 2.2 из [11] для $d=3$. Оценки (1.18), (1.16) следуют из (1.20), (1.23), (1.24).

Для доказательства (1.17) рассмотрим

$$\begin{aligned} w_\gamma(k,p) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{U(\xi,p)}{\xi^2+2(k+i0\gamma)\xi}\,d\xi \qquad \text{при } \gamma\in S^{d-1},\ k\in\mathbb{R}^d,\\ w(k,p) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{U(\xi,p)}{\xi^2+2k\xi}\,d\xi \qquad\qquad \text{при } k\in\mathbb{C}^d\backslash\mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{1.25}$$

где

$$U(\cdot,p)\in C^{\alpha,r}(\mathbb{R}^d), \qquad 0<\alpha<1, \quad r>d-2, \quad p\in\mathbb{R}^d, \quad d\ge 2. \tag{1.26}$$

**Лемма 1.1.** *Пусть выполнены предположения* (1.25), (1.26). *Пусть* $\gamma\in S^{d-1}$, $k_\perp\in\mathbb{R}^d$, $\gamma k_\perp=0$. *Пусть* $k_\perp\ne 0$, *если* $d=2$. *Тогда функция* $w(s\gamma+k_\perp,p)$ *относительно* $s$ *при фиксированных* $\gamma$, $k_\perp$, $p$ *является ограниченной голоморфной функцией в* $\mathbb{C}_+=\{s\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}s>0\}$, *допускающей непрерывное продолжение в* $\bar{\mathbb{C}}_+=\{s\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}s\ge 0\}$; *при этом* $w((s+i0)\gamma+k_\perp,p)=$ $=w_\gamma(s\gamma+k_\perp,p)$ *при* $s\in\mathbb{R}$.

Лемма 1.1 по существу хорошо известна (см. [10, гл. II]). Соответствующие результаты восходят к [2].

Имеется следующее элементарное (см. [10])

**Утверждение 1.1.** *Пусть* $k\in\mathbb{C}^d\backslash\mathbb{R}^d$, *тогда* $k=s'\gamma+k_\perp$ *при* $\gamma=\operatorname{Im}k/|\operatorname{Im}k|$, $k_\perp=\operatorname{Re}k-(\gamma\operatorname{Re}k)\gamma$, $\operatorname{Im}s'=|\operatorname{Im}k|$, $\operatorname{Re}s=\gamma\operatorname{Re}k$.

При предположениях (1.25), (1.26) справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} |w(k,p)| &\le \sup_{s\in\mathbb{R}}|w_\gamma(s\gamma+k_\perp,p)|,\\ |\xi|^{-\beta}|w(k,p+\xi)-w(k,p)| &\le \sup_{s\in\mathbb{R}}|\xi|^{-\beta}|w_\gamma(s\gamma+k_\perp,p+\xi)-w_\gamma(s\gamma+k_\perp,p)| \end{aligned} \tag{1.27}$$

при $k\in\mathbb{C}^d\backslash\mathbb{R}^d$, $\gamma=\operatorname{Im}k/|\operatorname{Im}k|$, $k_\perp=\operatorname{Re}k-(\gamma\operatorname{Re}k)\gamma\ne 0$, $\xi\in\mathbb{R}^d\backslash 0$, $0<\beta<1$.

Формулы (1.27) следуют из утверждения 1.1, леммы 1.1 и принципа максимума для голоморфных функций.

Из формул (1.25) с

$$U(\xi,p)=(1+p^2)^{M/2}\hat{v}(p+\xi)(1+\xi^2)^{-M/2}u(-\xi),$$

(1.27), (1.3), (1.16) мы получаем (1.17). При этом, используя (1.27) при $k\in\mathbb{C}^d\backslash\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}\ni k^2\ge 1$, мы учитываем соотношения $k_\perp=\operatorname{Re}k$, $|s\gamma+k_\perp|\ge|\operatorname{Re}k|\ge 1$ при $s\in\mathbb{R}$.

Доказательство предложения 1.1 закончено.

Пусть

$$\Sigma(r) = (1-r)^{-1}r. \tag{1.28}$$

**Следствие 1.1.** *Пусть выполнено условие* (1.6). *Тогда*

$$|f(k,l) - \hat{v}(k-l)| \le \Sigma(r)\|\hat{v}\|_{\alpha,M}(1+|k-l|^2)^{-M/2}, \tag{1.29а}$$

$$|H_\gamma(k,p) - \hat{v}(p)| \le \Sigma(r)\|\hat{v}\|_{\alpha,M}(1+p^2)^{-M/2} \tag{1.29б}$$

*при* $r = |k|^{-\sigma}c_1(\alpha,M,\sigma)\|\hat{v}\|_{\alpha,M} < 1$, $k,l,p \in \mathbb{R}^d$, $\gamma \in S^{d-1}$, $k^2 \ge 1$,

$$|H(k,p) - \hat{v}(p)| \le \Sigma(r)\|\hat{v}\|_{\alpha,M}(1+p^2)^{-M/2} \tag{1.29в}$$

*при* $r = |\operatorname{Re} k|^{-\sigma}c_1(\alpha,M,\sigma)\|\hat{v}\|_{\alpha,M} < 1$, $k \in \mathbb{C}^d\backslash\mathbb{R}^d$, $p \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{R} \ni k^2 \ge 1$. *В частности,*

$$|f(k,l)| \le 2\|\hat{v}\|_{\alpha,M}(1+|k-l|^2)^{-M/2}, \qquad k,l \in \mathbb{R}^d, \tag{1.30а}$$

$$|H_\gamma(k,p)| \le 2\|\hat{v}\|_{\alpha,M}(1+p^2)^{-M/2}, \qquad k,p \in \mathbb{R}^d, \quad \gamma \in S^{d-1}, \tag{1.30б}$$

$$|H(k,p)| \le 2\|\hat{v}\|_{\alpha,M}(1+p^2)^{-M/2}, \qquad k \in \mathbb{C}^d\backslash\mathbb{R}^d, \quad p \in \mathbb{R}^d, \tag{1.30в}$$

*при* $k^2 \ge E_1 = \max(1, (2c_1(d,M,\sigma)\|\hat{v}\|_{\alpha,M})^{2/\sigma})$, *где* $0 < \alpha < 1$, $M > d-2$, $0 < \sigma < \min(1, M-d+2)$.

Имеются уравнения (см. [3, 8, 10]):

$$\psi_\gamma(x,k) = \psi^+(x,k) + 2\pi i \int_{\mathbb{R}^d} h_\gamma(k,m)\theta((m-k)\gamma)\delta(m^2-k^2)\psi^+(x,m)\,dm, \tag{1.31}$$

$$h_\gamma(k,l) = f(k,l) + 2\pi i \int_{\mathbb{R}^d} h_\gamma(k,m)\theta((m-k)\gamma)\delta(m^2-k^2)f(m,l)\,dm \tag{1.32}$$

при $\gamma \in S^{d-1}$, $k \in \mathbb{R}^d\backslash\mathcal{E}_{\mathrm{Re},\gamma}$, $x,l \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{k}_j}\mu(x,k) = -2\pi \int_{\mathbb{R}^d} \xi_j e^{i\xi x}H(k,-\xi)\mu(x,k+\xi)\delta(\xi^2+2k\xi)\,d\xi, \tag{1.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{k}_j}H(k,p) = -2\pi \int_{\mathbb{R}^d} \xi_j H(k,-\xi)H(k+\xi,p+\xi)\delta(\xi^2+2k\xi)\,d\xi \tag{1.34}$$

при $k \in \mathbb{C}^d\backslash(\mathbb{R}^d \cup \mathcal{E})$, $x,p \in \mathbb{R}^d$, где $\theta$ — функция Хевисайда, $\delta$ — функция Дирака.

## 2. ОБРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ПРИ ФИКСИРОВАННОЙ ЭНЕРГИИ В РАЗМЕРНОСТИ ДВА

В размерности $d = 2$ мы будем использовать следующую лемму.

**Лемма 2.1.** *При условии* (1.6) *для* $d = 2$ *справедливы оценки*

$$|\mu_\gamma(x,k) - 1| + |\partial_{x_1}\mu_\gamma(x,k)| + |\partial_{x_2}\mu_\gamma(x,k)| \le |k|^{-\sigma}c_2(\alpha,M,\sigma)\|\hat{v}\|_{\alpha,M}, \quad k \in \mathbb{R}^2, \quad \gamma \in S^1, \tag{2.1а}$$

$$|\mu(x,k) - 1| + |\partial_{x_1}\mu(x,k)| + |\partial_{x_2}\mu(x,k)| \le |\operatorname{Re} k|^{-\sigma}c_2(\alpha,M,\sigma)\|\hat{v}\|_{\alpha,M}, \quad k \in \mathbb{C}^2\backslash\mathbb{R}^2, \tag{2.1б}$$

*при* $k^2 \ge E_1(\alpha,M,\sigma,\|\hat{v}\|_{\alpha,M})$, *где* $0 < \alpha < 1$, $M > 1$, $0 < \sigma < \min(1, M-1)$.

Далее в этом разделе мы всегда предполагаем, что условие (1.6), $d = 2$, $M > 1$, *является* выполненным.

Пусть

$$\hat{k}_\perp = |k|^{-1}(-k_2, k_1), \tag{2.2}$$

$$h_\pm(k,l) = h_{\pm\hat{k}_\perp}(k,l), \tag{2.3а}$$

$$\mu_\pm(x,k) = \mu_{\pm\hat{k}_\perp}(x,k), \qquad \psi_\pm(x,k) = \psi_{\pm\hat{k}_\perp}(x,k), \tag{2.3б}$$

где $k \in \mathbb{R}^2$. Отметим, что $\mu_+(x,k) \neq \mu^+(x,k)$, $\psi_+(x,k) \neq \psi^+(x,k)$, как правило.

Пусть

$$b(k) = H(k, 2\operatorname{Re} k), \tag{2.4}$$

где $k \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$, $k^2 \in \mathbb{R}_+$.

Введем обозначения

$$\begin{gathered} z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \qquad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2}), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2}), \\ \lambda = E^{-1/2}(k_1 + ik_2), \qquad \lambda' = E^{-1/2}(l_1 + il_2), \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $k, l \in \mathbb{C}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$, $k^2 = l^2 = E \in \mathbb{R}_+$.

В новых обозначениях

$$\begin{gathered} k_1 = (1/2)E^{1/2}(\lambda + \lambda^{-1}), \qquad k_2 = (i/2)E^{1/2}(\lambda^{-1} - \lambda), \\ \exp(ikx) = \exp[(i/2)E^{1/2}(\lambda\bar{z} + \lambda^{-1}z)]. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Уравнение Шрёдингера (1) принимает вид

$$-4\partial_z\partial_{\bar{z}}\psi + v(z)\psi = E\psi, \qquad z \in \mathbb{C} \tag{2.7}$$

(в этой статье обозначение $u = u(z)$ не значит, что $\partial_{\bar{z}}u(z) = 0$).

Функции $f$ из (1.14), $h_\pm$ из (2.3а), $\mu^+$, $\psi^+$ из (1.13), $\mu_\pm$, $\psi_\pm$ из (2.3б), $\mu$, $\psi$ из (1.7), $b$ из (2.4) принимают вид

$$\begin{aligned} f &= f(\lambda, \lambda', E), & h_\pm &= h_\pm(\lambda, \lambda', E), \\ \mu^+ &= \mu^+(z, \lambda, E), & \psi^+ &= \psi^+(z, \lambda, E), \\ \mu_\pm &= \mu_\pm(z, \lambda, E), & \psi_\pm &= \psi_\pm(z, \lambda, E), \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\lambda, \lambda' \in T = \{\xi \mid \xi \in \mathbb{C},\ |\xi| = 1\}$, $z \in \mathbb{C}$, $E \in \mathbb{R}_+$,

$$\mu = \mu(z, \lambda, E), \qquad \psi = \psi(z, \lambda, E), \qquad b = b(\lambda, E), \tag{2.9}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}\setminus T$, $z \in \mathbb{C}$, $E \in \mathbb{R}_+$.

Для любого $E > E_1$ (где $E_1$ является тем же, что и в следствии 1.1) функция $\mu(z, \lambda, E)$ имеет следующие свойства (см. [9, 13], учитывая предложение 1.1, следствие 1.1, лемму 2.1):

$$\mu(z, \lambda, E) \text{ непрерывна по } \lambda \in \mathbb{C}\setminus T; \tag{2.10}$$

$$\mu(z, \lambda(1 \mp 0), E) = \mu_\pm(z, \lambda, E) \text{ при } \lambda \in T; \tag{2.11}$$

$$\mu_\pm(z,\lambda,E)=\mu^+(z,\lambda,E)+\pi i\int\limits_T h_\pm(\lambda,\lambda'',z,E)\theta\left(\pm i\left(\frac{\lambda}{\lambda''}-\frac{\lambda''}{\lambda}\right)\right)\mu^+(z,\lambda'',E)\,|d\lambda''| \tag{2.12}$$

при $\lambda\in T$, где

$$h_\pm(\lambda,\lambda',z,E)=\exp\left[-\frac{1}{2}E^{1/2}\left(\lambda\bar z+\frac{z}{\lambda}-\lambda'\bar z-\frac{z}{\lambda'}\right)\right]h_\pm(\lambda,\lambda',E); \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar\lambda}\mu(z,\lambda,E)=r(\lambda,z,E)\mu\left(z,-\frac{1}{\bar\lambda},E\right) \tag{2.14}$$

при $\lambda\in\mathbb{C}\backslash T$, где

$$r(\lambda,z,E)=\exp\left[-\frac{i}{2}E^{1/2}\left(\lambda\bar z+\frac{z}{\lambda}+\bar\lambda z+\frac{\bar z}{\bar\lambda}\right)\right]\frac{\pi}{\bar\lambda}\operatorname{sgn}(\lambda\bar\lambda-1)b(\lambda,E); \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered}\mu(z,\lambda,E)=1+\lambda^{-1}\mu_{-1}(z,E)+o(\lambda^{-1}),\qquad \lambda\to\infty,\\ v(z)=2iE^{1/2}\partial_z\mu_{-1}(z,E).\end{gathered} \tag{2.16}$$

Амплитуда рассеяния $f(\lambda,\lambda',E)$ и функции $h_\pm(\lambda,\lambda',E)$ связаны следующим уравнением:

$$h_\pm(\lambda,\lambda',E)-\pi i\int\limits_T h_\pm(\lambda,\lambda'',E)\theta\left(\pm i\left(\frac{\lambda}{\lambda''}-\frac{\lambda''}{\lambda}\right)\right)f(\lambda'',\lambda',E)\,|d\lambda''|=f(\lambda,\lambda',E). \tag{2.17}$$

Отметим, что (2.12) является частным случаем (1.31), (2.14) — частным случаем (1.33), (2.17) — частным случаем (1.32).

Из (1.30), (2.3а), (2.4), (2.6), (2.8), (2.9) следует

$$|f(\lambda,\lambda',E)|\le 2\|\hat v\|_{\alpha,M}(1+E|\lambda-\lambda'|^2)^{-M/2}, \tag{2.18а}$$

$$|h_\pm(\lambda,\lambda',E)\le 2\|\hat v\|_{\alpha,M}(1+E|\lambda-\lambda'|^2)^{-M/2} \tag{2.18б}$$

при $\lambda,\lambda'\in T$, $E\ge E_1$,

$$|b(\lambda,E)|\le 2\|\hat v\|_{\alpha,M}(1+E(|\lambda|+|\lambda|^{-1})^2)^{-M/2} \tag{2.18в}$$

при $\lambda\in\mathbb{C}$, $E>E_1$.

Из (2.1) следует

$$|\mu(z,\lambda,E)-1|+|\partial_z\mu(z,\lambda,E)|\le 1 \tag{2.19}$$

при $z,\lambda\in\mathbb{C}$, $E\ge E_2=\max\{E_1(\alpha,M,\sigma,\|\hat v\|_{\alpha,M}),\ (c_2(\alpha,M,\sigma)\|\hat v\|_{\alpha,M})^{2/\sigma}\}$.

Справедлива следующая формула:

$$v(z)=2iE^{1/2}\partial_z\left(\int\limits_{D_-}r(\xi,z,E)\mu\left(z,-\frac{1}{\bar\xi},E\right)d\xi_R\,d\xi_I+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T\mu_-(z,\xi,E)i\xi\,|d\xi|\right) \tag{2.20}$$

при $z\in\mathbb{C}$, $E\ge E_1$, где $\xi_R=\operatorname{Re}\xi$, $\xi_I=\operatorname{Im}\xi$, $D_-=\{\xi\mid\xi\in\mathbb{C},\ |\xi|>1\}$.

Формула (2.20) следует из (2.10), (2.11), (2.14), (2.16) и формулы Коши–Грина

$$u(\lambda)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_D(\partial_{\bar\xi}u(\xi))\frac{d\xi_R\,d\xi_I}{\xi-\lambda}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}u(\xi)\frac{d\xi}{\xi-\lambda},\qquad\lambda\in D. \tag{2.21}$$

Справедлива следующая оценка:

$$\left|v(z)-\frac{1}{\pi}E^{1/2}\left(\int\limits_T \partial_z\mu^+(z,\lambda,E)i\lambda\,|d\lambda|+\pi i\int\limits_T\int\limits_T h_-(\lambda,\xi,z,E)\theta\left(-i\left(\frac{\lambda}{\xi}-\frac{\xi}{\lambda}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\partial_z\mu^+(z,\xi,E)-\frac{i}{2}E^{1/2}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\xi}\right)\mu^+(z,\xi,E)\right)|d\xi|\,i\lambda\,|d\lambda|\right)\right|\le c_3\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-(M-2)/2} \tag{2.22}$$

при $z\in\mathbb{C}$, $E\ge E_2$, $M\ge 3$.

Оценка (2.22) следует из (2.20), (2.12) и оценки

$$\left|2iE^{1/2}\partial_z\int\limits_{D_-} r(\xi,z,E)\mu\left(z,-\frac{1}{\bar\xi},E\right)d\xi_R\,d\xi_I\right|\le c_3\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-(M-2)/2} \tag{2.23}$$

при $z\in\mathbb{C}$, $E\ge E_2$, $M\ge 3$.

Оценка (2.23) следует из (2.15), (2.18в), (2.19) и оценки

$$\int\limits_{D_-}\frac{(|\xi|+|\xi|^{-1})\,d\xi_R\,d\xi_I}{|\xi|(1+E(|\xi|+|\xi|^{-1})^2)^{M/2}}\le \text{const}\cdot E^{-M/2},\qquad M\ge 3,\quad E\ge 1. \tag{2.24}$$

Справедливы следующие формулы:

$$\mu^+(z,\lambda,E)+\int\limits_T B(\lambda,\lambda',z,E)\mu^+(z,\lambda',E)\,|d\lambda'|=1+\varphi(z,\lambda,E), \tag{2.25а}$$

$$\partial_z\mu^+(z,\lambda,E)+\int\limits_T B(\lambda,\lambda',z,E)\partial_z\mu^+(z,\lambda',E)\,|d\lambda'|=$$

$$=\partial_z\varphi(z,\lambda,E)-\int\limits_T(\partial_z B(\lambda,\lambda',z,E))\mu^+(z,\lambda',E)\,|d\lambda'| \tag{2.25б}$$

при $\lambda\in T$, $z\in\mathbb{C}$, $E\ge E_1$, где

$$B(\lambda,\lambda',z,E)=\frac{1}{2}\int\limits_T h_-(\xi,\lambda',z,E)\theta\left(-i\left(\frac{\xi}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\xi}\right)\right)\frac{d\xi}{\xi-\lambda(1-0)}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_T h_+(\xi,\lambda',z,E)\theta\left(i\left(\frac{\xi}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\xi}\right)\right)\frac{d\xi}{\xi-\lambda(1+0)}, \tag{2.26а}$$

$$\partial_z B(\lambda,\lambda',z,E)=\frac{1}{2}\int\limits_T -\frac{i}{2}E^{1/2}\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\lambda'}\right)h_-(\xi,\lambda',z,E)\theta\left(-i\left(\frac{\xi}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\xi}\right)\right)\frac{d\xi}{\xi-\lambda(1-0)}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_T -\frac{i}{2}E^{1/2}\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\lambda'}\right)h_+(\xi,\lambda',z,E)\theta\left(i\left(\frac{\xi}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\xi}\right)\right)\frac{d\xi}{\xi-\lambda(1+0)}, \tag{2.26б}$$

$$\varphi(z,\lambda,E)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} r(\xi,z,E)\mu\left(z,-\frac{1}{\bar\xi},E\right)\frac{d\xi_R\,d\xi_I}{\xi-\lambda}. \tag{2.27}$$

Вывод (2.25) состоит в следующем. Рассмотрим операторы $C_\pm$, действующие в $L^p(T)$, $1<p<\infty$:

$$(C_\pm u)(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{u(\xi)}{\xi-\lambda(1\mp 0)}\,d\xi, \qquad \lambda\in T. \tag{2.28}$$

Имеется тождество

$$C_+u-C_-u=u. \tag{2.29}$$

Имеются оценки

$$\|C_\pm u\|_{L^p(T)}\le c_4(p)\|u\|_{L^p(T)}, \qquad \|C_\pm u\|_{L^p(T)}\le c_5(p)\|u\|_{L^\infty(T)}, \qquad 1<p<\infty. \tag{2.30}$$

Рассмотрим

$$\chi(z,\lambda,E)=\mu(z,\lambda,E)-\varphi(z,\lambda,E), \qquad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{2.31а}$$

$$\chi_\pm(z,\lambda,E)=\chi(z,\lambda(1\mp 0),E)=\mu_\pm(z,\lambda,E)-\varphi(z,\lambda,E), \qquad \lambda\in T. \tag{2.31б}$$

Функция $\chi(z,\lambda,E)$ имеет свойства

$$\frac{\partial}{\partial\bar\lambda}\chi(z,\lambda,E)=0 \quad \text{при} \quad \lambda\in\mathbb{C}\backslash T, \qquad \chi(z,\lambda,E)\to 1 \quad \text{при} \quad \lambda\to\infty. \tag{2.32}$$

Как следствие

$$C_+\chi_-=1, \qquad C_-\chi_+=0, \qquad C_+\chi_- - C_-\chi_+=1. \tag{2.33}$$

Из (2.33), (2.31б), (2.29) следует

$$C_+\mu_- - C_-\mu_+=1+\varphi. \tag{2.34}$$

Формулы (2.25) следуют из (2.34), (2.28), (2.12).

Справедливы следующие оценки:

$$|\varphi(z,\lambda,E)|\le c_6\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-M/2}, \qquad |\partial_z\varphi(z,\lambda,E)|\le c_6\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-(M-1)/2}, \tag{2.35}$$

в частности,

$$\begin{aligned}\|\varphi(z,\cdot,E)\|_{L^p(T)}&\le(2\pi)^{1/p}c_6\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-M/2},\\ \|\partial_z\varphi(z,\cdot,E)\|_{L^p(T)}&\le(2\pi)^{1/p}c_6\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-(M-1)/2}\end{aligned} \tag{2.36}$$

при $z\in\mathbb{C}$, $\lambda\in T$, $E\ge E_2$, $M\ge 3$, $p>1$.

Оценки (2.35) следуют из (2.27), (2.15), (2.18в), (2.19) и следующей оценки:

$$\int\limits_{\mathbb{C}}\frac{(|\xi|+|\xi|^{-1})\,d\xi_R\,d\xi_I}{|\xi|(1+E(|\xi|+|\xi|^{-1})^2)^{M/2}|\xi-\lambda|}\le \text{const}\cdot E^{-M/2} \tag{2.37}$$

при $\lambda\in T$, $M\ge 3$, $E\ge 1$.

Для того чтобы исследовать (2.17), (2.25), рассмотрим теперь операторы $P_\pm(\lambda, E)$, $Q(z, E)$, $B(z, E)$, действующие в $L^p(T)$, $1 < p$:

$$(P_\pm(\lambda, E)u)(\lambda') = -\pi i \int_T u(\lambda'')\theta\left(\pm i\left(\frac{\lambda}{\lambda''} - \frac{\lambda''}{\lambda}\right)\right) f(\lambda'', \lambda', E)\,|d\lambda''|, \tag{2.38}$$

$$(Q_\pm(z, E)u)(\lambda) = \pi i \int_T h_\pm(\lambda, \lambda', z, E)\theta\left(\pm i\left(\frac{\lambda}{\lambda'} - \frac{\lambda'}{\lambda}\right)\right) u(\lambda')\,|d\lambda'|, \tag{2.39}$$

$$B(z, E) = C_+Q_-(z, E) - C_-Q_+(z, E), \tag{2.40а}$$

$$(B(z, E)u)(\lambda) = \int_T B(\lambda, \lambda', z, E)u(\lambda')\,|d\lambda'|. \tag{2.40б}$$

Справедливы следующие оценки:

$$\|P_\pm(\lambda, E)u\|_{L^\infty(T)} \le c_7\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-1/2}\|u\|_{L^\infty(T)}, \tag{2.41}$$

$$\|Q_\pm(z, E)u\|_{L^\infty(T)} \le c_7^{(p-1)/p}\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-(p-1)/2p}\|u\|_{L^p(T)}, \tag{2.42а}$$

$$\|\partial_z Q_\pm(z, E)u\|_{L^\infty(T)} \le c_7^{(p-1)/p}\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-(p-1)/2p}\|u\|_{L^p(T)}, \tag{2.42б}$$

$$\|B(z, E)u\|_{L^p(T)} \le c_8(p)\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-(p-1)/2p}\|u\|_{L^p(T)}, \tag{2.43а}$$

$$\|\partial_z B(z, E)u\|_{L^p(T)} \le c_8(p)\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-(p-1)/2p}\|u\|_{L^p(T)}, \tag{2.43б}$$

$$c_8(p) = 2c_5(p)c_7^{(p-1)/p}, \tag{2.44}$$

при $M \ge 3$, $E \ge E_1$, $1 < p < \infty$.

Оценки (2.41)–(2.43) следуют из (2.38)–(2.40), (2.18а), (2.18б), (2.30) и оценок

$$2\pi\int_T (1 + E|\lambda - \lambda'|^2)^{-M/2}\,|d\lambda'| \le c_7E^{-1/2}, \tag{2.45а}$$

$$2\pi\int_T E^{1/2}|\lambda - \lambda'|(1 + E|\lambda - \lambda'|^2)^{-M/2}\,|d\lambda'| \le c_7E^{-1/2}, \tag{2.45б}$$

$$2\pi\int_T (1 + E|\lambda - \lambda'|^2)^{-M/2}|u(\lambda')|\,|d\lambda'| \le c_7^{1/q}E^{-1/(2q)}\|u\|_{L^p(T)}, \tag{2.45в}$$

$$2\pi\int_T E^{1/2}|\lambda - \lambda'|(1 + E|\lambda - \lambda'|^2)^{-M/2}|u(\lambda')|\,|d\lambda'| \le c_7^{1/q}E^{-1/(2q)}\|u\|_{L^p(T)} \tag{2.45г}$$

при $M \ge 3$, $E \ge 1$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$.

Пусть $\|\cdot\|^{\mathrm{op}}_{L^p(T)}$ обозначает норму оператора, действующего в $L^p(T)$.

Пусть

$$c_9(p) = \max(c_7, c_8(p)), \tag{2.46}$$

$$E_3 = E_3(\alpha, M, \sigma, p, \|\hat v\|_{\alpha,M}) = \max\left\{E_2(\alpha, M, \sigma, \|\hat v\|_{\alpha,M}), (2c_9(p)\|\hat v\|_{\alpha,M})^{2p/(p-1)}\right\}, \tag{2.47}$$

где $0 < \alpha < 1$, $M \ge 3$, $0 < \sigma < 1$, $1 < p < \infty$.

Имеются оценки

$$\|P_\pm(\lambda,E)\|^{\mathrm{op}}_{L^\infty(T)} \le \delta_1, \qquad \delta_1 = c_7\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-1/2}, \tag{2.48}$$

$$\|B(z,E)\|^{\mathrm{op}}_{L^p(T)} \le \delta_2, \qquad \|\partial_z B(z,E)\|^{\mathrm{op}}_{L^p(T)} \le \delta_2, \qquad \delta_2 = c_8(p)\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-(p-1)/(2p)}, \tag{2.49}$$

$$\delta_1 < \delta, \qquad \delta_2 < \delta, \qquad \delta = c_9(p)\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-(p-1)/(2p)} \tag{2.50а}$$

при $M \ge 3$, $E \ge E_1$, $1 < p < \infty$; если при этом $\delta_2 < 1$, то

$$\left\|(I+B(z,E))^{-1} - I\right\|^{\mathrm{op}}_{L^p(T)} \le \delta_2/(1-\delta_2); \tag{2.51}$$

если при этом $E \ge E_3$, то

$$\delta \le 1/2. \tag{2.50б}$$

Эти оценки следуют из (2.41), (2.43), (2.46), (2.47).

Рассмотрим теперь функции $\tilde\mu^+(z,\lambda,E)$, $\partial_z\tilde\mu^+(z,\lambda,E)$, непрерывные по $\lambda \in T$, такие, что

$$\tilde\mu^+(z,\lambda,E) + \int_T B(\lambda,\lambda',z,E)\tilde\mu^+(z,\lambda',E)\,|d\lambda'| = 1, \tag{2.52а}$$

$$\partial_z\tilde\mu^+(z,\lambda,E) + \int_T B(\lambda,\lambda',z,E)\partial_z\tilde\mu^+(z,\lambda',E)\,|d\lambda'| = -\int_T (\partial_z B(\lambda,\lambda',z,E))\tilde\mu^+(z,\lambda',E)\,|d\lambda'|. \tag{2.52б}$$

Из (2.25), (2.36), (2.49)–(2.51), (2.52) следует

$$\|\mu^+(z,\cdot,E) - \tilde\mu^+(z,\cdot,E)\|_{L^p(T)} \le (2\pi)^{1/p}c_{10}\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-M/2}, \tag{2.53а}$$

$$\|\partial_z\mu^+(z,\cdot,E) - \partial_z\tilde\mu^+(z,\cdot,E)\|_{L^p(T)} \le (2\pi)^{1/p}c_{10}\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-(M-1)/2} \tag{2.53б}$$

при $z \in \mathbb{C}$, $M \ge 3$, $E \ge E_3$, $1 < p < \infty$.

Из (2.22), (2.53), (2.42) следует

$$v(z) = v_{\mathrm{appr}}(z,E) + v_{\mathrm{err}}(z,E), \tag{2.54а}$$

где

$$v_{\mathrm{appr}}(z,E) = \frac{1}{\pi}E^{1/2}\left(\int_T \partial_z\tilde\mu^+(z,\lambda,E)i\lambda|d\lambda| + \pi i\int_T\int_T h_-(\lambda,\xi,z,E)\times\right.$$

$$\left.\times\,\theta\left(-i\left(\frac{\lambda}{\xi}-\frac{\xi}{\lambda}\right)\right)\left(\partial_z\tilde\mu^+(z,\xi,E) - \frac{i}{2}E^{1/2}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\xi}\right)\tilde\mu^+(z,\xi,E)\right)|d\xi|\,i\lambda\,|d\lambda|\right), \tag{2.54б}$$

$$|v_{\mathrm{err}}(z,E)| \le c_{11}(p)\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-(M-2)/2}, \tag{2.54в}$$

где $z \in \mathbb{C}$, $E \ge E_3(\alpha,M,\sigma,p,\|\hat v\|_{\alpha,M})$, $0 < \alpha < 1$, $M \ge 3$, $0 < \sigma < 1$, $1 < p < \infty$.

**Теорема 2.1.** *При условии* (1.6), *при* $d = 2$, $M \ge 3$ *амплитуда рассеяния* $f$ *при фиксированной энергии* $E$ *определяет потенциал* $v$ *конструктивно и устойчиво с точностью до* $O(E^{-(M-2)/2})$ *в равномерной норме при* $E \to +\infty$ *через* (2.17), (2.13), (2.26), (2.52), (2.54).

Теорема 2.1 следует из (2.54), (2.52), (2.26), (2.13), (2.48)–(2.51), (2.40), (2.39), (2.30).

**Замечание 2.1.** Для приближенного потенциала $v_{\mathrm{appr}}(z,E)$, построенного в теореме 2.1, амплитуда рассеяния при фиксированной энергии $E \geq E_3$ совпадает с амплитудой рассеяния $f$ при фиксированной энергии $E$ для исходного потенциала $v(z)$.

Наша следующая цель — предложить явную реализацию процедуры восстановления из теоремы 2.1.

Под $n$-м приближением к решению интегрального уравнения $(I+K)\psi = \psi_0$ мы понимаем $\psi_n = \sum_{j=0}^{n}(-K)^j\psi_0$.

Пусть $h_{\pm,n}$ обозначает $n$-е приближение к решению $h_\pm$ уравнения (2.17).

Справедливы следующие формулы:

$$h_{\pm,n}(\lambda,\lambda',E) = \sum_{j=0}^{n} h_\pm^{(j)}(\lambda,\lambda',E), \tag{2.55}$$

$$h_\pm^{(j)}(\lambda,\cdot,E) = (-P_\pm(\lambda,E))^j f(\lambda,\cdot,E), \tag{2.56}$$

$$\begin{gathered} h_\pm^{(0)}(\lambda,\lambda',E) = f(\lambda,\lambda',E), \\ h_\pm^{(j)}(\lambda,\lambda',E) = \underbrace{\int_T \dots \int_T}_{j} f(\lambda,\xi_1,E)\dots \pi i\theta\left(\pm i\left(\frac{\lambda}{\xi_l}-\frac{\xi_l}{\lambda}\right)\right) f(\xi_l,\xi_{l+1},E)\dots \\ \dots \pi i\theta\left(\pm i\left(\frac{\lambda}{\xi_j}-\frac{\xi_j}{\lambda}\right)\right) f(\xi_j,\lambda',E)\,|d\xi_1|\dots|d\xi_l|\dots|d\xi_j|. \end{gathered} \tag{2.57}$$

Эти формулы следуют из определений.

Рассмотрим

$$h_{\pm,n}(\lambda,\lambda',z,E) = \exp\left[-\frac{1}{2}E^{1/2}\left(\lambda\bar z+\frac{z}{\lambda}-\lambda'\bar z-\frac{z}{\lambda'}\right)\right] h_{\pm,n}(\lambda,\lambda',E), \tag{2.58а}$$

$$h_\pm^{(j)}(\lambda,\lambda',z,E) = \exp\left[-\frac{1}{2}E^{1/2}\left(\lambda\bar z+\frac{z}{\lambda}-\lambda'\bar z-\frac{z}{\lambda'}\right)\right] h_\pm^{(j)}(\lambda,\lambda',E), \tag{2.58б}$$

$$f(\lambda,\lambda',z,E) = \exp\left[\frac{1}{2}E^{1/2}\left(\lambda\bar z+\frac{z}{\lambda}-\lambda'\bar z-\frac{z}{\lambda'}\right)\right] f(\lambda,\lambda',E). \tag{2.58в}$$

Рассмотрим операторы $Q_{\pm,n}(z,E)$, $Q_\pm^{(j)}(z,E)$, $B_n(z,E)$, $B^{(j)}(z,E)$, действующие в $L^p(T)$, $1<p$:

$$(Q_{\pm,n}(z,E)u)(\lambda) = \pi i\int_T h_{\pm,n}(\lambda,\lambda',z,E)\theta\left(\pm i\left(\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\lambda}\right)\right)u(\lambda')\,|d\lambda'|, \tag{2.59а}$$

$$Q_{\pm,n}(z,E) = \sum_{j=0}^{n} Q_\pm^{(j)}(z,E), \tag{2.59б}$$

$$(Q_\pm^{(j)}(z,E)u)(\lambda) = \pi i\int_T h_\pm^{(j)}(\lambda,\lambda',z,E)\theta\left(\pm i\left(\frac{\lambda}{\lambda'}-\frac{\lambda'}{\lambda}\right)\right)u(\lambda')\,|d\lambda'|, \tag{2.60}$$

$$B_n(z,E) = C_+Q_{-,n}(z,E) - C_-Q_{+,n}(z,E), \tag{2.61а}$$

$$B_n(z,E) = \sum_{j=0}^{n} B^{(j)}(z,E), \tag{2.61б}$$

$$B^{(j)}(z,E) = C_+Q_-^{(j)}(z,E) - C_-Q_+^{(j)}(z,E). \tag{2.62}$$

Справедливы следующие оценки:

$$\|Q_{\pm}^{(j)}(z,E)u\|_{L^\infty(T)} \le \tilde\delta_1 \delta_1^j \|u\|_{L^p(T)}, \tag{2.63а}$$

$$\|\partial_z Q_{\pm}^{(j)}(z,E)u\|_{L^\infty(T)} \le (j+1)\tilde\delta_1 \delta_1^j \|u\|_{L^p(T)}, \tag{2.63б}$$

$$\|Q_{\pm,n}(z,E)u\|_{L^\infty(T)} \le \tilde\delta_1 \left(\frac{1-\delta_1^{n+1}}{1-\delta_1}\right) \|u\|_{L^p(T)}, \tag{2.64а}$$

$$\|\partial_z Q_{\pm,n}(z,E)u\|_{L^\infty(T)} \le \tilde\delta_1 \left(\frac{1-(n+2)\delta_1^{n+1}}{1-\delta_1} + \frac{\delta_1(1-\delta_1^{n+1})}{(1-\delta_1)^2}\right) \|u\|_{L^p(T)}, \tag{2.64б}$$

$$\|(Q_{\pm}(z,E) - Q_{\pm,n}(z,E))u\|_{L^\infty(T)} \le \tilde\delta_1 \delta_1^{n+1} \left(\frac{1}{1-\delta_1}\right) \|u\|_{L^p(T)}, \tag{2.65а}$$

$$\|(\partial_z Q_{\pm}(z,E) - \partial_z Q_{\pm,n}(z,E))u\|_{L^\infty(T)} \le \tilde\delta_1 \delta_1^{n+1} \left(\frac{n+2}{1-\delta_1} + \frac{\delta_1}{(1-\delta_1)^2}\right) \|u\|_{L^p(T)}, \tag{2.65б}$$

$$\|B^{(j)}(z,E)\|^{\mathrm{op}}_{L^p(T)} \le \delta_2 \delta_1^j, \tag{2.66а}$$

$$\|\partial_z B^{(j)}(z,E)\|^{\mathrm{op}}_{L^p(T)} \le (j+1)\delta_2 \delta_1^j, \tag{2.66б}$$

$$\|B_n(z,E)\|^{\mathrm{op}}_{L^p(T)} \le \delta_2 \left(\frac{1-\delta_1^{n+1}}{1-\delta_1}\right), \tag{2.67а}$$

$$\|\partial_z B_n(z,E)\|^{\mathrm{op}}_{L^p(T)} \le \delta_2 \left(\frac{1-(n+2)\delta_1^{n+1}}{1-\delta_1} + \frac{\delta_1(1-\delta_1^{n+1})}{(1-\delta_1)^2}\right), \tag{2.67б}$$

$$\|B(z,E) - B_n(z,E)\|^{\mathrm{op}}_{L^p(T)} \le \delta_2 \delta_1^{n+1} \left(\frac{1}{1-\delta_1}\right), \tag{2.68а}$$

$$\|\partial_z B(z,E) - \partial_z B_n(z,E)\|^{\mathrm{op}}_{L^p(T)} \le \delta_2 \delta_1^{n+1} \left(\frac{n+2}{1-\delta_1} + \frac{\delta_1}{(1-\delta_1)^2}\right), \tag{2.68б}$$

где $\delta_1$, $\delta_2$ определены в (2.48), (2.49),

$$\tilde\delta_1 = c_7^{(p-1)/p} \|\hat v\|_{\alpha,M} E^{-(p-1)/(2p)}, \tag{2.69}$$

при $z \in \mathbb{C}$, $M \ge 3$, $E \ge E_1$, $1 < p < \infty$.

Оценки (2.66)–(2.68) следуют из (2.61), (2.62), (2.40а), (2.63)–(2.65), (2.30).

Для доказательства (2.63)–(2.65) мы используем формулы

$$h_{\pm}^{(j)}(\lambda,\lambda',z,E) = \underbrace{\int_T \dots \int_T}_{j} f(\lambda,\xi_1,z,E) \dots \pi i\theta\left(\pm i\left(\frac{\lambda}{\xi_l} - \frac{\xi_l}{\lambda}\right)\right) f(\xi_l,\xi_{l+1},z,E) \dots$$

$$\dots \pi i\theta\left(\pm i\left(\frac{\lambda}{\xi_j} - \frac{\xi_j}{\lambda}\right)\right) f(\xi_j,\lambda',z,E)\, |d\xi_1| \dots |d\xi_j|, \tag{2.70}$$

$$Q_{\pm,\infty}(z,E) = Q_{\pm}(z,E), \tag{2.71}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j = \frac{1-\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}, \qquad \sum_{j=n+1}^{\infty} \varepsilon^j = \frac{\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}, \qquad |\varepsilon| < 1, \tag{2.72а}$$

$$\sum_{j=0}^{n} (j+1)\varepsilon^j = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\varepsilon\left(\frac{1-\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}\right)\right), \qquad \sum_{j=n+1}^{\infty} (j+1)\varepsilon^j = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon^{n+2}}{1-\varepsilon}\right), \qquad |\varepsilon| < 1. \tag{2.72б}$$

Оценки (2.63) следуют из (2.60), (2.70), (2.58в), (2.18а), (2.45). Оценки (2.64), (2.65) следуют из (2.59б), (2.71) и (2.63), (2.72).

Пусть

$$E_4(\alpha, M, \sigma, p, \|\hat{v}\|_{\alpha,M}) = \max\left\{E_2(\alpha, M, \sigma, \|\hat{v}\|_{\alpha,M}), (3c_9(p)\|\hat{v}\|_{\alpha,M})^{2p/(p-1)}\right\}, \tag{2.73}$$

где $0 < \alpha < 1$, $M \geq 3$, $0 < \sigma < 1$, $1 < p < \infty$. Имеются оценки

$$\|B_n(z,E)\|^{\mathrm{op}}_{L^p(T)} \leq (3/2)\delta_2, \tag{2.74а}$$

$$\|(I + B_n(z,E))^{-1} - I\|^{\mathrm{op}}_{L^p(T)} \leq 3\delta_2, \tag{2.74б}$$

$$\|B(z,E) - B_n(z,E)\|^{\mathrm{op}}_{L^p(T)} \leq (3/2)\delta_2\delta_1^{n+1}, \tag{2.74в}$$

$$\|\partial_z B_n(z,E)\|^{\mathrm{op}}_{L^p(T)} \leq (9/4)\delta_2, \tag{2.74г}$$

$$\|\partial_z B(z,E) - \partial_z B_n(z,E)\|^{\mathrm{op}}_{L^p(T)} \leq (3/2)(n+3)\delta_2\delta_1^{n+1}, \tag{2.74д}$$

$$\delta \leq 1/3, \tag{2.75}$$

где $\delta$ определено в (2.50), при $z \in \mathbb{C}$, $M \geq 3$, $E \geq E_4$, $1 < p < \infty$.

Оценки (2.74) следуют из (2.67), (2.68), (2.72а), (2.75).

Рассмотрим теперь функции $\tilde{\mu}^{+,n}(z,\lambda,E)$, $\partial_z\tilde{\mu}^{+,n}(z,\lambda,E)$, непрерывные по $\lambda \in T$, такие, что

$$\begin{gathered}\tilde{\mu}^{+,n}(z,\cdot,E) + B_n(z,E)\tilde{\mu}^{+,n}(z,\cdot,E) = 1,\\ \partial_z\tilde{\mu}^{+,n}(z,\cdot,E) + B_n(z,E)\partial_z\tilde{\mu}^{+,n}(z,\cdot,E) = -(\partial_z B_n(z,E))\tilde{\mu}^{+,n}(z,\cdot,E).\end{gathered} \tag{2.76}$$

Справедливы следующие оценки:

$$\begin{gathered}\|\mu^+(z,\cdot,E) - \tilde{\mu}^{+,n}(z,\cdot,E)\|_{L^p(T)} \leq c_{12}\delta_2\delta_1^{n+1},\\ \|\partial_z\mu^+(z,\cdot,E) - \partial_z\tilde{\mu}^{+,n}(z,\cdot,E)\|_{L^p(T)} \leq (n+3)c_{12}\delta_2\delta_1^{n+1}\end{gathered} \tag{2.77}$$

при $z \in \mathbb{C}$, $M \geq 3$, $E \geq E_4$, $1 < p < \infty$.

Оценки (2.77) следуют из (2.74) и следующих формул:

$$\begin{gathered}\tilde{\mu}^+(z,\cdot,E) + B_n(z,E)\tilde{\mu}^+(z,\cdot,E) = 1 + (B_n(z,E) - B(z,E))\tilde{\mu}^+(z,\cdot,E),\\ \partial_z\tilde{\mu}^+(z,\cdot,E) + B_n(z,E)\partial_z\tilde{\mu}^+(z,\cdot,E) = -(\partial_z B_n(z,E))\tilde{\mu}^+(z,\cdot,E) +\\ + (\partial_z B_n(z,E) - \partial_z B(z,E))\tilde{\mu}^+(z,\cdot,E) + (B_n(z,E) - B(z,E))\partial_z\tilde{\mu}^+(z,\cdot,E);\end{gathered} \tag{2.78}$$

$$\|\tilde{\mu}^+(z,\cdot,E)\|_{L^p(T)} \leq c_{13}, \qquad \|\partial_z\tilde{\mu}^+(z,\cdot,E)\|_{L^p(T)} \leq c_{13}\delta_2 \tag{2.79}$$

при $z \in \mathbb{C}$, $M \geq 3$, $E \geq E_4$, $1 < p < \infty$.

В свою очередь (2.78) эквивалентно (2.52); (2.79) следует из (2.52), (2.51), (2.49).

Пусть

$$\tilde{\mu}_m^{+,n}(z,\cdot,E) = \sum_{j=0}^{m}(-B_n(z,E))^j 1, \qquad \partial_z\tilde{\mu}_m^{+,n}(z,\cdot,E) = \partial_z\sum_{j=0}^{m}(-B_n(z,E))^j 1. \tag{2.80}$$

Отметим, что $(\tilde{\mu}_m^{+,n}, \partial_z\tilde{\mu}_m^{+,n})$ является $m$-м приближением к решению $(\tilde{\mu}^{+,n}, \partial_z\tilde{\mu}^{+,n})$ системы (2.76).

Справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}\|\tilde\mu^{+,n}(z,\cdot,E)-\tilde\mu^{+,n}_m(z,\cdot,E)\|_{L^p(T)}&\le(2\pi)^{1/p}\cdot 2(3\delta_2/2)^{m+1},\\ \|\partial_z\tilde\mu^{+,n}(z,\cdot,E)-\partial_z\tilde\mu^{+,n}_m(z,\cdot,E)\|_{L^p(T)}&\le(2\pi)^{1/p}\cdot 3(m+2)(3\delta_2/2)^{m+1},\end{aligned}\tag{2.81}$$

$$\begin{aligned}\|\tilde\mu^{+}(z,\cdot,E)-\tilde\mu^{+,n}_{n+1}(z,\cdot,E)\|_{L^p(T)}&\le c_{14}(n)\delta^{n+2},\\ \|\partial_z\tilde\mu^{+}(z,\cdot,E)-\partial_z\tilde\mu^{+,n}_{n+1}(z,\cdot,E)\|_{L^p(T)}&\le c_{14}(n)\delta^{n+2}\end{aligned}\tag{2.82}$$

при $z\in\mathbb{C}$, $M\ge 3$, $E\ge E_4$, $1<p<\infty$.

Оценки (2.81) следуют из (2.80), (2.74а), (2.74г), (2.72) и соотношения $(\tilde\mu^{+,n},\partial_z\tilde\mu^{+,n})=(\tilde\mu^{+,n}_\infty,\partial_z\tilde\mu^{+,n}_\infty)$.

Оценки (2.82) следуют из (2.81), (2.50а).

Справедливы следующие формулы:

$$v(z)=v^{\mathrm{prel}}_{\mathrm{appr}}(z,E,n)+v^{\mathrm{prel}}_{\mathrm{err}}(z,E,n),\tag{2.83а}$$

где

$$\begin{aligned}v^{\mathrm{prel}}_{\mathrm{appr}}(z,E,n)=\frac{1}{\pi}E^{1/2}\int_T\Big(&\partial_z\tilde\mu^{+,n}_{n+1}(z,\lambda,E)+(Q_{-,n-1}(z,E)\partial_z\tilde\mu^{+,n-1}_n(z,\cdot,E))(\lambda)+\\&+(\partial_zQ_{-,n}(z,E)\tilde\mu^{+,n-1}_n(z,\cdot,E))(\lambda)\Big)i\lambda\,|d\lambda|,\end{aligned}\tag{2.83б}$$

$$|v^{\mathrm{prel}}_{\mathrm{err}}(z,E,n)|\le c_{11}(p)\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-(M-2)/2}+c_{15}(n,p)(\|\hat v\|_{\alpha,M})^{n+2}E^{1/2-(n+2)(p-1)/(2p)}\tag{2.83в}$$

при $z\in\mathbb{C}$, $0<\alpha<1$, $M\ge 3$, $E\ge E_4$, $1<p<\infty$, $\mathbb{Z}\ni n\ge 0$, $Q_{-,-1}(z,E)=I$, $\tilde\mu^{+,-1}_0(z,\lambda,E)\equiv 1$.

Формулы (2.83) следуют из (2.54), (2.65), (2.42), (2.82) и следующих формул:

$$\begin{aligned}Q_-(z,E)\partial_z\tilde\mu^{+}(z,\cdot,E)&=Q_{-,n-1}(z,E)\partial_z\tilde\mu^{+,n-1}_n(z,\cdot,E)+\\&+(Q_-(z,E)-Q_{-,n-1}(z,E))\partial_z\tilde\mu^{+,n-1}_n(z,\cdot,E)+Q_-(z,E)(\partial_z\tilde\mu^{+}(z,\cdot,E)-\partial_z\tilde\mu^{+,n-1}_n(z,\cdot,E)),\end{aligned}\tag{2.84}$$

$$\begin{aligned}(\partial_zQ_-(z,E))\tilde\mu^{+}(z,\cdot,E)&=(\partial_zQ_{-,n}(z,E))\tilde\mu^{+,n}_{n+1}(z,\cdot,E)+\\&+(\partial_zQ_-(z,E)-\partial_zQ_{-,n}(z,E))\tilde\mu^{+,n}_{n+1}(z,\cdot,E)+\partial_zQ_-(z,E))(\tilde\mu^{+}(z,\cdot,E)-\tilde\mu^{+,n}_{n+1}(z,\cdot,E));\end{aligned}\tag{2.85}$$

$$\|\tilde\mu^{+,n}_{n+1}(z,\cdot,E)\|_{L^p(T)}\le c_{16},\qquad\|\partial_z\tilde\mu^{+,n}_{n+1}(z,\cdot,E)\|_{L^p(T)}\le c_{16}\delta_2\tag{2.86}$$

при $z\in\mathbb{C}$, $M\ge 3$, $E\ge E_4$, $1<p<\infty$.

В свою очередь (2.86) следует из (2.80), (2.74), (2.75), (2.72).

Подставим (2.80) в (2.83б), выражая $Q_{-,n}(\lambda,\lambda',z,E)$, $B_n(\lambda,\lambda',z,E)$ (ядра Шварца операторов $Q_{-,n}(z,E)$, $B_n(z,E)$) через $f(\lambda,\lambda',E)$ в силу (2.59б), (2.61б), (2.62), (2.60), (2.57), (2.58б); пусть

$$v^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{appr}}(z,E,n)=v^{\mathrm{prel}}_{\mathrm{appr}}(z,E,n),\tag{2.87}$$

отбрасывая члены с однородностью относительно $f$ выше или равной $n+2$.

Тогда

$$v^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{appr}}(z,E,n)=\frac{1}{\pi}E^{1/2}P_{z,E,n+1}(f(\cdot,E)),$$

где

$$P_{z,E,n+1}(f(\cdot,E)) = \int\limits_{T^2} p_1(z,\xi_1,E)f(\xi_1,E)\sigma(d\xi_1) + \dots$$

$$\dots + \underbrace{\int\limits_{T^2}\dots\int\limits_{T^2}}_{n+1} p_{n+1}(z,\xi_1,\dots,\xi_{n+1},E)f(\xi_1,E)\dots f(\xi_{n+1},E)\sigma(d\xi_1)\dots\sigma(d\xi_{n+1}), \tag{2.88}$$

$\xi_j = (\lambda_j, \lambda_j') \in T^2$, $\sigma(d\xi_j) = |d\lambda_j| \cdot |d\lambda_j'|$, где коэффициенты $p_j$, $j \in \mathbb{N}$, — это некоторые фиксированные (обобщенные) функции (не зависящие от потенциала), которые могут быть выписаны явно;

$$v(z) = v^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{appr}}(z,E,n) + v^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{err}}(z,E,n), \tag{2.89}$$

$$|v^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{err}}(z,E,n)| \le c_{11}(p)\|\hat v\|_{\alpha,M}E^{-(M-2)/2} + c_{17}(n,p)(\|\hat v\|_{\alpha,M})^{n+2}E^{-(n+1)/2+(n+2)/(2p)} \tag{2.90}$$

при $z \in \mathbb{C}$, $0 < \alpha < 1$, $M \ge 3$, $E \ge E_4$, $1 < p < \infty$, $\mathbb{Z} \ni n \ge 0$.

При $3 \le M \in \mathbb{N}$ естественно использовать (2.90) с $n \le M-2$, $p = (n+2)/(2\varepsilon)$, $\varepsilon \ll 1/2$. В таком случае из (2.90) следует

$$|v^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{err}}(z,E,n)| = O(E^{-(n+1)/2+\varepsilon}) \qquad \text{при } n \le M-3 \text{ при } E \to +\infty,$$
$$|v^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{err}}(z,E,n)| = O(E^{-(M-2)/2}) \qquad \text{при } n = M-2 \text{ при } E \to +\infty.$$

Справедливы следующие явные формулы:

$$v^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{appr}}(z,E,0) = \frac{1}{\pi}E^{1/2}\int\limits_T w^{(0)}(z,\lambda,E)i\lambda\,|d\lambda|,$$
$$w^{(0)}(z,\cdot,E) = \partial_z(-Q^{(0)}_+(z,E) + Q^{(0)}_-(z,E))1, \tag{2.91а}$$

$$v^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{appr}}(z,E,1) = v^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{appr}}(z,E,0) + \frac{1}{\pi}E^{1/2}\int\limits_T w^{(1)}(z,\lambda,E)i\lambda|d\lambda|,$$
$$w^{(1)}(z,\cdot,E) = \partial_z(-Q^{(1)}_+(z,E) + Q^{(0)}_+(z,E)C_+Q^{(0)}_-(z,E) - Q^{(0)}_+(z,E)C_-Q^{(0)}_+(z,E) - \tag{2.91б}$$
$$- Q^{(0)}_-(z,E)C_+Q^{(0)}_-(z,E) + Q^{(0)}_-(z,E)C_-Q^{(0)}_+(z,E) + Q^{(1)}_-(z,E))1,$$

где согласно (2.60), (2.57), (2.58)

$$(Q^{(0)}_\pm(z,E)u)(\lambda) = \pi i\int\limits_T \exp\left[-\frac{i}{2}E^{1/2}\left(\lambda\bar z + \frac{z}{\lambda} - \lambda'\bar z - \frac{z}{\lambda'}\right)\right]\times$$
$$\times\,\theta\left(\pm i\left(\frac{\lambda}{\lambda'} - \frac{\lambda'}{\lambda}\right)\right)f(\lambda,\lambda',E)u(\lambda')\,|d\lambda'|,$$

$$(Q^{(1)}_\pm(z,E)u)(\lambda) = \pi i\int\limits_T \exp\left[-\frac{i}{2}E^{1/2}\left(\lambda\bar z + \frac{z}{\lambda} - \lambda'\bar z - \frac{z}{\lambda'}\right)\right]\times$$
$$\times\,\theta\left(\pm i\left(\frac{\lambda}{\lambda'} - \frac{\lambda'}{\lambda}\right)\right)\int\limits_T f(\lambda,\xi_1,E)\pi i\theta\left(\pm i\left(\frac{\lambda}{\xi_1} - \frac{\xi_1}{\lambda}\right)\right)f(\xi_1,\lambda',E)\,|d\xi_1|\,u(\lambda')\,|d\lambda'|$$

и $C_\pm$ — проекторы Коши, определенные формулой (2.28).

При получении (2.91) мы используем (2.87), (2.29) и формулы

$$\int_T u_+(\lambda) i\lambda |d\lambda| = 0, \qquad \int_T u_-(\lambda) i\lambda |d\lambda| = -\int_T u(\lambda) i\lambda |d\lambda|, \tag{2.92}$$

где $u_\pm = C_\pm u$.

Итогом данных выше результатов является следующая

**Теорема 2.2.** *При условии* (1.6), *при* $d = 2$, $M \geq 3$ *амплитуда рассеяния* $f$ *при фиксированной энергии* $E$ *определяет потенциал* $v$ *с точностью до* $O(E^{-(M-2)/2})$ *в равномерной норме при* $E \to +\infty$ *по формулам* (2.57), (2.58б), (2.60), (2.62), (2.59б), (2.61б), (2.83), (2.80), (2.87), (2.89), (2.90). *При этом имеют место формулы* (2.88), (2.91).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Фаддеев Л.Д.* Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. Л.: Изд-во АН СССР, 1963. (Тр. МИАН; Т. 69).
2. *Фаддеев Л.Д.* Растущие решения уравнения Шрёдингера // ДАН СССР. 1965. Т. 165. С. 514–517.
3. *Фаддеев Л.Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния. II. М.: ВИНИТИ, 1974. С. 93–180.
4. *Манаков С.В.* Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения // УМН. 1976. Т. 31, №5. С. 245–246.
5. *Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П.* Уравнение Шрёдингера в магнитном поле и римановы поверхности // ДАН СССР. 1976. Т. 229. С. 15–18.
6. *Веселов А.П., Новиков С.П.* Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера. Явные формулы и эволюционные уравнения // ДАН СССР. 1984. Т. 279. С. 20–24.
7. *Веселов А.П., Новиков С.П.* Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера. Выделение потенциальных операторов. Вещественная теория // ДАН СССР. 1984. Т. 279. С. 784–788.
8. *Beals R., Coifman R.R.* Multidimensional inverse scattering and nonlinear partial differential equations // Proc. Symp. Pure Math. 1985. V. 43. P. 45–70.
9. *Гриневич П.Г., Манаков С.В.* Обратная задача рассеяния для двумерного оператора Шрёдингера, $\bar\partial$-метод и нелинейные уравнения // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20, №2. С. 14–24.
10. *Новиков Р.Г., Хенкин Г.М.* $\bar\partial$-Уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния // УМН. 1987. Т. 42, №3. С. 93–152.
11. *Eskin G., Ralston J.* The inverse back-scattering problem in three dimensions // Communs Math. Phys. 1989. V. 124. P. 169–215.
12. *Eskin G., Ralston J.* Inverse back-scattering in two dimensions // Communs Math. Phys. 1991. V. 138. P. 451–486.
13. *Novikov R.G.* The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Schrödinger operator // J. Funct. Anal. 1992. V. 103. P. 409–463.
14. *Novikov R.G.* Rapidly converging approximation in inverse quantum scattering in dimension 2 // Phys. Lett. A. 1998. V. 238. P. 73–78.