



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. M. Gichev, Some remarks on spherical harmonics,
Algebra i Analiz, 2008, Volume 20, Issue 4, 64–86

<https://www.mathnet.ru/eng/aa522>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.89

April 19, 2025, 21:16:43



НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИКАХ

© В. М. ГИЧЕВ

Статья содержит несколько наблюдений о сферических гармониках и их узловых множествах: конструкцию гармоник, имеющих заданные нули; одно естественное представление этого типа для гармоник на \mathbb{S}^2 ; верхние и нижние границы для длин узловых множеств и для внутренних радиусов узловых областей (верхние границы достигаются); точная оценка сверху числа общих нулей двух сферических гармоник на \mathbb{S}^2 ; среднее значение мер Хаусдорфа пересечений k узловых множеств гармоник разных степеней на \mathbb{S}^m , где $k \leq m$ (в частности, среднее количество общих нулей m гармоник).

Введение

Статья содержит несколько наблюдений о сферических гармониках и их узловых множествах, причём особое внимание уделяется случаю сферы \mathbb{S}^2 .

Пусть M — компактное связное риманово многообразие, на котором изометрично и транзитивно действует компактная группа Ли G , \mathcal{E} — инвариантное подпространство (вещественного) пространства собственных функций для ненулевого собственного значения оператора Лапласа—Бельтрами. В работе показано, что каждая функция из \mathcal{E} может быть реализована в виде определителя матрицы, составленной из значений воспроизводящего ядра для \mathcal{E} . Подобная конструкция используется в теории ортогональных многочленов; однако для произвольных конечномерных G -инвариантных подпространств $\mathcal{C}(M)$ метод непригоден (см. замечание 2). В случае сферы \mathbb{S}^2 это приводит к естественному, определённом

Работа частично поддержана грантами РФФИ 06–08–01403, 06–07–89051, а также проектом СО РАН №117.

почти однозначно (с точностью до умножения на константу) представлению гармоник в виде определителя, которое получается после комплексификации и сужения на конус $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ в \mathbb{C}^3 . Этот конус эквивариантно и двулистно покрывается пространством \mathbb{C}^2 , причём накрытие отождествляет семейство \mathcal{H}_n гармонических однородных комплекснозначных полиномов степени n на \mathbb{R}^3 с семейством \mathcal{P}_{2n}^2 однородных голоморфных полиномов на \mathbb{C}^2 степени $2n$.¹

Множество всех нулей вещественной сферической гармоникой u называется *узловым*. Будем говорить, что u и её узловое множество N_u *регулярны*, если нуль не является критическим значением гармоникой u . Тогда каждая компонента множества N_u — жорданов контур. Согласно [11], каждая пара узловых множеств N_u, N_v , где $u, v \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ и $n > 0$, имеет непустое пересечение; более того, если гармоника u регулярна, то каждая компонента множества N_u содержит по крайней мере две точки множества N_v . Множество $N_u \cap N_v$ может быть бесконечным, но семейство пар (u, v) из $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ с таким свойством замкнуто и нигде не плотно в $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}} \times \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$. Если же множество $N_u \cap N_v$ конечно, то $\text{card } N_u \cap N_v \leq 2n^2$. Оценка следует из теоремы Безу и достигается. Она же является верхней (вероятно, не наилучшей) границей для числа критических точек общей сферической гармоникой. Конфигурация критических точек всегда в некотором смысле вырождена (см. замечание 5). Задача нахождения оценок снизу, видимо, труднее; возможно, точная нижняя граница равна $2n$ (это подтверждается частичными результатами и компьютерными экспериментами).

Метрические и топологические свойства узловых множеств исследуются давно, о них известно довольно много. Сделаем лишь несколько замечаний, относящихся к предмету статьи. Будем обозначать через Δ оператор Лапласа–Бельтрами, через λ — собственное значение оператора $-\Delta$.

В 1978 г. Брюнинг [5] нашёл оценку снизу вида $c\sqrt{\lambda}$ для длин узловых множеств собственных функций на римановой поверхности. Яу предположил [22, Problem 74], что мера Хаусдорфа узлового множества собственной функции на компактном римановом многообразии допускает оценку снизу и сверху такого же вида (т.е. $c\sqrt{\lambda}$). Для вещественно-аналитических многообразий эта гипотеза была доказана Донелли и Фефферманом в работе [8]. В статье [18] Саво доказал, что $\frac{1}{11} \text{Area}(M)\sqrt{\lambda}$ является нижней

¹Ещё в 1876 г. Сильвестр использовал эквивалентную конструкцию для уточнения предложенного Максвеллом метода построения сферических гармоник. В соответствии с ним для построения вещественной гармоникой надо продифференцировать функцию $1/r$, где r — расстояние до начала координат, в подходящих направлениях в \mathbb{R}^3 . Последние определены однозначно; соответствующие точки сферы \mathbb{S}^2 называются полюсами (см. [15, гл. 9] или [3, 11.5.2]; книги [7, гл. 7, §5] и [1, приложение А] содержат развёрнутые изложения и дальнейшие сведения).

границей длин узловых множеств на поверхности M для всех достаточно больших λ , а если кривизна M неотрицательна, то при всех λ . Нижние и верхние границы внутренних для радиусов узловых областей были найдены Мангуби [13, 14]; в случае поверхностей они имеют порядок $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ [13].

Линейную меру Хаусдорфа подмножества сферы S^2 можно найти, интегрируя по $SO(3)$ число его общих точек со сдвигами другого подходящего подмножества сферы S^2 (см. теорему 4). Используя оценки числа общих точек, можно получить оценки сверху и снизу длин узловых множеств и внутренних радиусов узловых областей. При этом верхние границы оказываются точными.

Обозначим через \mathcal{H}_n^{m+1} пространство всех вещественных сферических гармоник степени n на единичной сфере S^m в \mathbb{R}^{m+1} . Каждой точке сферы S^m отвечает функционал на \mathcal{H}_n^{m+1} вычисления значения в ней, что задает эквивариантную иммерсию сферы S^m в единичную сферу в \mathcal{H}_n^{m+1} . Локально она является метрическим подобием с коэффициентом $\sqrt{\frac{\lambda_n}{m}}$, где $\lambda_n = n(n+m-1)$ — собственное значение оператора $-\Delta$ в \mathcal{H}_n^{m+1} . Это позволяет вычислить среднее значение мер Хаусдорфа пересечения узловых множеств k гармоник степеней n_1, \dots, n_k : оно равно $c\sqrt{\lambda_{n_1} \dots \lambda_{n_k}}$, где c зависит лишь от m и k и $k \leq m$ (см. теорему 6). В частности, при $k = m$ получается среднее количество общих нулей m гармоник: оно равно $2m^{-\frac{m}{2}}\sqrt{\lambda_{n_1} \dots \lambda_{n_m}}$; если $m = 2$, то $\sqrt{\lambda_{n_1}\lambda_{n_2}}$. В работе [8] Донелли и Фефферман писали: „Главная тема этой статьи в том, что решение уравнения $\Delta F = -\lambda F$ на вещественно-аналитическом многообразии ведет себя как полином степени $c\sqrt{\lambda}$ “. Следуя этой идее, Л. Полтерович предположил, что среднее число общих нулей подчиняется теореме Безу. Описанный выше результат (при $k = m$) подтверждает это предположение (с точностью до мультипликативной константы) и может быть понят как „теорема Безу в среднем“ для сферических гармоник. Для $k = 1$ средняя мера Хаусдорфа, другими (но близкими) методами, была найдена Бера [4] и Нейхайзелем [16]. Случай плоского тора исследовался Рудником и Вигманом [17].

§1. Построение собственных функций с заданным конечным множеством нулей

Пусть M — компактное связное ориентированное риманово многообразие, G — компактная группа Ли изометрий многообразия M , действующая на M транзитивно, Δ — оператор Лапласа–Бельтрами на M ,

$$\lambda > 0 \tag{1}$$

— собственное число оператора $-\Delta$, \mathcal{E}_λ — соответствующее вещественное (т.е. состоящее из вещественных функций) пространство собственных функций, а \mathcal{E} — его G -инвариантное линейное подпространство. Тогда \mathcal{E} есть конечная сумма G -инвариантных неприводимых подпространств пространства $C^\infty(M)$. Условимся обозначать через σ инвариантную меру полной массы 1 на M , $L^2(M) = L^2(M, \sigma)$. Для каждого $a \in M$ существует единственная функция $\phi_a \in \mathcal{E}$, реализующая функционал вычисления значения в a :

$$\langle u, \phi_a \rangle = u(a)$$

для всех $u \in \mathcal{E}$. Положим

$$\phi(a, b) = \phi_a(b), \quad a, b \in M.$$

Тогда

$$\phi(a, b) = \phi_a(b) = \langle \phi_a, \phi_b \rangle = \langle \phi_b, \phi_a \rangle = \phi_b(a) = \phi(b, a), \quad (2)$$

$$u(x) = \langle u, \phi_x \rangle = \int \phi(x, y)u(y) d\sigma(y) \quad \text{для всех } u \in \mathcal{E}, \quad (3)$$

$$x \in N_u \iff \phi_x \perp u, \quad (4)$$

$$\phi_x \neq 0 \quad \text{для всех } x \in M. \quad (5)$$

Последнее выполняется благодаря однородности многообразия M . Согласно формуле (3), $\phi(x, y)$ является *воспроизводящим ядром для \mathcal{E}* (т.е. $u(x) \rightarrow \int \phi(x, y)u(y) d\sigma(y)$ есть ортогональный проектор на \mathcal{E} в $L^2(M)$).

Выберем $a_1, \dots, a_k, x, y \in M$. Обозначим $a = (a_1, \dots, a_k) \in M^k$ и условимся, что a может обозначать также и соответствующее подмножество в M : $a = \{a_1, \dots, a_k\}$. Положим

$$\Phi_k^a(x, y) = \Phi_{k,y}^a(x) = \det \begin{pmatrix} \phi(a_1, a_1) & \dots & \phi(a_1, a_k) & \phi(a_1, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi(a_k, a_1) & \dots & \phi(a_k, a_k) & \phi(a_k, y) \\ \phi(x, a_1) & \dots & \phi(x, a_k) & \phi(x, y) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Очевидно, $\Phi_k^a(x, y) = \Phi_k^a(y, x)$. Фиксируем y и обозначим $v = \Phi_{k,y}^a$. Тогда, согласно формуле (6), $v \in \mathcal{E}$ и

$$a_1, \dots, a_k \in N_v. \quad (7)$$

Будем говорить, что a_1, \dots, a_k *независимы*, если векторы $\phi_{a_1}, \dots, \phi_{a_k} \in \mathcal{E}$ линейно-независимы. Для подмножества $X \subseteq M$ положим

$$\mathcal{N}_X = \text{span}\{\phi_x : x \in X\}. \quad (8)$$

Если $X = N_u$, где $u \in \mathcal{E}$, то обозначение можно сократить: $\mathcal{N}_{N_u} = \mathcal{N}_u$. Пусть

$$n = \dim \mathcal{E} - 1.$$

Из (1) следует, что $n \geq 1$ (поскольку пространство \mathcal{E} вещественно и G -инвариантно).

Лемма 1. Пусть $a \in M^k$, где $k \leq n$. Тогда a_1, \dots, a_k независимы в том и только в том случае, когда $\Phi_{k,y}^a \neq 0$ для некоторого $y \in M$.

Доказательство. Из (4) следует, что $\mathcal{E} = \mathcal{N}_M$; так как $k \leq n$, то $\mathcal{N}_a \neq \mathcal{E}$. Если a_1, \dots, a_k независимы, то можно получить независимое множество, добавляя к a некоторое $y \in M$. Тогда $\Phi_{k,y}^a \neq 0$, поскольку $\Phi_{k,y}^a(y) > 0$ (ввиду (2) и (6), $\Phi_{k,y}^a(y)$ — определитель матрицы Грама набора векторов $\phi_{a_1}, \dots, \phi_{a_k}, \phi_y$). Очевидно, $\Phi_{k,y}^a = 0$ для всех $y \in M$, если a_1, \dots, a_k зависимы. \square

Благодаря следующему предложению, каждую функцию из \mathcal{E} можно реализовать в виде (6).

Предложение 1. Для любого $u \in \mathcal{E}$ справедливо равенство $\mathcal{N}_u = u^\perp \cap \mathcal{E}$.

Лемма 2. Если $u, v \in \mathcal{E}$ и $N_v \supseteq N_u$, то $v = cu$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Это немедленно следует из включения $N_v \supseteq N_u$ и леммы 1 статьи [11], которая утверждает, что $v = cu$ при некотором $c \in \mathbb{R}$, если существуют узловые области U и V для u и v соответственно такие, что $V \subseteq U$. \square

Вот набросок доказательства упомянутой леммы; оно основано на идее теоремы Куранта об узловых областях. Так как u не изменяет знака в U , то $-\lambda$ является первым собственным числом задачи Дирихле для U . Поэтому оно имеет кратность 1 и для всех $w \in C^2(M)$, равных нулю на ∂U , выполняется неравенство $D(w) \geq \lambda \|w\|_{L^2(U)}$, где D — форма Дирихле на U . Более того, равенство имеет место тогда и только тогда, когда $w = cu$, $c \in \mathbb{R}$. С другой стороны, если w равно нулю вне V и совпадает с v внутри V , то $D(w) = \lambda \|w\|_{L^2(U)}$.

Доказательство предложения 1. Если $v \in \mathcal{E}$ и $v \perp \mathcal{N}_u$, то $N_v \supseteq N_u$ ввиду (4). Согласно лемме 2, $v \in \mathbb{R}u$. Следовательно, $\mathcal{N}_u \supseteq u^\perp \cap \mathcal{E}$. Обратное включение очевидно. \square

Обозначим через $\Phi : M^{n+1} \rightarrow \mathcal{E}$ отображение $(a, y) \rightarrow \Phi_{n,y}^a$ и положим $\mathcal{U} = \Phi(M^{n+1})$.

Теорема 1. (i) Пусть $u \in \mathcal{E}$, $u \neq 0$. Существует непрерывная функция $c \neq 0$ на $N_u^n \times M$ такая, что

$$\Phi(a, y) = c(a, y)u \quad (9)$$

для всех $(a, y) \in N_u^n \times M$.

- (ii) \mathcal{U} — компактная симметричная окрестность нуля в \mathcal{E} .
 (iii) Каждая точка $a \in M^n$ содержится в некотором нетривиальном узловом множестве; для a общего положения оно единственно.

Доказательство. Пусть $a \in N_u^n$. Если a_1, \dots, a_n независимы, то $\text{codim } \mathcal{N}_a = 1$; поскольку $u \perp \mathcal{N}_u$, согласно (4), это влечёт (9), причём $c(a, y) \neq 0$ при некотором $y \in M$ ввиду леммы 1. Если a_1, \dots, a_n зависимы, то $\Phi(a, y) = 0$ для всех $y \in M$ по той же лемме. Функция c непрерывна благодаря (6); $c \neq 0$, так как множество N_u содержит независимые точки a_1, \dots, a_n , согласно предложению 1. Это доказывает утверждение (i).

Из формулы (6) следует, что отображение Φ непрерывно. Поэтому множество \mathcal{U} компактно. Поскольку многообразие M связно, для каждого $u \in \mathcal{U}$ можно получить отрезок $[0, u]$, перемещая y ; поэтому множество \mathcal{U} звездно. Так как перестановка любых двух точек в a изменяет знак $c(a, y)$, то множество \mathcal{U} симметрично при $n > 1$; если же $n = 1$, то \mathcal{U} является кругом ввиду его G -инвариантности и звездности. Таким образом, множество \mathcal{U} компактно, симметрично, звездно и, кроме того, $\cup_{t>0} t\mathcal{U} = \mathcal{E}$. Поэтому \mathcal{U} — окрестность нуля, т.е. справедливо утверждение (ii).

Пусть $a \in M^n$, $a' \subseteq a$ — максимальное независимое подмножество в a . Тогда $\Phi_{k,y}^{a'} \neq 0$ при некотором $y \in M$, согласно лемме 1 (здесь $k = \text{card } a'$). Положим $v = \Phi_{k,y}^{a'}$. Ввиду (7) $a' \subset N_v$. Из (4) следует, что N_v содержит любую точку $x \in M$ такую, что $\phi_x \in \mathcal{N}_{a'}$. Поэтому $N_v \supseteq a$. Если a_1, \dots, a_n независимы, то множество N_v единственно, поскольку в этом случае $\text{codim } \mathcal{N}_v = 1$. Так как многообразие M однородно и пространство \mathcal{E} конечномерно, то функции ϕ_x , $x \in M$, вещественно-аналитичны. Следовательно, либо $\Phi_{n,y}^a = 0$ для всех $(a, y) \in M^{n+1}$, либо $\Phi_{n,y}^a \neq 0$ для (a, y) общего положения (напомним, что M связно). Наконец, $\Phi_{n,y}^a \neq 0$ для некоторых $(a, y) \in M^{n+1}$, поскольку $\mathcal{N}_M = \mathcal{E}$ благодаря (4) и (5). \square

Замкнутое множество $X \subseteq M$ называется *интерполяционным множеством для пространства функций* $\mathcal{F} \subseteq C(M)$, если $\mathcal{F}|_X = C(X)$.

Следствие 1. Пусть $k \leq \dim \mathcal{E}$. В случае общего положения $a_1, \dots, a_k \in M$, множество $a = \{a_1, \dots, a_k\}$ является интерполяционным для \mathcal{E} .

Замечание 1. Функция c может быть равной нулю на некоторых компонентах множества $N_u^n \times M$. Пусть, например, $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, \mathcal{E} — сужение на \mathbb{S}^2 пространства $\mathcal{H}_k^{\mathbb{R}}$ однородных гармонических полиномов степени k ; тогда $\dim \mathcal{E} = 2k + 1$, $n = 2k$. Если $k > 1$, то каждая большая окружность \mathbb{S}^1 в \mathbb{S}^2 содержится в нескольких узловых множествах (например, узловые множества функций $x_1 f(x_2, x_3)$, где функция f гармоническая, содержат

окружность $\mathbb{S}^1 = \{x_1 = 0\} \cap \mathbb{S}^2$). Более того, при нечётном k она может быть компонентой множества N_u . Следовательно, $\text{codim } \mathcal{N}_{\mathbb{S}^1} > 1$ и $\Phi(a, y) = 0$ для всех $(a, y) \in (\mathbb{S}^1)^n \times \mathbb{S}^2$.

Замечание 2. Для произвольных конечномерных G -инвариантных подпространств $\mathcal{E} \subseteq C(M)$ теорема 1 не выполняется. Действительно, если $\dim \mathcal{E} > 1$ и пространство \mathcal{E} содержит постоянные функции, то в нём есть открытое подмножество, состоящее из функций без нулей, которые, очевидно, не допускают реализации в виде (6). Далее, из теоремы следует, что произведения $\phi_{a_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{a_n}$ заполняют окрестность нуля в n -й внешней степени пространства \mathcal{E} , которую можно отождествить с \mathcal{E} . Это свойство, очевидно, влечет возможность интерполяции из следствия 1, но обратное неверно: примером может служить пространство всех однородных полиномов степени $m > 1$ на \mathbb{R}^3 , суженное на \mathbb{S}^2 (или пространство всех полиномов степени не выше n на $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, где $n > 2$).

§2. Сферические гармоники на \mathbb{S}^2

Обозначим через \mathcal{P}_n^m пространство однородных голоморфных полиномов степени n на \mathbb{C}^m и(или) пространство всех комплекснозначных однородных полиномов степени n на \mathbb{R}^m ; они находятся в очевидном взаимнооднозначном соответствии. Подпространство, состоящее из гармонических на \mathbb{R}^m полиномов, обозначим через \mathcal{H}_n^m . Условимся опускать индекс m в \mathcal{H}_n^m , если $m = 3$; тогда $\dim \mathcal{H}_n = 2n + 1$. Полиномы из \mathcal{H}_n^m , а также их ограничения на единичную сферу $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ называются *сферическими гармониками*. Они являются собственными функциями оператора Лапласа—Бельтрами; при $m = 3$ собственное число равно $-n(n + 1)$. Доказательство есть, например, в [19]. Будем говорить, что функция $u \in \mathcal{P}_n^m$ *вещественна*, если она принимает вещественные значения на \mathbb{R}^m .

Стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^m и его билинейное продолжение на \mathbb{C}^m условимся обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$$r(v) = |v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad v \in \mathbb{R}^m,$$

r^2 — голоморфная квадратичная форма на \mathbb{C}^m . Для $a \in \mathbb{C}^m$ положим

$$l_a(v) = \langle a, v \rangle.$$

Функции $\Phi_k^a(x, y)$ допускают голоморфное продолжение по всем переменным (кроме k). Если $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, то продолжение на \mathbb{C}^3 и последующее ограничение на конус

$$S_0 = \{z \in \mathbb{C}^3 : r^2(z) = 0\}$$

дают возможность построить некоторое естественное, однозначно определённое с точностью до умножения на константу, представление любой комплекснозначной сферической гармонике в виде (6). Проекция конуса S_0 в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ есть сфера Римана $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. У S_0 имеется естественная параметризация

$$\kappa(\zeta_1, \zeta_2) = (z_1, z_2, z_3) = (2\zeta_1\zeta_2, \zeta_1^2 - \zeta_2^2, i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)), \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

Лемма 3. *Отображение $R : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{P}_{2n}^2$, определённое равенством*

$$Rp = p \circ \kappa,$$

взаимно-однозначно и сплетает естественные представления $SO(3)$ и $SU(2)$ в \mathcal{H}_n и \mathcal{P}_{2n}^2 соответственно.

Доказательство. Ясно, что $p \circ \kappa$ — однородный полином на \mathbb{C}^2 степени $2n$ при $p \in \mathcal{P}_n^3$. Простое вычисление показывает, что замена переменных $\zeta_1 \rightarrow a\zeta_1 + b\zeta_2$, $\zeta_2 \rightarrow -\bar{b}\zeta_1 + \bar{a}\zeta_2$, где $|a|^2 + |b|^2 = 1$, порождает линейное преобразование пространства \mathbb{C}^3 , которое сохраняет форму r^2 и подпространство \mathbb{R}^3 (другими словами, индуцированное этой заменой преобразование квадратичных форм на \mathbb{C}^2 в базисе $2\zeta_1\zeta_2, \zeta_1^2 - \zeta_2^2, i(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)$ задается матрицей из $SO(3)$). Поэтому κ эквивариантно по отношению к естественным действиям групп $SO(3)$ и $SU(2)$ в \mathcal{H}_n и \mathcal{P}_{2n}^2 соответственно. Хорошо известно, что

$$\mathcal{P}_n^3 = \mathcal{H}_n \oplus r^2\mathcal{P}_{n-2}^3$$

(см., например, [19]). Так как $R \neq 0$ и $Rr^2 = 0$, то $R\mathcal{H}_n \neq 0$. Осталось лишь заметить, что представления этих групп в $\mathcal{H}_n, \mathcal{P}_n^2$ неприводимы. \square

Следствие 2. *Для каждого $p \in \mathcal{H}_n \setminus \{0\}$ множество $p^{-1}(0) \cap S_0$ есть объединение $2n$ комплексных прямых, причём некоторые из них могут совпадать. Если они различны, $q \in \mathcal{H}_n$ и $p^{-1}(0) \cap S_0 = q^{-1}(0) \cap S_0$, то $q = cp$, где $c \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Очевидно, κ отображает прямые на прямые и порождает вложение $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ в $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. \square

Функции ϕ_a предыдущего параграфа можно записать явно:

$$\phi_a(x) = c_n P_n(\langle a, x \rangle), \quad \text{где } a, x \in \mathbb{S}^2,$$

c_n — нормализующая константа, а P_n — n -й полином Лежандра: $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^{2n}$. Существует единственное продолжение

$$\phi(a, x) = \phi_a(x)$$

на \mathbb{R}^3 , которое однородно степени n и гармонично по обоим переменным (оно также симметрично и продолжается голоморфно на \mathbb{C}^3). Например,

если $n = 3$, то $2P_3(t) = 5t^3 - 3t$ и функция $\phi(a, x)$ пропорциональна функции

$$5 \langle a, x \rangle^3 - 3 \langle a, a \rangle \langle a, x \rangle \langle x, x \rangle$$

(если $a = (1, 0, 0)$, то $2x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 3x_1x_3^2$). Представление в виде (6) для $p \in \mathcal{H}_n$, конечно, сохраняется и для $M = \mathbb{S}^2$, но в этом случае есть более естественный вариант. Для $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2$ положим

$$j\zeta = (-\zeta_2, \zeta_1).$$

Теорема 2. Пусть $p \in \mathcal{H}_n$. Предположим, что $p^{-1}(0) \cap S_0$ — объединение различных прямых $\mathcal{C}a_1, \dots, \mathcal{C}a_{2n}$. Тогда существует константа $c \neq 0$ такая, что

$$p(x)p(y) = c \det \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle^n & \dots & \langle a_1, a_{2n} \rangle^n & \langle a_1, y \rangle^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle a_{2n}, a_1 \rangle^n & \dots & \langle a_{2n}, a_{2n} \rangle^n & \langle a_{2n}, y \rangle^n \\ \langle x, a_1 \rangle^n & \dots & \langle x, a_{2n} \rangle^n & \langle x, y \rangle^n \end{pmatrix} \quad (11)$$

для всех $y \in S_0$, $x \in \mathbb{C}^3$. Более того, замена $\langle x, y \rangle^n$ на $\phi(x, y)$ в матрице приводит к представлению произведения $p(x)p(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{C}^3$ (вообще говоря, с другой константой c).

Доказательство. Если $a \in S_0$, то функция $\langle a, x \rangle^n$ — гармоническая по x для всех n (это нетрудно проверить прямым вычислением). Поэтому функция $\Phi_y^a(x) = \Phi^a(x, y)$ в правой части содержится в \mathcal{H}_n для каждого $y \in S_0$. Ясно, что $\Phi_y^a(a_k) = 0$ при $k = 1, \dots, 2n$. Согласно следствию 2, функция Φ_y^a пропорциональна p . Так как $\Phi^a(x, y) = \Phi^a(y, x)$, это влечет (11) при условии нетривиальности правой части.

Таким образом, надо доказать, что $c \neq 0$. Пусть $x \in S_0$. Существуют $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}, \xi, \eta \in \mathbb{C}^2$ такие, что $a_k = \kappa(\alpha_k)$ для всех k , $x = \kappa(\xi)$, и $y = \kappa(\eta)$. Прямое вычисление показывает, что

$$\langle \kappa(a), \kappa(b) \rangle = -2 \langle a, jb \rangle^2 \quad (12)$$

для всех $a, b \in \mathbb{C}^2$. Следовательно, правая часть формулы (11) равна

$$-2^{(2n+1)n} c \det \begin{pmatrix} \langle \alpha_1, j\alpha_1 \rangle^{2n} & \dots & \langle \alpha_1, j\alpha_{2n} \rangle^{2n} & \langle \alpha_1, j\eta \rangle^{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_{2n}, j\alpha_1 \rangle^{2n} & \dots & \langle \alpha_{2n}, j\alpha_{2n} \rangle^{2n} & \langle \alpha_{2n}, j\eta \rangle^{2n} \\ \langle \xi, j\alpha_1 \rangle^{2n} & \dots & \langle \xi, j\alpha_{2n} \rangle^{2n} & \langle \xi, j\eta \rangle^{2n} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Определитель можно вычислить в несколько более общей ситуации. Именно если $C = (c_{rs})_{r,s=0}^k$, где $c_{rs} = \langle a_r, b_s \rangle^k$, $a_r, b_s \in \mathbb{C}^2$, то

$$\det C = \prod_{r=1}^k \binom{k}{r} \prod_{s < r} \langle a_r, j a_s \rangle \prod_{s < r} \langle b_r, j b_s \rangle. \quad (14)$$

Пусть $a_r = (a_{r,1}, a_{r,2})$, $b_s = (b_{s,1}, b_{s,2})$. Если все компоненты ненулевые, то

$$c_{rs} = \sum_{t=0}^k \binom{k}{r} (a_{r,1} b_{s,1})^t (a_{r,2} b_{s,2})^{k-t} = a_{r,2}^k b_{s,1}^k \sum_{t=0}^k \binom{k}{r} \left(\frac{a_{r,1}}{a_{r,2}} \right)^t \left(\frac{b_{s,2}}{b_{s,1}} \right)^{k-t}.$$

Из строчек и столбцов можно вынести общие множители, после чего получится матрица \tilde{C} , которая допускает разложение $\tilde{C} = AB$, где

$$A = \left(\binom{k}{r} \alpha_r^t \right)_{r,t=0}^k, \quad B = \left(\beta_s^{k-t} \right)_{t,s=0}^k, \quad \alpha_r = \frac{a_{r,1}}{a_{r,2}}, \quad \beta_s = \frac{b_{s,2}}{b_{s,1}}.$$

Таким образом, вычисление $\det C$ сводится к определителю Вандермонда. Прямое вычисление доказывает формулу (14) (предположение о нетривиальности компонент, очевидно, несущественно). Благодаря соотношениям (14) и (12) определитель в (13) не равен нулю, если прямые $\mathbb{C}\xi, \mathbb{C}\eta, \mathbb{C}a_1, \dots, \mathbb{C}a_{2n}$ различны (при $a \in S_0$ плоскость $\langle z, a \rangle = 0$ пересекает S_0 по прямой $\mathbb{C}a$). Поэтому $c \neq 0$.

Из определения функций P_n и ϕ следует, что

$$\phi(x, y) = s_n \langle x, y \rangle^n + r^2(x) r^2(y) h(x, y), \quad (15)$$

где s_n — положительная константа, h — полином. Следовательно, заменяя $\langle x, y \rangle^n$ на $\phi(x, y)$ в (11) и фиксируя $y \in \mathbb{C}^3$ общего положения, мы получаем функцию $f \neq 0$ на \mathbb{C}^3 , которая совпадает с $p(x)$ на S_0 с точностью до умножения на константу. Согласно следствию 2, то же самое верно на \mathbb{C}^3 , так как $f \in \mathcal{H}_n$ благодаря формуле (11) (в последней строке расположены функции, гармонические по x). Поскольку $\phi(x, y) = \phi(y, x)$, это доказывает второе утверждение. \square

Замечание 3. Множество $p^{-1}(0) \cap S_0$, где $p \in \mathcal{H}_n$, может быть также задано условием ортогональности

$$\int_{\mathbb{S}^2} p(x) \langle x, w \rangle^n d\sigma(x) = 0,$$

где σ — инвариантная мера на \mathbb{S}^2 , $w \in S_0$. Это следует из (15), поскольку $\int p(x) \phi(x, y) d\sigma(x) = p(y)$ для всех $y \in \mathbb{S}^2$, а потому и для всех $y \in \mathbb{R}^3$ ($p(y)$ и $\phi_x(y)$ однородны степени n), более того, для всех $y \in \mathbb{C}^3$ (обе части равенства голоморфны по y). В частности, это верно при $y \in S_0$, а в этом случае $\phi(x, y) = s_n \langle x, y \rangle^n$.

Если $p^{-1}(0) \cap S_0$ есть объединение различных прямых $\mathbb{C}a_k$, $k = 1, \dots, 2n$, то функции $\langle x, a_k \rangle^n$, $k = 1, \dots, 2n$, образуют линейный базис в гиперплоскости из \mathcal{H}_n , ортогональной функции p относительно билинейной формы $\int fg d\sigma$. Это следует из (12): нетрудно проверить, что функции $\langle \zeta, b_s \rangle^k$ на \mathbb{C}^2 , где $s = 1, \dots, k$, линейно-независимы, если прямые $\mathbb{C}b_s$ различны (определитель Вандермонда).

В заключение — несколько замечаний о нулях на \mathbb{S}^2 функций из \mathcal{H}_n . Пусть $f \in \mathcal{H}_n$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Ноль функции f — это общий ноль для u и v . Следующее предложение, в несколько более общей форме, было доказано в [11]. Будем говорить, что функция u *регулярна*, если ноль не является критическим значением для u .

Предложение 2 (см. [11]). *Пусть $n > 0$, $u \in \mathcal{H}_n$. Если функция u регулярна, то для всех $v \in \mathcal{H}_n$ каждая компонента множества N_u содержит по крайней мере две точки множества N_v .*

Утверждение следует из формулы Грина, благодаря которой

$$\int_C v \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0, \quad (16)$$

где C — компонента множества N_u (которая обязана быть жордановым контуром ввиду регулярности функции u), ds — линейная мера на C , $\frac{\partial u}{\partial n}$ — нормальная производная; отметим, что $\frac{\partial u}{\partial n}$ сохраняет знак на C . Для стандартной сферы \mathbb{S}^2 соотношение (16) следует из классической формулы Грина для области $D_\varepsilon = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \times \mathbb{S}^2$, где $\varepsilon \in (0, 1)$, и однородных степени 0 продолжений функций u, v на D_ε .

Пусть функции $u, v \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ регулярны. Положим

$$\nu(u, v) = \operatorname{card} N_u \cap N_v.$$

Для нерегулярных функций u, v нули должны считаться с кратностями. Если $u, v \in \mathcal{H}_n$, то кратность нуля в точке может быть определена как число гладких узловых линий, встречающихся в ней; если u, v имеют общий ноль порядков k, l , то его нужно считать kl раз (наибольшее число общих нулей, появляющихся при небольших возмущениях). Если $u = \phi_a$, где $a \in \mathbb{S}^2$, то N_u — объединение n параллельных окружностей $\langle x, a \rangle = t_k$, $x \in \mathbb{S}^2$, где $k = 1, \dots, n$ и t_1, \dots, t_n — нули полинома $P_n(t)$. Так как они различны, то $P'_n(t_k) \neq 0$ для всех k . Из предложения 2 следует, что для любой функции v из $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ выполняется неравенство

$$\nu(\phi_a, v) \geq 2n,$$

где $a \in \mathbb{S}^2$. Равенство выполняется для $v = \phi_b$, если точка $b \in \mathbb{S}^2$ достаточно близка к a . В этом неравенстве ϕ_a и n можно заменить любой регулярной функцией u и числом компонент множества N_u соответственно. Последнее число может быть меньше n (согласно [12], число компонент может быть равно 1 или 2, если n нечетно или четно, соответственно²). Тем не менее компьютерные эксперименты подтверждают следующее предположение: для всех $u, v \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ выполняется неравенство

$$\nu(u, v) \geq 2n.$$

Общие нули должны считаться с кратностями, иначе есть простой пример двух гармоник, которые имеют ровно два общих нуля: $\operatorname{Re}(x_1 + ix_2)^n$ и $\operatorname{Im}(x_1 + ix_2)^n$.

С другой стороны, в общем положении $u, v \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ для $\nu(u, v)$ есть тривиальная точная верхняя граница. Докажем чуть более сильное утверждение.

Предложение 3. Пусть $u, v \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$. Если число $\nu(u, v)$ конечно, то

$$\nu(u, v) \leq 2n^2. \tag{17}$$

По теореме Безу, если $u, v \in \mathcal{P}_n^3$ не имеют общего делителя, то множество $\{z \in \mathbb{C}^3 : u(z) = v(z) = 0\}$ — объединение n^2 (с кратностями) комплексных прямых. Тогда $\nu(u, v) \leq 2n^2$, так как каждая прямая не может иметь более двух общих точек с \mathbb{S}^2 . Предложение 3 не следует из этого рассуждения, поскольку u и v могут иметь нетривиальный общий делитель с конечным множеством нулей в \mathbb{S}^2 . Однако для $u, v \in \mathcal{H}_n$ последнее невозможно благодаря следующей лемме.

Лемма 4. Пусть $u \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$, $x \in \mathbb{S}^2$ и $u(x) = 0$. Предположим, что $u = vw$, где v и w вещественны, $v \in \mathcal{P}_m^3$, $w \in \mathcal{P}_{n-m}^3$. Если $w(y) \neq 0$ для всех достаточно близких к x точек $y \in \mathbb{S}^2 \setminus \{x\}$, то $w(x) \neq 0$.

Доказательство. Можно считать, что $x = (0, 0, 1)$. Если u имеет нуль кратности k в x , то

$$u(x_1, x_2, x_3) = p_k(x_1, x_2)x_3^{n-k} + p_{k+1}(x_1, x_2)x_3^{n-k-1} + \dots + p_n(x_1, x_2),$$

где $p_j \in \mathcal{P}_j^2$, $p_k \neq 0$. Так как $\Delta u = 0$, то $\Delta p_k = 0$. Следовательно,

$$p_k(x_1, x_2) = \operatorname{Re}(\lambda(x_1 + ix_2)^k)$$

²Соответствующая гармоника — малое возмущение функции $\operatorname{Re}(x_1 + ix_2)^n$.

для некоторого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому p_k — произведение различных линейных форм. Пусть

$$\begin{aligned} w &= q_l(x_1, x_2)x_3^{n-m-l} + q_{l+1}(x_1, x_2)x_3^{n-m-l-1} + \cdots + q_{n-m}(x_1, x_2), \\ v &= r_s(x_1, x_2)x_3^{m-s} + r_{s+1}(x_1, x_2)x_3^{m-s-1} + \cdots + r_m(x_1, x_2), \end{aligned}$$

где $q_j, r_j \in \mathcal{P}_j^2$ и $q_l, r_s \neq 0$. Так как $p_k = q_l r_s$, то $k = l + s$; более того, q_l — либо константа, либо произведение различных линейных форм. Последнее влечёт изменение знака функции q_l вблизи x ; тогда то же самое верно для w , что противоречит предположению. Таким образом, $l = 0$, и из $q_l \neq 0$ следует $w(x) = q_l(x) \neq 0$. \square

Доказательство предложения 3. Пусть $u, v \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$, w — наибольший общий делитель для u и v . Очевидно, делитель w веществен. Так как множество $N_u \cap N_v$ конечно, то нули w в \mathbb{S}^2 изолированы; согласно лемме 4, w не имеет нулей в \mathbb{S}^2 . Предложение следует из теоремы Безу для u/w и v/w . \square

Равенство в (17) достигается, например, для следующих пар и их небольших возмущений:

$$\begin{aligned} u &= \phi_a, \quad v = \operatorname{Re}(x_2 + ix_3)^n, \quad \text{где } a = (1, 0, 0); \\ u &= \operatorname{Re}(ix_2 + x_3)^n, \quad v = \operatorname{Re}(x_1 + ix_2)^n. \end{aligned} \quad (18)$$

Следствие 3. Если множество критических точек для $u \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ конечно, то их количество не превосходит $2n^2$; в частности, это верно для $u \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ общего положения.

Доказательство. Если x — критическая точка u , то $\xi u(x) = 0$ для любого векторного поля $\xi \in \mathfrak{so}(3)$. Можно выбрать два поля $\xi, \eta \in \mathfrak{so}(3)$ так, чтобы они были независимы во всех критических точках и чтобы $\xi u, \eta u \neq 0$; тогда критические точки функции u — общие нули для $\xi u, \eta u \in \mathcal{H}_n$. \square

Замечание 4. Оценка $2n^2$, видимо, может быть улучшена. Во всяком случае, для $n = 1, 2$ число критических точек равно $2(n^2 - n + 1)$, если оно конечно. Пусть u, v — те же, что в (18). Тогда функция $u + \varepsilon v$, где ε мало, имеет $2(n^2 - n + 1)$ критических точек. Мне неизвестны примеры сферических гармоник с бóльшим (конечным) количеством критических точек.

Замечание 5. Проведённые рассуждения доказывают немного больше, чем сформулировано в следствии 3. Нетривиальная $\mathrm{SO}(3)$ -орбита u имеет размерность 3 или 2, причём последнее возможно лишь в случае $u = c\phi_a$, где $c \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{S}^2$. В первом случае множество C критических точек для u

совпадает с множеством общих нулей трёх линейно-независимых сферических гармоник (базис касательного пространства к орбите u). Поэтому $\text{codim } \mathcal{N}_C \geq 3$. Три гармоники общего положения не имеют общих нулей. Это означает, что конфигурация критических точек всегда вырождена. Задача оценки числа критических точек, компонент узловых областей и других численных характеристик сферических гармоник на \mathbb{S}^2 ставилась в [2].

Предложение 4. *Множество \mathcal{I} функций $f = u + iv \in \mathcal{H}_n$ таких, что $\nu(u, v) = \infty$, замкнуто и нигде не плотно в \mathcal{H}_n .*

Доказательство. Если множество $N_u \cap N_v$ бесконечно, то оно содержит жорданову дугу, которая продолжается до контура, так как u и v вещественно-аналитичны (согласно [6], узловое множество есть объединение гладких дуг вне своего конечного подмножества). Этот контур не может целиком содержаться в круге, который содержится в одной из узловых областей, иначе первое собственное число ограниченной контуром области было бы строго больше $n(n+1)$. Следовательно, диаметр контура ограничен снизу. Поэтому множество \mathcal{I} замкнуто. Если $f \in \mathcal{I}$, то u и v имеют нетривиальный общий делитель, согласно теореме Безу; поэтому множество \mathcal{I} нигде не плотно. \square

Для известных мне примеров функций $f \in \mathcal{I}$ множество $N_u \cap N_v$ есть объединение окружностей.

§3. Оценки длин и внутренних радиусов

Пусть M — гладкое (C^∞) компактное связное риманово многообразие, $m = \dim M$, \mathfrak{h}^k обозначает k -мерную меру Хаусдорфа на M . Яу [22] предположил, что существуют положительные константы c и C такие, что

$$c\sqrt{\lambda} \leq \mathfrak{h}^{m-1}(N_u) \leq C\sqrt{\lambda}$$

для узлового множества N_u любой собственной функции u , отвечающей собственному числу $-\lambda$. Для вещественно-аналитических многообразий M эта гипотеза была доказана Донелли и Фефферманом в [8]. Нижние границы в случае поверхностей были найдены в статьях [5] и [18]; в [18] $c = \frac{1}{11} \text{Area}(M)$.

Рассмотрим сначала случай $M = \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $m \geq 1$. Положим

$$\psi(x) = \text{Re}(x_1 + ix_2)^n.$$

Очевидно, $\psi \in \mathcal{H}_n^{m+1}$. Обозначим через ϕ зональную сферическую гармонику (индекс опущен потому, что геометрические величины, характеризующие множество N_ϕ , не зависят от выбора ϕ). Пусть

$$\omega_k = \mathfrak{h}^k(\mathbb{S}^k) = \frac{2\pi^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}.$$

Теорема 3. *Для любой ненулевой вещественной гармоники $u \in \mathcal{H}_n^{m+1}$ имеем*

$$\mathfrak{h}^{m-1}(N_u) \leq \mathfrak{h}^{m-1}(N_\psi) = n\omega_{m-1}. \quad (19)$$

Эта теорема — просто наблюдение по модулю следующего факта (частный случай теоремы 3.2.48 из [10]). Множество, допускающее реализацию в виде образа ограниченного подмножества \mathbb{R}^k при липшицевом отображении, называется k -спрямляемым (мы будем рассматривать лишь те множества, что представимы в виде счётного объединения компактов). Так как $u \in \mathcal{H}_n^{m+1}$ — полином, то его узловое множество $(m-1)$ -спрямляемо. Обозначим через μ_m инвариантную меру на $O(m+1)$ полной массы 1.

Теорема 4 (см. [10]). *Пусть множества $A, B \subseteq \mathbb{S}^d$ компактны, A k -спрямляемо, а B l -спрямляемо. Положим $r = k + l - d$. Предположим, что $r \geq 0$. Тогда*

$$\int_{O(d)} \mathfrak{h}^r(A \cap gB) d\mu_d(g) = K \mathfrak{h}^k(A) \mathfrak{h}^l(B), \quad (20)$$

$$\text{где } K = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^d \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)} = \frac{\omega^r}{\omega_k \omega_l}.$$

Если $r = 0$, то левая часть формулы (20) — аналог меры Фавара для сфер (по A или B). Заметим, что в рассматриваемой ситуации формулу (20) можно доказать непосредственно, так как левая часть при фиксированном A (или B) аддитивна на конечных семействах непересекающихся компактов; поэтому достаточно проверить асимптотику на малых частях подмногообразий.

Лемма 5. *Для любой вещественной функции $u \in \mathcal{H}_n^{m+1}$ и каждой большой окружности \mathbb{S}^1 в \mathbb{S}^m , если пересечение $\mathbb{S}^1 \cap N_u$ конечно, то*

$$\text{card}(\mathbb{S}^1 \cap N_u) \leq 2n. \quad (21)$$

Доказательство. Сужение функции u на двумерную линейную оболочку множества \mathbb{S}^1 есть однородный полином степени n от двух переменных. \square

Доказательство теоремы 3. Так как окружность \mathbb{S}^1 имеет ровно две общие точки с любой гиперплоскостью, в которой она не содержится, то для почти всех $g \in O(m+1)$ имеем

$$\text{card}(g\mathbb{S}^1 \cap N_u) \leq 2n = \text{card}(g\mathbb{S}^1 \cap N_\psi).$$

Неравенство в (19) получается интегрированием по $O(m+1)$ и применением формулы (20) при $k=1$, $l=m-1$, $A=\mathbb{S}^1$, $B=N_u$ и $B=N_\psi$. Равенство очевидно. \square

Нижнюю границу также можно получить подобными методами. В последующем предполагается, что $k=l=1$ и $m=2$; тогда $K=\frac{1}{2\pi^2}$ и формула (19) выглядит так:

$$\mathfrak{h}^1(N_u) \leq 2\pi n. \quad (22)$$

Узловое множество N_ϕ зональной сферической гармоники $\phi = \phi_a \in \mathcal{H}_n$, где $a \in \mathbb{S}^2$, есть объединение параллельных окружностей евклидовых радиусов $\sqrt{1-t_k^2}$, где t_k — нули полинома Лежандра P_n . Наименьшая окружность соответствует наибольшему нулю t_n . Положим $r_n = \sqrt{1-t_n^2}$ и обозначим через C_n окружность в \mathbb{S}^2 евклидова радиуса r_n . Благодаря предложению 2, при любой $u \in \mathcal{H}_n$ справедливо неравенство

$$\text{card}(gC_n \cap N_u) \geq 2 \quad \text{для всех } g \in O(3). \quad (23)$$

Из (20) следует, что

$$\mathfrak{h}^1(N_u) \geq \frac{2\pi}{r_n}.$$

Согласно теореме 6.3.4 из [21], $t_n = \cos \theta_n$, где

$$0 < \theta_n < \frac{j_0}{n + \frac{1}{2}}, \quad (24)$$

а $j_0 \approx 2.4048$ — наименьший положительный корень функции Бесселя J_0 . Эта оценка, ввиду [21, (6.3.15)], асимптотически точна: $\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n = j_0$. Таким образом,

$$r_n = \sin \theta_n < \sin \frac{j_0}{n + \frac{1}{2}} < \frac{j_0}{n + \frac{1}{2}},$$

откуда

$$\mathfrak{h}^1(N_u) > \frac{2\pi}{j_0} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (25)$$

Оценка (25) не наилучшая, но она больше, чем $\frac{1}{11} \text{Area}(M)\sqrt{\lambda}$, нижняя граница из [18]:

$$\frac{4\pi}{11} \sqrt{n(n+1)} < \frac{2\pi}{j_0} \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

поскольку $\frac{4\pi}{11} \approx 1.4248$, $\frac{2\pi}{j_0} \approx 2.6127$; согласно [18], $\frac{1}{11} \text{Area}(M)\sqrt{\lambda}$ оценивает снизу длину узлового множества для всех римановых поверхностей M (при достаточно больших λ в общем случае и при всех λ , если кривизна M неотрицательна). Не исключено, что точной нижней границей является длина узлового множества зональной гармонике. Согласно [21, (6.21.5)], $\frac{k-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\pi \leq \tau_k \leq \frac{k}{n+\frac{1}{2}}\pi$, где $\cos \tau_k$, $k = 1, \dots, n$ — нули P_n , пронумерованные в порядке убывания (т.е. $\tau_1 = \theta_n$). Поэтому

$$\mathfrak{H}^1(N_\phi) = 2\pi \sum_{k=1}^n \sin \tau_k \approx 2\pi n \int_0^1 \sin \pi x \, dx = 4n$$

при $n \rightarrow \infty$. Если предположение верно, то отношение верхней границы к нижней стремится к $\frac{\pi}{2}$, т.е. они довольно близки.

Можно оценить также и *внутренний радиус* $\mathbb{S}^2 \setminus N_u$

$$\text{inr}(\mathbb{S}^2 \setminus N_u) = \sup \left\{ \inf_{y \in N_u} \rho(x, y) : x \in \mathbb{S}^2 \right\},$$

где ρ — внутренняя метрика в \mathbb{S}^2 :

$$\rho(x, y) = \arccos \langle x, y \rangle.$$

Точную верхнюю границу найти нетрудно:

$$\text{inr}(\mathbb{S}^2 \setminus N_u) \leq \text{inr}(\mathbb{S}^2 \setminus N_\phi) = \theta_n$$

ввиду неравенств (24). Действительно, эта оценка достигается при $u = \phi$ и не может быть больше, поскольку окружность C_n пересекает любое узловое множество, согласно предложению 2. Обозначим через $C(\theta)$ окружность радиуса θ во внутренней метрике \mathbb{S}^2 ; тогда евклидов радиус окружности $C(\theta)$ равен $r = \sin \theta$. Число $\theta_0 > 0$ является нижней границей для внутреннего радиуса тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- (i) $\theta_0 \leq \theta_n$,
- (ii) для каждой функции $u \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ существует $g \in O(3)$ такое, что $gC(\theta_0) \cap N_u = \emptyset$

(благодаря (i), ограниченный окружностью $C(\theta_0)$ круг не может содержать компоненту множества N_u). Далее, для почти всех $g \in O(3)$ число

$\text{card}(gC(\theta_0) \cap N_u)$ чётно. Поэтому можно считать, что

$$\text{card}(gC(\theta_0) \cap N_u) \geq 2,$$

если $gC(\theta_0) \cap N_u \neq \emptyset$. Положим $r_0 = \sin \theta_0$. Если (ii) не выполняется, то

$$2 \leq \frac{1}{2\pi^2} \mathfrak{h}^1(C(\theta_0)) \mathfrak{h}^1(N_u) = \frac{r_0}{\pi} \mathfrak{h}^1(N_u) \leq 2r_0 n,$$

согласно (20). Таким образом, если $r_0 < \frac{1}{n}$, то θ_0 — нижняя граница для $\text{inr}(\mathbb{S}^2 \setminus N_u)$. Поэтому $\arcsin \frac{1}{n}$ является нижней границей для $\text{inr}(\mathbb{S}^2 \setminus N_u)$. Видимо, оценка может быть улучшена; возможно, наименьший внутренний радиус имеет множество $\mathbb{S}^2 \setminus N_\psi$ (он равен $\frac{\pi}{2n}$).

Сформулируем доказанные выше результаты по \mathbb{S}^2 .

Теорема 5. Пусть $M = \mathbb{S}^2$. Для любой ненулевой сферической гармоники $u \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ имеют место оценки

$$\frac{2\pi}{j_0} \left(n + \frac{1}{2}\right) < \mathfrak{h}^1(N_u) \leq 2\pi n, \quad (26)$$

$$\arcsin \frac{1}{n} \leq \text{inr}(\mathbb{S}^2 \setminus N_u) \leq \theta_n < \frac{j_0}{n + \frac{1}{2}}. \quad (27)$$

Верхняя граница в (26) достигается при $u = \psi$; в (27) верхняя граница θ_n достигается при $u = \phi$. \square

§4. Средняя мера Хаусдорфа пересечений узловых множеств

Фиксируем $m \geq 2$ и единичную сферу $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Мы найдем среднее значение по u_1, \dots, u_k , $k \leq m$, мер Хаусдорфа множеств

$$N_{u_1} \cap \dots \cap N_{u_k} \subseteq \mathbb{S}^m.$$

При $k = m$ это среднее число общих нулей функций u_1, \dots, u_m в \mathbb{S}^m . Обозначим

$$\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k), \quad \delta(\mathbf{n}) = \dim \mathcal{H}_{\mathbf{n}}^{m+1} - 1,$$

где n, n_j — натуральные числа. Определим среднее значение так:

$$M_{\mathbf{n}} = \int_{\mathbb{S}^{\delta(n_1)} \times \dots \times \mathbb{S}^{\delta(n_k)}} \mathfrak{h}^{m-k}(N_{u_1} \cap \dots \cap N_{u_k}) d\tilde{\sigma}_{\delta(n_1)}(u_1) \dots d\tilde{\sigma}_{\delta(n_k)}(u_k), \quad (28)$$

где $\tilde{\sigma}_j$ — инвариантная мера на \mathbb{S}^j полной массы 1. Пусть λ_n — собственное значение оператора $-\Delta$ в \mathcal{H}_n^{m+1} ; напомним, что

$$\lambda_n = n(n + m - 1).$$

Теорема 6. Пусть $1 \leq k \leq m$. Тогда

$$M_{\mathbf{n}} = \omega_{m-k} m^{-\frac{k}{2}} \sqrt{\lambda_{n_1} \dots \lambda_{n_k}}, \quad (29)$$

где среднее $M_{\mathbf{n}}$ определено в (28).

Если $k = m$, то $M_{\mathbf{n}}$ — среднее значение величины $\text{card}(N_{u_1} \cap \dots \cap N_{u_m})$; так как $\omega_0 = 2$ и $\mathfrak{h}^0 = \text{card}$, то оно равно

$$2m^{-\frac{m}{2}} \sqrt{\lambda_{n_1} \dots \lambda_{n_m}}.$$

Имеется естественное эквивариантное отображение $\iota_n : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^{\delta(n)} \subset \mathcal{H}_n^{m+1}$:

$$\iota_n(a) = \frac{\phi_a}{|\phi_a|}. \quad (30)$$

Для нечётных n оно взаимно-однозначно, а при чётных n является двулистным накрытием (отождествляются противоположные точки). Так как риманова метрика в $\iota(\mathbb{S}^m)$ инвариантна относительно $O(m+1)$, а группа изотропии точки a транзитивна на сферах в $T_a \mathbb{S}^m$, то ι_n локально является метрическим подобием относительно внутренних метрик. Пусть s_n — его коэффициент. Очевидно,

$$s_n = \frac{|d_a \iota_n(v)|}{|v|}, \quad (31)$$

где правая часть не зависит от $a \in \mathbb{S}^m$ и $v \in T_a \mathbb{S}^m \setminus \{0\}$. Более того, при $l \leq m$ для каждого l -спрямляемого множества $X \subseteq \mathbb{S}^m$ такого, что $X \cap (-X) = \emptyset$, имеет место равенство

$$\mathfrak{h}^l(\iota_n(X)) = s_n^l \mathfrak{h}^l(X). \quad (32)$$

Лемма 6. Пусть множество $X \subseteq \mathbb{S}^m$ компактно и $(r+1)$ -спрямляемо, где $r \leq m-1$. Тогда

$$\int_{\mathbb{S}^{\delta(n)}} \mathfrak{h}^r(N_u \cap X) d\sigma_{\delta(n)}(u) = s_n \frac{\omega_r}{\omega_{r+1}} \mathfrak{h}^{r+1}(X).$$

Доказательство. Поскольку обе части равенства аддитивны по X , достаточно доказать утверждение в предположении $X \cap (-X) = \emptyset$. Мы применим теорему 4 к сфере $\mathbb{S}^{\delta(n)}$ и её подмножествам $A = \mathbb{S}^{\delta(n)-1}$, $B = \iota(X)$. В обозначениях этой теоремы $d = \delta(n)$, $k = d-1$, $l = r+1$; $K\omega_k = \frac{\omega_r}{\omega_l}$. Заменяя интегрирование по \mathbb{S}^d усреднением по $O(d+1)$ и применяя (32),

получаем

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{S}^d} \mathfrak{h}^r(N_u \cap X) d\sigma_d(u) &= \frac{1}{s_n^r} \int_{\mathbb{S}^d} \mathfrak{h}^r(\iota(N_u \cap X)) d\sigma_d(u) \\
 &= \frac{1}{s_n^r} \int_{\mathbb{S}^d} \mathfrak{h}^r(u^\perp \cap \iota(X)) d\sigma_d(u) = \frac{1}{s_n^r} \int_{\mathcal{O}(d+1)} \mathfrak{h}^r(g\mathbb{S}^k \cap \iota(X)) d\mu_d(g) \\
 &= \frac{1}{s_n^r} K \mathfrak{h}^k(\mathbb{S}^k) \mathfrak{h}^{r+1}(\iota(X)) = \frac{\omega_r}{s_n^r \omega_{r+1}} \mathfrak{h}^{r+1}(\iota(X)) = s_n \frac{\omega_r}{\omega_{r+1}} \mathfrak{h}^{r+1}(X). \quad \square
 \end{aligned}$$

Следствие 4. Среднее значение $\mathfrak{h}^{m-1}(N_u)$ по $u \in \mathcal{H}_n^{m+1}$ равно $s_n \omega_{m-1}$.

Доказательство. Положим $X = \mathbb{S}^m$, $r = m - 1$. □

Следствие 5. Пусть $M_{\mathbf{n}}$, m , k — те же, что и в (28). Тогда

$$M_{\mathbf{n}} = \omega_{m-k} \prod_{j=1}^k s_{n_j}. \quad (33)$$

Доказательство. Пусть $X = N_{u_1} \cap \dots \cap N_{u_{k-1}}$. Согласно лемме 6,

$$M_{\mathbf{n}} = s_{n_k} \frac{\omega_{m-k}}{\omega_{m-k+1}} M_{\mathbf{n}'},$$

где $\mathbf{n}' = (n_1, \dots, n_{k-1})$. Повторяя это и применяя следствие 4 на последнем шаге, получаем (33). □

Осталось найти s_n . Обозначим

$$d = \dim \mathcal{O}(m+1).$$

Так как стабилизатор $\mathcal{O}(m)$ точки $a = (0, \dots, 0, 1)$ транзитивен на сферах в $T_a \mathbb{S}^m$, то инвариантная риманова метрика в $\mathcal{O}(m+1)$ может быть выбрана так, чтобы каноническая проекция $\mathcal{O}(m+1) \rightarrow \mathbb{S}^m$ была метрической субмерсией. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_m, \dots, \xi_d$ — ортонормальный базис в алгебре Ли $\mathfrak{so}(m+1)$. Реализуя $\mathfrak{so}(m+1)$ левоинвариантными векторными полями на $\mathcal{O}(m+1)$, получаем инвариантный оператор Лапласа–Бельтрами на $\mathcal{O}(m+1)$:

$$\tilde{\Delta} = \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2.$$

Сумма не зависит от выбора базиса, так как она левоинвариантна, а это свойство выполняется в единице. Поэтому можно считать, что

$$\xi_{m+1}, \dots, \xi_d \in \mathfrak{so}(m). \quad (34)$$

Для $f \in C^2(\mathbb{S}^m)$ положим $\tilde{f}(g) = f(ga)$. Тогда $\langle \Delta f, \phi_a \rangle = \tilde{\Delta} \tilde{f}(e)$. Так как ι эквивариантно, то

$$d_a \iota(\xi a) = \frac{1}{|\phi_a|} \xi \phi_a \quad (35)$$

для всех $\xi \in \mathfrak{so}(m+1)$. Из (34) следует, что $\xi_1 a, \dots, \xi_m a$ — базис в $T_a \mathbb{S}^m$, а $\xi_1 \phi_a, \dots, \xi_m \phi_a$ — базис в $T_{\phi_a} \iota(\mathbb{S}^m)$. Кроме того,

$$\begin{aligned} |\xi_k a| &= 1, \quad k = 1, \dots, m, \\ \xi_k a &= 0, \quad k = m+1, \dots, d, \end{aligned}$$

где первое равенство выполняется потому, что проекция $O(m+1) \rightarrow \mathbb{S}^m$ является метрической субмерсией. Благодаря этим равенствам, а также соотношениям (30), (31) и (35), получаем

$$\begin{aligned} m s_n^2 &= s_n^2 \sum_{k=1}^d |\xi_k a|^2 = \sum_{k=1}^d |d_a \iota(\xi_k a)|^2 = \frac{1}{|\phi_a|^2} \sum_{k=1}^d |\xi_k \phi_a|^2 \\ &= -\frac{1}{|\phi_a|^2} \sum_{k=1}^d \langle \xi_k^2 \phi_a, \phi_a \rangle = -\frac{1}{|\phi_a|^2} \langle \Delta \phi_a, \phi_a \rangle = \lambda_n. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 6. Согласно проведённому выше вычислению,

$$s_n = \sqrt{\frac{\lambda_n}{m}}.$$

Применяя следствие 5, получаем (29). \square

В случае $n_1 = \dots = n_k = n$ есть и немного иное естественное объяснение равенств (29), (33):

$$M_{\mathbf{n}} = \omega_{m-k} \left(\frac{\lambda_n}{m} \right)^{\frac{k}{2}} = \omega_{m-k} s_n^k.$$

Среднее может быть определено как интеграл по группе $O(m+1)$ при её действии на множестве подпространств коразмерности k в \mathcal{H}_n^m , которые

могут быть реализованы как $\mathcal{N}_{u_1} \cap \dots \cap \mathcal{N}_{u_k} = u_1^\perp \cap \dots \cap u_k^\perp$:

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{n}} &= \int_{O(m+1)} \mathfrak{h}^{m-k} (\iota_n^{-1}(g\mathbb{S}^{\delta(n)-k} \cap \iota_n(\mathbb{S}^m))) d\mu_m(g) \\ &= s_n^{k-m} \int_{O(m+1)} \mathfrak{h}^{m-k} (g\mathbb{S}^{\delta(n)-k} \cap \iota_n(\mathbb{S}^m)) d\mu_m(g) \\ &= s_n^{k-m} \frac{\omega_{m-k}}{\omega_m} \mathfrak{h}^m(\iota(\mathbb{S}^m)) \\ &= \omega_{m-k} s_n^k. \end{aligned}$$

Метод вычисления среднего значения мер Хаусдорфа распространяется на случай однородных римановых пространств, группа изотропии которых транзитивна на сферах из касательного пространстве.

Я благодарен Л. Полтеровичу за вопрос-предположение о „теореме Безу в среднем“ и Д. Якобсону за полезные комментарии и ссылки.

Список литературы

- [1] Арнольд В. И., *Лекции об уравнениях с частными производными*, ФАЗИС, М., 1997.
- [2] Арнольд В. И. и др., *Некоторые нерешенные задачи теории дифференциальных уравнений и математической физики*, Успехи мат. наук **44** (1989), №4(268), 191–202.
- [3] Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G., *Higher transcendental functions*. Vol. II, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York etc., 1953.
- [4] Bérard P., *Volume des ensembles nodaux des fonctions propres du laplacien*, Bony–Sjöstrand–Meyer Seminar, 1984–1985, École Polytech., Palaiseau, 1985, Exp. No. 14.
- [5] Brüning J., *Über Knoten von Eigenfunktionen des Laplace–Beltrami Operators*, Math. Z. **158** (1978), 15–21.
- [6] Cheng S.-Y., *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 43–55.
- [7] Courant R., Hilbert D., *Methoden der mathematischen Physik*. Bd. 1, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 12, Springer-Verlag, Berlin, 1931.
- [8] Donnelly H., Fefferman C., *Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds*, Invent. Math. **93** (1988), no. 1, 161–183.
- [9] Eremenko A., Jakobson D., Nadirashvili N., *On nodal sets and nodal domains on \mathbb{S}^2 and \mathbb{R}^2* , Preprint arXiv:math.SP/0611627.
- [10] Federer H., *Geometric measure theory*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 153, Springer, Berlin, 1969.

-
- [11] Gichev V. M., *A note on common zeroes of Laplace–Beltrami eigenfunctions*, Ann. Global Anal. Geom. **26** (2004), 201–208.
- [12] Lewy H., *On the minimum number of domains in which the nodal lines of spherical harmonics divide the sphere*, Comm. Partial Differential Equations **2** (1977), no. 12, 1233–1244.
- [13] Mangoubi D., *On the inner radius of nodal domains*, arXiv:math/0511329v3.
- [14] Mangoubi D., *Local asymmetry and the inner radius of nodal domains*, arXiv:math/0703663v3.
- [15] Maxwell J. C., *A treatise on electricity and magnetism*. Vol. 1, Dover Publ., Inc., New York, 1954.
- [16] Neuheisel J., *The asymptotic distribution of nodal sets on spheres*, Johns Hopkins Ph. D. thesis, 2000.
- [17] Rudnick Z., Wigman I., *On the volume of nodal sets for eigenfunctions of the Laplacian on the torus*, Preprint arXiv:math-ph/0609072v2.
- [18] Savo A., *Lower bounds for the nodal length of eigenfunctions of the Laplacian*, Ann. Global Anal. Geom. **19** (2001), 133–151.
- [19] Stein E., Weiss G., *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., vol. 32, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
- [20] Sylvester J. J., *Note on spherical harmonics*, Philos. Mag. **2** (1876), 291–307.
- [21] Szegő G., *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.
- [22] Yau S. T. (ed.), *Seminar on Differential Geometry*, Ann. of Math. Stud, vol. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1982.

Омский филиал
Института математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
644099, Омск
ул. Певцова, 13
Россия
E-mail: gichev@ofim.oscsbras.ru

Поступило 11 сентября 2007 г.