



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. A. Trushkova, Global control improvement algorithms, *Avtomat. i Telemekh.*, 2011, Issue 6, 151–159

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.89

January 25, 2025, 18:37:37



© 2011 г. Е.А. ТРУШКОВА, канд. физ.-мат. наук  
(Институт программных систем имени А.К. Айламазяна РАН,  
Переславль-Залесский)

## АЛГОРИТМЫ ГЛОБАЛЬНОГО ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

В рамках теории В.Ф. Кротова сформулирован подход к нелокальному улучшению на основе достаточных условий оптимальности и улучшения. Предлагаются конструктивные методы задания разрешающей функции, реализующие упомянутый общий подход Кротова для произвольных систем посредством линейных уравнений в частных производных и их дискретных аналогов – линейных рекуррентных соотношений. Приводятся примеры.

### 1. Введение

Различные итерационные методы улучшения управляемых процессов – обширная область исследований и разработок в теории оптимального управления, нацеленных на эффективное решение практических задач. Исторически развитие этих методов началось одновременно с созданием современной теории оптимального управления.

Метод глобального последовательного улучшения управления был предложен и получил дальнейшее развитие в [1–4] и ряде других работ. Этот метод обладает рядом преимуществ перед широко применяемыми методами локального улучшения процессов (например, отсутствием настроечных коэффициентов, меньшей зависимостью от начального приближения, реализацией посредством единственной пары прогонок и др.). Однако в большинстве алгоритмов использовалась наиболее простая, линейная функция, разрешающая основные соотношения метода глобального улучшения Кротова.

В данной работе развивается вариант глобального метода улучшения процессов, который сводит известные соотношения метода к более простым, а именно: в случае нелинейных управляемых процессов – к решению задачи Коши для линейного уравнения в частных производных, а в случае дискретных управляемых процессов – к решению линейных рекуррентных соотношений. Подобная модификация метода позволяет вести поиск разрешающей функции не только в линейном виде. Рассматриваются важные частные случаи и приводятся примеры.

### 2. Глобальное улучшение для непрерывных систем

Рассмотрим непрерывную задачу оптимального управления

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_I, t_F], \\ x(t_I) &= x_I, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U(t, x) \subset R^p, \\ J(x, u) &= F(x(t_F)) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Задача улучшения ставится следующим образом: пусть известен допустимый элемент задачи (1)  $(x^I(t), u^I(t))$ , требуется найти допустимый элемент задачи (1)  $(x^{II}(t), u^{II}(t))$ , такой что  $F(x^{II}(t_F)) < F(x^I(t_F))$ .

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №09-01-00170).

Для любой функции  $\varphi(t, x)$  запишем конструкции, фигурирующие в достаточных условиях оптимальности [5, 6]:

$$L(x, u; \varphi) = G(x(t_F)) - \int_{t_I}^{t_F} R(t, x, u) dt - \varphi(t_I, x(t_I)),$$

где

$$\begin{aligned} G(\xi) &= F(\xi) + \varphi(t_F, \xi), \\ R(t, x, u) &= \varphi_x^T(t, x) f(t, x, u) + \varphi_t(t, x). \end{aligned}$$

Заметим, что  $L(x, u; \varphi) = J(x, u)$  на любой допустимой паре  $(x, u)$ .

**Основной алгоритм глобального улучшения [1, 2]:**

0. Имеем начальный допустимый процесс  $(x^I(t), u^I(t))$ .

1. Ищем  $\varphi^0(t, x)$  из соотношений

$$(2) \quad R(t, x^I(t), u^I(t)) = \min_{x(t)} R(t, x(t), u^I(t)),$$

$$(3) \quad G(x^I(t_F)) = \max_x G(x).$$

2. Строим функцию

$$(4) \quad \tilde{u}(t, x) = \arg \max_{u \in U(t, x^I(t))} R(t, x, u; \varphi^0).$$

3. Решая задачу Коши

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \tilde{u}(t, x(t))), \quad x(t_I) = x_I,$$

находим улучшенный допустимый процесс  $(x^II(t), u^II(t))$ .

Алгоритм гарантирует неухудшение функционала, т.е. выполнение неравенства  $J(x^I(t), u^I(t)) - J(x^II(t), u^II(t)) \geq 0$  [1].

Рассмотрим частный случай. А именно, будем искать функцию  $\varphi^0(t, x)$  в предположении, что

$$(5) \quad R(t, x(t), u^I(t)) = 0, \quad t \in [t_I, t_F),$$

$$(6) \quad G(x) = -\varphi(t_I, x_I).$$

Тогда соотношения (2), (3) переписутся в виде

$$(7) \quad \varphi_x^T(t, x) f(t, x, u^I(t)) + \varphi_t(t, x) = 0,$$

$$(8) \quad F(x) + \varphi(t_F, x) = 0.$$

**Алгоритм глобального улучшения:**

0. Имеем начальный допустимый процесс  $(x^I(t), u^I(t))$ .

1. Ищем  $\varphi^0(t, x)$  из соотношений (7), (8) как решение задачи Коши для уравнения в частных производных.

2. Строим функцию

$$(9) \quad \tilde{u}(t, x) = \arg \max_{u \in U(t, x^I(t))} (\varphi_x^{0T}(t, x) f(t, x, u) + \varphi_t^0(t, x)).$$

3. Решая задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \tilde{u}(t, x(t))), \quad x(t_I) = x_I,$$

находим улучшенный допустимый процесс  $(x^{II}(t), u^{II}(t))$ .

*Теорема 1.* Вышеописанный алгоритм глобального улучшения гарантирует неухудшение функционала, т.е. выполнение неравенства  $J(x^I(t), u^I(t)) - J(x^{II}(t), u^{II}(t)) \geq 0$ . Если же для функции  $\varphi^0$ , разрешающей соотношения (7), (8), условие  $R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0) = \max_{u \in U(t, x^I(t))} R(t, x^I(t), u; \varphi^0) \forall t \neq T$  не выполняется, то будет верно строгое неравенство  $J(x^I(t), u^I(t)) - J(x^{II}(t), u^{II}(t)) > 0$ .

*Доказательство.* Имеем

$$\begin{aligned} & J(x^I(t), u^I(t)) - J(x^{II}(t), u^{II}(t)) = \\ & = L(x^I(t), u^I(t); \varphi^0) - L(x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0) = \\ & = G(x^I(t_F)) - G(x^{II}(t_F)) + \\ & + \int_{t_I}^{t_F} (R(t, x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0) - R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0)) dt = \\ & = G(x^I(t_F)) - G(x^{II}(t_F)) + \\ & + \int_{t_I}^{t_F} (R(t, x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0) - R(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0)) dt + \\ & + \int_{t_I}^{t_F} (R(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0) - R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0)) dt = \\ & = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_1 = G(x^I(t_F)) - G(x^{II}(t_F)) = 0 \quad \text{в силу (6),}$$

$$\Delta_2 = \int_{t_I}^{t_F} (R(t, x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0) - R(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0)) dt \geq 0 \quad \text{в силу (9),}$$

а при невыполнении условия  $R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0) = \max_{u \in U(t, x^I(t))} R(t, x^I(t), u; \varphi^0) \forall t \neq T$  в силу (9) верно  $\Delta_2 > 0$ ,

$$\Delta_3 = \int_{t_I}^{t_F} (R(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0) - R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0)) dt \geq 0 \quad \text{в силу (5).}$$

Укажем частные случаи постановки задачи оптимального управления (1), когда задача Коши для уравнения в частных производных (7), (8) уже сама является задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

*Случай 1.* Если в постановке задачи (1)

$$f(t, x, u) = A(t, u)x + B(t, u), \quad F(x) = \eta^T x,$$

то решение задачи Коши для уравнения в частных производных (7), (8) можно найти в виде  $\varphi^0(t, x) = \nu(t) + \psi^T(t)x$ , где  $\nu(t)$ ,  $\psi(t)$  являются решением задачи Коши для системы  $n + 1$  обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t) &= -A^T(t, u^I(t))\psi(t), & \psi(t_F) &= -\eta, \\ \dot{\nu}(t) &= -B^T(t, u^I(t))\psi(t), & \nu(t_F) &= 0.\end{aligned}$$

*Случай 2.* Если в постановке задачи (1)

$$f(t, x, u) = A(t, u)x + B(t, u), \quad F(x) = \eta^T x + x^T \rho x,$$

то решение задачи Коши для уравнения в частных производных (7), (8) можно найти в виде  $\varphi^0(t, x) = \nu(t) + \psi^T(t)x + x^T \sigma(t)x$ , где  $\nu(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\sigma(t)$  являются решением задачи Коши для системы  $n + n^2 + 1$  обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t) &= -A^T(t, u^I(t))\psi(t) - 2\sigma(t)B(t, u^I(t)), & \psi(t_F) &= -\eta, \\ \dot{\sigma}(t) &= -2\sigma(t)A(t, u^I(t)), & \sigma(t) &= -\rho, \\ \dot{\nu}(t) &= -B^T(t, u^I(t))\psi(t), & \nu(t_F) &= 0.\end{aligned}$$

### 3. Глобальное улучшение для дискретных систем

Рассмотрим дискретную задачу оптимального управления

$$\begin{aligned}x(t+1) &= f(t, x(t), u(t)), & t &\in T = \{t_I, \dots, t_F\}, \\ x(t_I) &= x_I, & x &\in \mathbb{R}^n, \quad u \in U(t, x) \subset \mathbb{R}^p, \\ F(x(t_F)) &\rightarrow \min.\end{aligned}$$

Задача улучшения ставится аналогично задаче улучшения для непрерывных систем.

Для любой функции  $\varphi(t, x)$  запишем конструкции, фигурирующие в достаточных условиях оптимальности [5, 6]:

$$L(x, u; \varphi) = G(x(t_F)) - \sum_{t_I}^{t_F-1} R(t, x, u)dt,$$

где

$$\begin{aligned}G(\xi) &= F(\xi) + \varphi(t_F, \xi) - \varphi(t_I, x_I), \\ R(t, x, u) &= \varphi(t+1, f(t, x, u)) - \varphi(t, x).\end{aligned}$$

Заметим, что  $L(x, u; \varphi) = F(x(t_F))$  на любой допустимой паре  $(x, u)$ .

**Основной алгоритм глобального улучшения:**

0. Имеем начальный допустимый процесс  $(x^I(t), u^I(t))$ .

1. Ищем  $\varphi^0(t, x)$  из соотношений

$$(10) \quad R(t, x^I(t), u^I(t)) = \min_{x(t)} R(t, x(t), u^I(t)),$$

$$t \in \{t_I, \dots, t_F - 1\},$$

$$(11) \quad G(x^I(t_F)) = \max_x G(x).$$

2. Строим функцию

$$(12) \quad \tilde{u}(t, x) = \arg \max_{u \in U(t, x^I(t))} R(t, x, u; \varphi^0).$$

3. Решая систему

$$x(t+1) = f(t, x(t), \tilde{u}(t, x(t))), \quad x(t_I) = x_I,$$

находим улучшенный допустимый процесс  $(x^1(t), u^1(t))$ .

Рассмотрим частный случай. А именно, будем искать функцию  $\varphi^0(t, x)$  в предположении, что

$$\begin{aligned} R(t, x(t), u^I(t)) &= 0, \quad t \in \{t_I, \dots, t_F - 1\}, \\ G(x) &= -\varphi(t_I, x_I). \end{aligned}$$

Тогда соотношения (10), (11) перепишутся в виде

$$(13) \quad \varphi(t, x) = \varphi(t+1, f(t, x, u^I(t))), \quad t \in \{t_I, \dots, t_F - 1\},$$

$$(14) \quad \varphi(t_F, x) = -F(x).$$

**Алгоритм глобального улучшения:**

0. Имеем начальный допустимый процесс  $(x^I(t), u^I(t))$ .

1. Ищем  $\varphi^0(t, x)$  из соотношений (13), (14).

2. Строим функцию

$$(15) \quad \tilde{u}(t, x) = \arg \max_{u \in U(t, x^I(t))} (\varphi^0(t+1, f(t, x, u)) - \varphi^0(t, x)).$$

3. Решая систему

$$x(t+1) = f(t, x(t), \tilde{u}(t, x(t))), \quad x(t_I) = x_I,$$

находим улучшенный допустимый процесс  $(x^{II}(t), u^{II}(t))$ .

Вышеописанный алгоритм глобального улучшения гарантирует неухудшение функционала, т.е. выполнение неравенства  $J(x^I(t), u^I(t)) - J(x^{II}(t), u^{II}(t)) \geq 0$ . Если же для функции  $\varphi^0$ , разрешающей соотношения (13), (14), условие  $R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0) = \max_{u \in U(t, x^I(t))} R(t, x^I(t), u; \varphi^0) \forall t \neq T$  не выполняется, то будет верно строгое неравенство  $J(x^I(t), u^I(t)) - J(x^{II}(t), u^{II}(t)) > 0$ . Оба последних утверждения доказываются аналогично теореме 1.

*Пример 1.* Рассмотрим дискретную задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} x(t+1) &= 2x(t) + x^2(t) + 2x(t)u(t) + u^2(t), \quad t \in \{0, 1, 2\}, \\ x(0) &= -1, \\ F &= x(2) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Известно оптимальное решение задачи:  $u_*(0) = 1, u_*(1) = 2, F_* = -4$ .

Решим задачу с помощью алгоритма глобального улучшения (см. выше), задав некоторый начальный допустимый процесс.

0. Имеем начальный допустимый процесс  $u^I(0) = 0, u^I(1) = 0, x^I(0) = -1, x^I(1) = -1, x^I(2) = -1, F(x^I(2)) = -1$ .

1. Ищем  $\varphi^0(t, x)$  из соотношений (13), (14):

$$\begin{aligned}\varphi^0(2, x) &= -x, \\ \varphi^0(1, x) &= \varphi^0(2, f(1, x, u^I(1))) = -2x - x^2, \\ \varphi^0(0, x) &= \varphi^0(1, f(0, x, u^I(0))) = -2(2x + x^2) - (2x + x^2)^2.\end{aligned}$$

2. Строим функции:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(1, x) &= \arg \max_u \left\{ -2x - x^2 - 2xu - u^2 + 2x + x^2 \right\} = \\ &= \arg \max_u \left\{ -2xu - u^2 \right\} = -x, \\ \tilde{u}(0, x) &= \arg \max_u \left\{ -2(2x + x^2 + 2xu + u^2) - \right. \\ &\quad \left. - (2x + x^2 + 2xu + u^2)^2 + 2(2x + x^2) + (2x + x^2)^2 \right\} = \\ &= \arg \max_u \left\{ -4xu - 4xu^3 - 8x^2u - 6x^2u^2 - 4x^3u - 6u^2 - u^4 \right\}.\end{aligned}$$

3. Находим улучшенный допустимый процесс  $(x^H(t), u^H(t))$ :  $x^H(0) = -1, u^H(0) = 0, x^H(1) = -1, u^H(1) = 1, x^H(2) = -2, u^H(2) = -2, F(x^H(2)) = -2$ .

4. Найденный улучшенный допустимый процесс принимаем за начальный допустимый процесс и повторяем все шаги алгоритма.

5. Имеем начальный допустимый процесс  $u^I(0) = 0, u^I(1) = 1, x^I(0) = -1, x^I(1) = -1, x^I(2) = -2, F(x^I(2)) = -2$ .

6. Ищем  $\varphi^0(t, x)$  из соотношений (13), (14):

$$\begin{aligned}\varphi^0(2, x) &= -x, \\ \varphi^0(1, x) &= \varphi^0(2, f(1, x, u^I(1))) = -2x - x^2 - 2x - 1 = -x^2 - 4x - 1, \\ \varphi^0(0, x) &= \varphi^0(1, f(0, x, u^I(0))) = -2(2x + x^2)^2 - 4(2x + x^2) - 1.\end{aligned}$$

7. Строим функции:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(1, x) &= \arg \max_u \left\{ -2x - x^2 - 2xu - u^2 + x^2 + 4x + 1 \right\} = \\ &= \arg \max_u \left\{ -2xu - u^2 + 2x + 1 \right\} = -x, \\ \tilde{u}(0, x) &= \arg \max_u \left\{ - (2x + x^2 + 2xu + u^2)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 4(2x + x^2 + 2xu + u^2) - 1 + (2x + x^2)^2 + 4(2x + x^2) + 1 \right\} = \\ &= \arg \max_u \left\{ -6x^2u^2 - u^4 - 8x^2u - 4xu^2 - 4x^3u - 4xu^3 - 8xu - 4u^2 \right\}.\end{aligned}$$

8. Находим улучшенный допустимый процесс  $(x^H(t), u^H(t))$ :  $x^H(0) = -1, u^H(0) = 0, x^H(1) = -2, u^H(1) = 2, x^H(2) = -4, u^H(2) = -4, F(x^H(2)) = -4$ . Он же является оптимальным процессом в исходной задаче.

#### 4. Глобальное улучшение для непрерывных систем с линейным неограниченным управлением

Рассмотрим задачу улучшения начального элемента  $(x^I(t), u^I(t))$  для задачи вида

$$(16) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u) = g(t, x, u_1) + h(t, x)u_2, \quad t \in [t_I, t_F], \\ u &= (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^p, \quad u_1 \in \mathbf{U}(t, x) \subset \mathbb{R}^{p-1}, \\ x(t_I) &= x_I, \quad F(x(t_F)) \rightarrow \inf. \end{aligned}$$

Здесь

$x(t)$  – непрерывная, кусочно-гладкая фазовая траектория,  
 $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$  – кусочно-непрерывное управление.

Попробуем применить глобальный метод улучшения, описанный выше. А именно, для начального допустимого процесса  $(x^I(t), u^I(t))$  найдем  $\varphi^0(t, x)$  из соотношений (7), (8).

При дальнейшем построении функции согласно формуле (9), которая в данном случае запишется в виде

$$\tilde{u}(t, x) = \arg \max_{u_1 \in \mathbf{U}(t, x^I(t)), u_2} (\varphi_x^{0T} (g(t, x, u_1) + h(t, x)u_2) + \varphi_t^0),$$

операция взятия максимума по неограниченному управлению  $u_2$  в общем случае невозможна (возможна лишь при условии  $\varphi_x^{0T}(t, x)h(t, x) = 0$ ).

Для преодоления этой сложности воспользуемся методом преобразования исходной системы к производной [6], который позволяет свести задачу улучшения начального управления для системы (16) к задаче улучшения начального управления  $x^I(t)$  для производной задачи

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{y} &= \eta_x^T g(t, x, u_1) + \eta_t, \quad t \in [t_I, t_F], \\ y &= \eta(t, x), \quad u_1 \in \mathbf{U}(t, x) \subset \mathbb{R}^{p-1}, \\ x(t_I) &= x_I, \quad y(t_I) = \eta(t_I, x_I), \\ \tilde{F}(y(t_F)) &= \min_{x \in Q(y(t_F))} F(x) \rightarrow \inf, \\ \mathbf{Q}(y) &= \{x: y = \eta(t_F, x)\}. \end{aligned}$$

Здесь

$y(t)$  – непрерывная, кусочно-гладкая фазовая траектория,  
 $x(t), u_1(t)$  – кусочно-непрерывные управления,  
 $\eta(t, x) = (\eta^1, \dots, \eta^{n-1})$  – совокупность независимых первых интегралов системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = h(t, x).$$

Теперь для решения полученной задачи улучшения управления воспользуемся алгоритмом глобального улучшения. А именно, для начального допустимого процесса  $(y^I(t), x^I(t), u_1^I(t))$  найдем  $\tilde{\varphi}^0(t, y)$  из соотношений (7), (8), которые в данном случае запишутся в виде

$$\begin{aligned} \varphi_y^T (\eta_x^T(t, x^I(t))g(t, x^I(t), u_1^I(t)) + \eta_t(t, x^I(t))) + \varphi_t &= 0, \\ \varphi(t_F, y) &= \tilde{F}(y). \end{aligned}$$



Т.е.

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}^0(t, y) &= \tilde{F} \left( y + \int_t^{t_F} \nu(\xi) d\xi \right), \\ \nu(t) &= \eta_x^T(t, x^I(t)) g(t, x^I(t), u_1^I(t)) + \eta_t(t, x^I(t)).\end{aligned}$$

После этого можно искать управление согласно формуле (9) и соответствующий улучшенный допустимый процесс.

*Пример 2.* Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= x^2 u, \quad \dot{x}^2 = -1 - x^1 u, \quad t \in [0, 10], \\ x^1(0) &= 0, \quad x^2(0) = 0, \quad F(x(10)) = x^2(10) \rightarrow \min\end{aligned}$$

и начальное управление  $u^I(t) = 1$ , которому соответствует допустимый процесс  $x^{1I}(t) = \cos t - 1$ ,  $x^{2I}(t) = -\sin t$ .

Здесь  $h(t, x) = (x^2, -x^1)^T$ ,  $\eta(t, x^1, x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2$  – первый интеграл системы  $\frac{dx}{d\tau} = h(t, x)$ . Запишем производную задачу

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -2x^2, \quad y = (x^1)^2 + (x^2)^2, \quad t \in [0, 10], \\ x^1(0) &= 0, \quad x^2(0) = 0, \quad y(0) = 0, \\ -\sqrt{y} &\leq x^2 \leq \sqrt{y}, \\ \tilde{F}(y(10)) &= -\sqrt{y(10)} \rightarrow \min.\end{aligned}$$

Таким образом, исходная задача улучшения заменяется задачей улучшения элемента  $(x^{1I}(t), x^{2I}(t), y^I(t)) = (\cos t - 1, -\sin t, 4 \sin^2 \frac{t}{2})$  для производной задачи. Воспользуемся алгоритмом глобального улучшения управления, описанным выше, т.е. будем искать  $\tilde{\varphi}^0(t, y)$  как решение задачи Коши

$$\tilde{\varphi}_y(t, y) (-2x^{2I}(t)) + \tilde{\varphi}_t(t, y) = 0, \quad \tilde{\varphi}(10, y) = \sqrt{y}.$$

А именно,

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}^0(t, y) &= \sqrt{y - 2 \int_t^{10} x^{2I}(\xi) d\xi}, \\ \tilde{x}^2(t, y) &= \arg \max_{|x^2| \leq \sqrt{y^I(t)}} (\tilde{\varphi}_y^0(t, y) (-2x^2)) = -\sqrt{y^I(t)}.\end{aligned}$$

Решив замкнутую систему  $\dot{y} = 2\sqrt{y^I(t)}$ ,  $y(0) = 0$ , найдем улучшенный допустимый процесс производной задачи  $y^{II}(t) = 16 \sin^2 \frac{t}{4}$ ,  $x^{2II}(t) = -2 \sin \frac{t}{2}$  и соответствующий улучшенный допустимый процесс исходной задачи  $x^{1II}(t) = 4 \sin^2 \frac{t}{4}$ ,  $x^{2II}(t) = -2 \sin \frac{t}{2}$ ,  $u^{II}(t) = -\frac{1}{2}$ . Продолжая шаги алгоритма, получим последовательность допустимых процессов производной задачи

$$y_i(t) = 4^i \sin^2 \frac{t}{2^i}, \quad x_i^2(t) = -2^{i-1} \sin \frac{t}{2^{i-1}}$$

и соответствующую последовательность допустимых процессов исходной задачи

$$x_i^1(t) = 2^i \sin^2 \frac{t}{2^i}, \quad x_i^2(t) = -2^{i-1} \sin \frac{t}{2^{i-1}}, \quad u_i(t) = -\frac{1}{2^{i-1}}.$$

Нетрудно видеть, что полученная последовательность улучшенных процессов сходится к оптимальному процессу исходной задачи

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i^1(t) = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} x_i^2(t) = -t, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} u_i(t) = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} F(x_i(10)) = -10.$$

## 5. Заключение

Предложенные алгоритмы глобального улучшения управляемых процессов обладают рядом преимуществ перед активно развиваемыми в настоящее время методами локального улучшения. Предложенные соотношения метода (13), (14) для поиска разрешающей функции весьма удобны для программной реализации метода. При этом расчет по формулам (13)–(15) может производиться с использованием аппроксимации функции  $\varphi^0(t, x)$  при каждом фиксированном  $t$  (например, с помощью полиномов по методу наименьших квадратов), что даст возможность проводить анализ получаемой аппроксимации функции  $\varphi^0(t, x)$  в виде аналитических выражений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кротов В.Ф., Фельдман И.Н. Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1983. № 2. С. 160–168.
2. Krotov V.F. Global methods in optimal control theory. New York: Marcel Dekker, 1996.
3. Кротов В.Ф. Об оптимизации управления квантовыми системами // Докл. РАН. 2008. Т. 423. № 3. С. 316–319.
4. Кротов В.Ф. Управление квантовыми системами и некоторые идеи теории оптимального управления // АиТ. 2009. № 3. С. 15–23.
5. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
6. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, Физматлит, 1997.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии В.И. Гурманом.*

Поступила в редакцию 16.12.2010