



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. L. Popov, Structure of the closure of orbits in spaces of finite-dimensional linear $SL(2)$ representations, *Mat. Zametki*, 1974, Volume 16, Issue 6, 943–950

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

January 24, 2025, 00:05:43



СТРУКТУРА ЗАМЫКАНИЙ ОРБИТ В ПРОСТРАНСТВАХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SL(2)$

В. Л. Попов

В терминах некоторых целочисленных инвариантов описывается орбитальное разложение замыкания произвольной орбиты в пространстве конечномерного линейного представления группы $SL(2)$. Основное поле является алгебраически замкнутым и имеет нулевую характеристику. Библ. 9 назв.

Зафиксируем в качестве основного поля некоторое алгебраически замкнутое поле k характеристики нуль. Пусть $G = SL(2)$ и $G:V$ — конечномерное рациональное линейное представление группы G в векторном пространстве V .

В случае, когда указанное представление *неприводимо*, в заметке [1] была решена следующая задача:

1°. Описаны все такие точки $v \in V$, для которых орбита $G(v)$ незамкнута в V ;

2°. Для каждой такой точки указаны все орбиты в многообразии $\overline{G(v)}$ (чертой обозначается замыкание множества в пространстве V).

Здесь мы решаем эту задачу для *произвольного* представления.

Прежде чем переходить к формулировке основного результата, сделаем несколько напоминаний, а также введем необходимые обозначения; см. [1] — [3].

Неприводимые представления G классифицируются целыми неотрицательными числами (числовыми отметками). G -модуль S_n , отвечающий числовой отметке n , может быть получен так: пространством представления является векторное пространство бинарных форм степени n от

переменных x и y , а действие определено формулой (линейная замена переменных):

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i x^{n-i} y^i \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \sum_{i=0}^n \alpha_i (ax + cy)^{n-i} (bx + dy)^i. \quad (1)$$

Всякое конечномерное рациональное линейное представление $G: V$ вполне приводимо. Пусть

$$V = \bigoplus_{i=1}^r S_{n_i} \quad (2)$$

— разложение на неприводимые. В соответствии с (2) мы будем записывать точку $v \in V$ в виде

$$v = v_1 \oplus \dots \oplus v_r, \quad (3)$$

где $v_i \in S_{n_i} V_i$.

Ясно, что поставленную задачу достаточно решить для того случая, когда в V не содержится неподвижных ненулевых векторов. Поэтому мы будем считать, что

$$n_i \geq 1 \quad \forall i. \quad (4)$$

Условимся также считать подпространства S_{n_i} упорядоченным таким образом, что

$$n_i = 2k_i \quad \text{при } i \leq s \quad \text{и} \quad n_i = 2k_i + 1 \quad \text{при } i > s. \quad (5)$$

Нуль векторного пространства будем обозначать через $\{0\}$.

Кольцо $k[x, y]$ факториально и его однородные простые элементы — это линейные формы. Поэтому каждый элемент из S_n представляется в виде произведения n линейных форм от x и y . В соответствии с этим введем следующие обозначения:

M_i — максимум кратностей линейных множителей формы $v_i \neq 0$ (если $v_i = 0$, то положим по определению $M_i = n_i$);

$$h = \max_{i=1, \dots, r} \frac{n_i}{M_i};$$

γ — количество различных, попарно непропорциональных линейных форм $w \in k[x, y]$, обладающих следующим свойством: если v_i — любая ненулевая форма разложения

(3), то w является множителем кратности M_i формы v_i . Если $v = 0$, то положим по определению $\gamma = 0$.

Числа M_i , h и γ являются инвариантами орбиты $G(v)$ (т. е. не зависят от выбора точки v в этой орбите), поскольку G действует автоморфизмами на $k[x, y]$ по правилу (1).

Оказывается, что решение поставленной задачи может быть дано в терминах только двух построенных инвариантов h и γ . Отметим, что они подчиняются естественным ограничениям (вытекающим из определения)

$$0 \leq \gamma \leq \min n_i, \quad (6)$$

$$1 \leq h \leq \max n_i. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА. Орбита любого ненулевого вектора $v \in V$ двумерна или трехмерна и при этом:

1°. Орбита $G(v)$ будет двумерна и замкнута тогда и только тогда, когда $\gamma = 2$ и $h = 2$. В этом случае $G(v)$ обязательно содержит вектор вида $\alpha_1 x^{k_1} y^{k_1} \oplus \dots \oplus \alpha_s x^{k_s} y^{k_s} \oplus \{0\} \oplus \dots \oplus \{0\}$, где $\alpha_i \neq 0$ тогда и только тогда, когда $v_i \neq 0$.

2°. Орбита $G(v)$ будет двумерна и незамкнута тогда и только тогда, когда $\gamma = 1$ и $h = 1$. В этом случае в ее замыкании лежит, кроме $G(v)$, только нуль пространства V , а в $G(v)$ обязательно найдется вектор вида $\alpha_1 x^{n_1} \oplus \dots \oplus \alpha_r x^{n_r}$, где $\alpha_i \neq 0$ тогда и только тогда, когда $v_i \neq 0$.

3°. Орбита $G(v)$ будет трехмерна и незамкнута тогда и только тогда, когда $\gamma = 1$ и $1 < h \leq 2$. При этом возможны два случая:

а) если $\gamma = 1$ и $h = 2$, то в $\overline{G(v)}$, помимо самой $G(v)$, лежит еще некоторая замкнутая двумерная орбита $G(w)$, где $w = \alpha_1 x^{k_1} y^{k_1} \oplus \dots \oplus \alpha_s x^{k_s} y^{k_s} \oplus \{0\} \oplus \dots \oplus \{0\}$, а $\alpha_i = 0$ тогда и только тогда, когда $k_i = M_i$;

б) если $\gamma = 1$ и $1 < h < 2$, то в $\overline{G(v)}$, помимо самой $G(v)$, лежит еще нуль пространства V , а также некоторая незамкнутая двумерная орбита $G(w)$, где $w = \alpha_1 x^{n_1} \oplus \dots \oplus \alpha_r x^{n_r}$, а $\alpha_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{n_i}{M_i} < h$.

4°. Во всех остальных случаях $G(v)$ замкнута и трехмерна.

З а м е ч а н и е. Способ вычисления чисел α_j в пп. 1° — 3° по коэффициентам форм v_i будет указан в доказательстве теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Всякая двумерная алгебраическая подгруппа в $SL(2)$ является борелевской подгруппой и потому у $SL(2)$ нет одномерных аффинных однородных многообразий. Значит, всякая орбита G в V , кроме нуля, либо двумерна, либо трехмерна (см. (4)). Если такая орбита $G(v)$ незамкнута, то $\overline{G(v)} \setminus G(v)$ — это инвариантное замкнутое подмножество в V , [3].

1°. Пусть $\overline{G(v)} = G(v)$ и $\dim G(v) = 2$. Тогда $G(v)$ — аффинное многообразие, а потому G_v (стационарная подгруппа точки v) является одномерной редуктивной подгруппой в G (см. [4]) и, следовательно, G_v^0 (связная компонента единицы группы G_v) — это максимальный тор в G . Значит, в $G(v)$ найдется вектор нулевого веса относительно тора $T = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}; t \in k^* \right\}$, т. е. вектор вида

$\alpha_1 x^{k_1} y^{k_2} \oplus \dots \oplus \alpha_s x^{k_s} y^{k_s} \oplus \{0\} \oplus \dots \oplus \{0\}$, где $\alpha_i = 0$ тогда и только тогда, когда $v_i = 0$ (следует учесть, что при $i > s$ в S_{n_i} нет векторов нулевого веса, см. [2]). Значит, в этом случае $\gamma = h = 2$.

Наоборот, пусть $\gamma = h = 2$. Ясно, что $v \neq 0$. Так как $\gamma = 2$, то имеются две непропорциональные линейные формы w_1 и $w_2 \in k[x, y]$, обладающие следующим свойством: если v_i — любая ненулевая форма в разложении (3), то w_1 и w_2 являются множителями кратности M_i формы v_i . Осуществляя замену точки v на точку $g(v)$ для подходящего $g \in G$, можно считать, что $w_1 = x$ и $w_2 = y$, так что для любого i будет $v_i = x^{M_i} y^{M_i} u_i$, где u_i — некоторая форма из $k[x, y]$. Но $h = 2$, а потому при всех i будет $2M_i \geq n_i$. Это означает, что $u_i = \alpha_i \in k$ при всех i , причем $\alpha_i = 0$ тогда и только тогда, когда либо $i > s$, либо

$v_i = 0$. Значит, либо $G_v = T$, либо $G_v = N(T) = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}; t \in k^* \right\}$. Следовательно, G_v — редуктивная группа, $G(v)$ — аффинное многообразие [4] и $\dim G(v) = 2$. Но если бы $\overline{G(v)} \setminus G(v)$ было не пусто, оно, в силу аффинности $G(v)$, должно было бы быть инвариантной аффинной

кривой (см. [5]), а это бы означало, что в V содержатся ненулевые неподвижные векторы, что противоречит (4). Значит, $\overline{G(v)} = G(v)$.

2°. Пусть теперь $G(v)$ незамкнута и $\dim G(v) = 2$. То же рассуждение, что и в п. 1°, показывает, что $G(v)$ не может быть аффинным многообразием и что $\overline{G(v)} \setminus G(v)$ — это в точности нуль пространства V . Подгруппа G_v , стало быть, одномерна и нередуктивна [4]. Следовательно, G_v^0 — это максимальная унипотентная подгруппа в G ; заменяя v на $g(v)$ для подходящего $g \in G$, мы можем считать, что $G_v^0 = N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; t \in k \right\}$. Зафиксировав борелевскую подгруппу $B = TN$ и максимальный тор T , получим, что v — это сумма старших весовых векторов тора T , т. е. $v = \alpha_1 x^{n_1} \oplus \dots \oplus \alpha_r x^{n_r}$, где $\alpha_i \neq 0$ тогда и только тогда, когда $v_i \neq 0$. Значит, $\gamma = h = 1$.

Наоборот, пусть $\gamma = h = 1$. Ясно, что $v \neq 0$. Так как $\gamma = 1$, то существует линейная форма $w \in k[x, y]$, обладающая свойством: если v_i — любая ненулевая форма в разложении (3), то w является множителем кратности M_i формы v_i . Осуществляя замену v на $g(v)$ для подходящего $g \in G$, можно считать, что $w = x$ и $v_i = x^{M_i} u_i$, где $u_i \in k[x, y]$. Но $h = 1$ и потому $M_i \geq n_i$, откуда следует, что $u_i = \alpha_i \in k$ при всех i , где $\alpha_i \neq 0$ тогда и только тогда, когда $v_i \neq 0$. Значит, $G_v^0 = N$ и, следовательно, $\dim G(v) = 2$. Очевидно, орбита $T(v)$ тора T незамкнута и $\overline{T(v)} \setminus T(v)$ — это нуль пространства V . Следовательно, и $G(v)$ незамкнута.

3°. Пусть $\dim G(v) = 3$ и $G(v)$ незамкнута. Так как $\dim G_v = 0$, то G_v редуктивна, а потому $G(v)$ аффинна [4]. Значит, многообразие $\overline{G(v)} \setminus G(v)$ двумерно [5].

Как следует из [6], мы можем, заменив v на $g(v)$ для подходящего $g \in G$, считать, что $(\overline{G(v)} \setminus G(v)) \cap T(v) \neq \emptyset$. Значит, $\overline{T(v)} \neq T(v)$ и потому в разложении v по весовым векторам тора T присутствуют лишь веса одного знака [7]; мы можем считать, что эти веса неотрицательны, делая замену v на $g(v)$ для подходящего $g \in G$. Это означает, что всякий ненулевой v_i в разложении (3) имеет вид

$$v_i = \sum_{j=0}^{m_i} \alpha_{ij} x^{n_i-j} y^j, \quad \text{где } \alpha_{im_i} \neq 0 \quad (8)$$

и

$$m_i \leq \frac{n_i}{2}. \quad (9)$$

Но $n_i - m_i$ — это кратность множителя x формы v_i . Поскольку степень формы v_i равна n_i , а в силу (9), $n_i - m_i \geq \frac{n_i}{2}$, то $M_i = n_i - m_i$ и $1 < h \leq 2$. Что касается γ , то из оценки на h следует, что $1 \leq \gamma \leq 2$. Однако случай $\gamma = 2$ исключен, ибо из условия $\gamma = 2$, неравенства $M_i \geq \frac{n_i}{2}$ и определения γ и h вытекает, что $h = 2$, а это, как показано выше, противоречит трехмерности многообразия $G(v)$. Итак, $\gamma = 1$ и $1 < h \leq 2$.

Легко видеть, используя (9), что $\overline{T(v)} \setminus T(v) = u$, где

$$u = \alpha_1 x^{k_1} y^{k_1} \oplus \dots \oplus \alpha_s x^{k_s} y^{k_s} \oplus \{0\} \oplus \dots \oplus \{0\}, \quad (10)$$

причем $\alpha_i = 0$, если $m_i < k_i$, и $\alpha_i = \alpha_{im}$, если $m_i = k_i$. Следовательно, если $h = 2$, то $u \neq \{0\}$, а если $h < 2$, то $u = \{0\}$.

Таким образом, при $h = 2$ в многообразии $\overline{G(v)} \setminus G(v)$ содержится двумерная замкнутая (см. п. 1°) орбита $G(u)$. На самом деле $G(u) = \overline{G(v)} \setminus G(v)$. Действительно, если бы имелась точка $z \in \overline{G(v)} \setminus G(v)$, не лежащая в $G(u)$, то два замкнутых инвариантных множества $\overline{G(z)} \subset \overline{G(v)}$ и $G(u) \subset \overline{G(v)}$ не пересекались бы, а потому на $\overline{G(v)}$ нашлась бы регулярная инвариантная непостоянная функция, что, очевидно, невозможно (см. [8]).

Рассмотрим теперь случай, когда $1 < h < 2$. Пусть $\frac{p}{q} = \max_{i=1, \dots, r} \frac{m_j}{n_i} = 1 - \frac{1}{h}$, где p и q — целые положительные

числа. Рассмотрим в группе G кривую $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} t^p & t^{p-q} \\ 0 & t^{-p} \end{pmatrix}; \right.$

$t \in k^*$ }, а в $G(v)$ — кривую $\Gamma(v)$. Точка $u = \overline{\Gamma(v)} \setminus \Gamma(v)$

лежит в $\overline{G(v)}$; мы найдем ее разложение по каноническому базису в V . Если $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^p & t^{p-q} \\ 0 & t^{-p} \end{pmatrix}$, то легко видеть, что

$$\gamma(t)(v_i) = \sum_{j=0}^{m_i} \gamma_{ij}(t) x^{n_i-j} y^j, \text{ где } \gamma_{ij}(t) = \sum_{k=j}^{m_i} \alpha_{ik} \binom{k}{k-j} t^{p(n_i-2j)-q(k-j)}.$$

Учитывая, что $\frac{p}{q} \geq \frac{m_i}{n_i}$, а также что $p < \frac{q}{2}$ (см. (9)), получаем, что в сумме, определяющей $\gamma_{ij}(t)$, все слагаемые содержат t в неотрицательной степени, причем эта степень равна нулю тогда и только тогда, когда $\frac{m_i}{n_i} = \frac{p}{q}$ и $j = 0$. Отсюда вытекает, что

$$u = \alpha_1 x^{n_1} \oplus \dots \oplus \alpha_r x^{n_r}, \quad (11)$$

где $\alpha_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{m_i}{n_i} < \frac{p}{q}$ (т. е. $\frac{n_i}{M_i} < h$) и при $\frac{n_i}{M_i} = h$ будет $\alpha_i = \alpha_{im_i}$.

Как показано выше, $\dim G(u) = 2$, а $\overline{G(u)}$ является неприводимым алгебраическим многообразием, содержащим только две орбиты — нуль пространства V и орбиту $G(u)$. Это многообразие лежит в $\overline{G(v)} \setminus G(v)$, а $\overline{G(v)} \setminus G(v)$, как показано в [9], неприводимо. Поэтому

$$\overline{G(u)} = \overline{G(v)} \setminus G(v).$$

Наоборот, пусть теперь $h = 2$ и $\gamma = 1$. Так как $\gamma = 1$, то существует линейная форма $w \in k[x, y]$, обладающая свойством: если v_i — любая ненулевая форма в разложении (3), то w является множителем кратности M_i формы v_i . Осуществляя замену v на $g(v)$ для подходящего $g \in G$, можно считать, что $w = x$. Записывая $v_i \neq 0$ в виде (8) и учитывая, что $h = 2$, получаем, что $n_i - m_i \geq n_i/2$ (т. е. $m_i \leq n_i/2$), причем для некоторых i будет выполнено точное равенство $m_i = n_i/2$. Но тогда непосредственный подсчет показывает, что точка $u \in \overline{T(v)} \setminus T(v)$ имеет вид (10). Поскольку для $G(u)$ мы имеем $h = 2$ и $\gamma = 2$, то точка v не может лежать в $G(u)$, а потому $G(u) \subset \overline{G(v)} \setminus G(v)$. Но $\dim G(u) = 2$. Следовательно, $G(v)$ — незамкнутая трехмерная орбита.

Наконец, рассмотрим случай $1 < h < 2$ и $\gamma = 1$. Рассуждая, как и выше, получаем, что можно считать v удовлетворяющим соотношению (8), в котором $m_i < n_i/2$ при всех i . Но тогда, рассматривая, как и выше, кривую Γ , мы получаем, что в $\overline{G(v)}$ содержится точка u вида (11).

Поскольку для $G(u)$ будет $\gamma = 1$ и $h = 1$, то v не может лежать в $G(u)$ и, значит, $G(u) \subset \overline{G(v)} \setminus G(v)$. Но $\dim G(u) = 2$. Следовательно, $G(v)$ — незамкнутая трехмерная орбита. Теорема доказана.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило
26.III.1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Х а д ж и е в Дж., Описание замкнутых орбит и замыканий незамкнутых орбит в неприводимых представлениях группы Лоренца, Докл. АН СССР, № 12 (1966), 3—6.
- [2] Д ж е к о б с о н Н., Алгебры Ли, М., 1964.
- [3] Б о р е л ь А., Линейные алгебраические группы, М., 1972.
- [4] B i a l y n i c k i — B i r u l a A., On homogeneous affine spaces of linear algebraic groups, Amer. J. Math., 85 (1963), 572.
- [5] П о п о в В. Л., О стабильности действия алгебраических групп на алгебраических многообразиях, Изв. АН СССР, Сер. матем., 36, № 2 (1972), 374—385.
- [6] B i r k e s D., Orbits of linear algebraic groups, Ann. Math., 93, № 3 (1971), 459—475.
- [7] В и н б е р г Э. Б., П о п о в В. Л., Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий, Изв. АН СССР, Сер. матем., 36, № 2 (1972), 749—763.
- [8] N a g a t a M., Invariants of a group in an affine ring, J. Math. Kyoto Univ., 3 (1963, 1964), 369—377.
- [9] П о п о в В. Л., Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы $SL(2)$, Изв. АН СССР, Сер. матем., 37, № 5 (1973), 792—832.