2000. Т. 36, № 2. С. 241 — 250

УДК 517.977

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

А. З. Ишмухаметов

В настоящей работе исследуются сходимость и оценки скорости сходимости решений гиперболических уравнений второго порядка с малым параметром $b > 0$ при второй производной по времени к решению предельного уравнения параболического типа. Эти результаты применяются в задаче управляемости, перевода системы в заданное конечное состояние. Доказываются существование оптимальных управлений, сходимость и оценки скорости сходимости для оптимальных управлений и соответствующих им траекторий. Отметим, что исследование вопросов устойчивости параболического уравнения при эллиптической аппроксимации ($b < 0$) проводилось в [1 — 3], причем в [3, с. 368] для таких аппроксимаций доказывалась сходимость по функционалу и управлению. Вопросы сходимости по функционалу и управлению для конкретной линейно-квадратичной задачи оптимального управления системой, описываемой гиперболическим уравнением с малым параметром $b > 0$, изучались в работе [4], а вопросы управляемости гиперболических систем в дифференциально-операторном виде без малого параметра — в [5].

1. Постановка задач. Введем семейство гиперболических дифференциально-операторных уравнений с малым параметром $\beta_N > 0$, $N = 1, 2, \ldots$, $\beta_N \to 0$, $N \to \infty$:

$$L_N w \equiv \beta_N w_N'' + w_N' + A_N(t) w_N + B_N(t) w_N = u_N(t), \quad t_0 < t \le T, \tag{1}$$

$$w_N(t_0) = \varphi_N^0, \quad w_N'(t_0) = \varphi_N^1, \quad N = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Предельное уравнение параболического типа

$$Lw \equiv w' + A(t) w + B(t) w = u(t), \quad t_0 < t \le T, \quad w(t_0) = \varphi^0. \tag{3}$$

Функции $u(t)$, $u_N(t)$ и решения $w(t)$, $w_N(t)$, $N = 1, 2, \ldots$, принимают значения из гильбертова пространства W^0 со скалярным произведением и нормой $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$, $|\cdot|_0$ соответственно. Операторы $A(t)$, $A_N(t)$, $t \in [t_0, T]$, $N = 1, 2, \ldots$, самосопряженные в W^0 с не зависящей от t плотной областью определения $D(A)$ и таковы, что для $\forall t \in [t_0, T]$, $\forall v \in D(A)$ и $N = 1, 2, \ldots$ $\langle A(t)v, v \rangle_0 \ge C|v|_0^2$, $\langle A_N(t)v, v \rangle_0 \ge C|v|_0^2$, $C = \mathrm{const} > 0$; операторы $B(t)$, $B_N(t)$, $N = 1, 2, \ldots$, заданы на $D(A^{1/2})$ и удовлетворяют включениям $B(t)A^{-1/2}(t)$, $B_N(t)A_N^{-1/2}(t) \in \Lambda(W^0; W^0)$, $N = 1, 2, \ldots$ Здесь $\Lambda(X; Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов из пространства X в Y.

Пусть на областях определений $D(A)$, $D(A^{1/2})$ введены гильбертовы пространства W^2, W^1 со скалярными произведениями $\langle \varphi, g \rangle_2 = \langle A(t_0)\varphi, A(t_0)g \rangle_0$, $\langle \varphi, g \rangle_1 = \langle A^{1/2}(t_0)\varphi, A^{1/2}(t_0)g \rangle_0$ соответственно. Тогда из свойств положительных самосопряженных операторов (см., например, [6, 7]) следует, что для $\forall t \in [t_0, T]$ справедливы следующие включения: $A(t), A_N(t) \in \Lambda(W^2; W^0)$, $A^{-1}(t), A_N^{-1}(t) \in \Lambda(W^0; W^2)$, $A^{1/2}(t), A_N^{1/2}(t) \in \Lambda(W^1; W^0)$, $A^{-1/2}(t), A_N^{-1/2}(t) \in \Lambda(W^0; W^1)$, $B(t), B_N(t) \in \Lambda(W^1; W^0)$, $N = 1, 2, \ldots$ Как обычно, будем обозначать через W^{-1} пространство линейных непрерывных операторов над W^1, полученное пополнением W^0 в норме $|\cdot|_{-1} = \max\limits_{0 \ne v \in W^1} (\langle \cdot, v \rangle_0 |v|_1^{-1})$. Введем следующие обозначения: $\|K\|_{i,j} =$

$= \sup\limits_{0\neq v\in W^i} (|Kv|_j |v|_i^{-1})$, $K \in \Lambda(W^i; W^j)$, $i,j = -1,0,1,2$; $\|K\|_{[i,j]} = \max\limits_{t_0\le t\le T} \|K(t)\|_{i,j}$, где операторы $K(t) \in \Lambda(W^i; W^j)$, непрерывны по $t \in [t_0, T]$, $i,j = -1,0,1,2$; $|\varphi|_c = \max\limits_{t_0\le t\le T} |\varphi(t)|$, $\varphi \in C[t_0, T]$;

$$\langle \varphi, g\rangle_{\{2\}} = \int_{t_0}^{T} \varphi(t)g(t)\,dt, \quad \langle \varphi, g\rangle_{\{2\}s} = \int_{t_0}^{s} \varphi(t)g(t)\,dt, \quad \langle \varphi, g\rangle_{s\{2\}} = \int_{s}^{T} \varphi(t)g(t)\,dt, \quad \varphi, g \in L_2(t_0, T).$$

Для пространства непрерывных функций $\varphi \in C[t_0, T; W^i]$ со значениями $\varphi(t) \in W^i$ $\forall t \in [t_0, T]$ норма $|\varphi|_{[i]} = \max\limits_{t_0\le t\le T} |\varphi(t)|_i$, $i = -1,0,1,2$, а нормы для пространств $C[t_0, T; W^i, W^{i-1}] = \{\varphi \in C[t_0, T; W^i] : \varphi' \in C[t_0, t; W^{i-1}]\}$, $i = 0,1,2$, $C[t_0, T; W^2, W^1, W^0] = \{\varphi \in C[t_0, T; W^2] : \varphi^{(i)} \in C[t_0, T; W^{2-i}]$, $i = 1,2\}$ обозначим соответственно через $|\varphi|_{[i,i-1]} = |\varphi|_{[i]} + |\varphi'|_{[i-1]}$, $|\varphi|_{[2,1,0]} = |\varphi|_{[2]} + |\varphi'|_{[1]} + |\varphi''|_{[0]}$. Введем также скалярные произведения для пространств квадратично-интегрируемых функций $\varphi \in L_2(t_0, t; W^i)$ со значениями $\varphi(t) \in W^i$ $\overset{\circ}{\forall}\, t \in (t_0, T)$:

$$\langle \varphi, g\rangle_{(i)} = \int_{t_0}^{T} \langle \varphi(t), g(t)\rangle_i\,dt, \quad \langle \varphi, g\rangle_{(i)s} = \int_{t_0}^{s} \langle \varphi(t), g(t)\rangle_i\,dt,$$

$$\langle \varphi, g\rangle_{s(i)} = \int_{s}^{T} \langle \varphi(t), g(t)\rangle_i\,dt, \quad i = -1,0,1,2,$$

а для пространств $L_2(t_0, T; W^i, W^j) = \{\varphi \in L_2(t_0, T; W^i) : \varphi' \in L_2(t_0, t; W^j)\}$, $i,j = -1,0,1,2$, $L_2(t_0, T; W^2, W^1, W^0) = \{\varphi \in L_2(t_0, T; W^2) : \varphi^{(i)} \in L_2(t_0, t; W^{2-i})$, $i = 1,2\}$ соответственно $\langle \varphi, g\rangle_{(i,j)} = \langle \varphi, g\rangle_{(i)} + \langle \varphi', g'\rangle_{(j)}$; $\langle \varphi, g\rangle_{(2,1,0)} = \langle \varphi, g\rangle_{(2)} + \langle \varphi', g'\rangle_{(1)} + \langle \varphi'', g''\rangle_{(0)}$.

Функцию $w_N(t)$ будем называть сильно (слабо) обобщенным решением задачи (1), (2), если $w_N(t) \in C[t_0, T; W^1, W^0]$ ($w_N(t) \in C[t_0, T; W^0, W^{-1}]$). При непрерывной дифференцируемости на $[t_0, T]$ операторов $A_N(t)$, $B_N(t)$, $N = 1,2,\ldots$, и при условии $(\varphi_N^0, \varphi_N^1, u_N) \in W^1 \times W^0 \times L_2(t_0, T; W^0)$ ($(\varphi_N^0, \varphi_N^1, u_N) \in W^0 \times W^{-1} \times L_2(t_0, T; W^{-1})$) сильное (слабое) обобщенное решение $w_N(t)$, $N = 1,2,\ldots$, существует, единственно и выполняются оценки [8]

$$\begin{aligned} |w_N|_{[1,0]} &\le C_N(|u_N|_{(0)} + |\varphi_N^0|_1 + |\varphi_N^1|_0), \quad C_N = \text{const} > 0, \\ |w_N|_{[0,-1]} &\le C_N(|u_N|_{(-1)} + |\varphi_N^0|_0 + |\varphi_N^1|_{-1}), \quad C_N = \text{const} > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Если операторы $A_N(t)$, $B_N(t)$, $N = 1,2,\ldots$, дважды непрерывно дифференцируемы, то для всех $(\varphi_N^0, \varphi_N^1, u_N) \in W^2 \times W^1 \times L_2(t_0, T; W^1)$ существует единственное решение задачи (1), (2) $w_N(t) \in C[t_0, T; W^2, W^1, W^0]$ и справедливо неравенство (см., например, [9])

$$|w_N|_{[2,1,0]} \le C_N(|u_N|_{(1)} + |\varphi_N^0|_2 + |\varphi_N^1|_1), \quad C_N = \text{const} > 0. \tag{5}$$

Замечание 1. Отметим, что для слабых ($i = -1$) и сильных ($i = 0$) обобщенных решений w_N существуют $p_k \in C(t_0, T; W^2, W^1, W^0)$, $k = 1,2,\ldots$: $|L_N p_k - u_N|_{(i)} + |p_k(t_0) - \varphi_N^0|_{i+1} + |p_k'(t_0) - \varphi_N^1|_i \to 0$, $|p_k - w|_{[i+1,i]} \to 0$, $k \to \infty$, $i = -1,0$.

Для сопряженного к (1) уравнения

$$L_N^* w_N \equiv \beta_N w_N'' - w_N' + A_N(t)w_N + B_N^*(t)w_N = u_N(t), \quad t_0 \le t \le T, \tag{6}$$

$$w_N(T) = \varphi_N^0, \quad w_N'(T) = \varphi_N^1, \quad N = 1,2,\ldots, \tag{7}$$

справедливы аналогичные утверждения о разрешимости и оценки (4), (5).

В предельной задаче (3) при непрерывной дифференцируемости $A(t)$, $B(t)$ для $(\varphi^0, u) \in W^0 \times L_2(t_0, T; W^{-1})$ существует единственное решение $w \in L_2(t_0, T; W^1, W^{-1})$ и справедлива оценка (см., например, [3, с. 108])

$$|w|_{(1)} + |w|_{[0]} + |w'|_{(-1)} \le C(|u|_{(-1)} + |\varphi^0|_0), \quad C = \text{const} > 0. \tag{8}$$

В случае $(\varphi^0, u) \in W^1 \times L_2(t_0, T; W^0)$ решение $w \in L_2(t_0, T; W^2, W^0)$ и

$$|w|_{(2)} + |w|_{[1]} + |w'|_{(0)} \le C(|u|_{(0)} + |\varphi^0|_1), \quad C = \text{const} > 0, \tag{9}$$

Для сопряженного к (3) уравнения

$$L^* w = -w' + A(t)w + B^*(t)w = u(t), \quad t_0 \le t \le T, \quad w(T) = \varphi^0 \tag{10}$$

справедливы аналогичные утверждения о разрешимости и неравенства (8), (9).

2. Сходимость решений уравнений. Получим оценки устойчивости решений задач (1), (2). Для этого введем следующие условия.

Предположение 1. Операторы $A_N(t)$, $B_N(t)$, $N = 1, 2, \ldots$, непрерывно дифференцируемы на $[t_0, T]$ и выполнены условия: $|A_N^{1/2}(t)\varphi|_0 \ge C|\varphi|_1$, $\varphi \in D(A^{1/2})$ $\forall t \in [t_0, T]$, $N = 1, 2, \ldots$; $\sup\limits_N (\|A_N^{1/2}\|_{[1,0]} + \|(A_N^{1/2})'\|_{[1,0]} + \|B_N\|_{[1,0]}) < \infty$.

Предположение 2. Операторы $A_N(t)$, $B_N(t)$, $N = 1, 2, \ldots$, дважды непрерывно дифференцируемы на $[t_0, T]$ и имеют место соотношения $|A_N(t)\varphi|_0 \ge C|\varphi|_2$, $\varphi \in D(A^{1/2})$ $\forall t \in [t_0, T]$, $N = 1, 2, \ldots$; $\sup\limits_N (\|A_N\|_{[2,0]} + \|A_N'\|_{[2,0]} + \|B_N'\|_{[1,0]}) < \infty$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия предположения 1. Тогда для задач (1), (2) справедливы оценки: при* $(\varphi_N^0, \varphi_N^1, u_N) \in W^1 \times W^0 \times L_2(t_0, T; W^0)$ *для сильно обобщенных решений*

$$\beta_N |w_N'|^2_{[0]} + |w_N|^2_{[1]} + |w_N'|^2_{(0)} \le C(|u_N|^2_{(0)} + |\varphi_N^0|_1^2 + \beta_N |\varphi_N^1|_0^2), \tag{11}$$

$$|w_N|^2_{[0]} + |w_N|^2_{(1)} \le C(\beta_N |u_N|^2_{(0)} + |u_N|^2_{(-1)} + \beta_N |\varphi_N^0|_1^2 + |\varphi_N^0|_0^2 + \beta_N^2 |\varphi_N^1|_0^2) \tag{12}$$

и при $(\varphi_N^0, \varphi_N^1, u_N) \in W^0 \times W^{-1} \times L_2(t_0, T; W^{-1})$ *для слабо обобщенных решений*

$$|w_N|^2_{[0]} \le C(|u_N|^2_{(-1)} + |\varphi_N^0|_0^2 + \beta_N |\varphi_N^1|_{-1}^2). \tag{13}$$

При $(\varphi_N^0, \varphi_N^1, u_N) \in W^2 \times W \times L_2(t_0, T; W^0, W^0)$ *и дополнительно выполненном предположении 2 для решений задач (1), (2) справедливы оценки*

$$\beta_N |w_N'|^2_{[1]} + |w_N|^2_{[2]} + |w_N'|^2_{(1)} \le C(|u_N|^2_{(1)} + |\varphi_N^0|_2^2 + \beta_N |\varphi_N^1|_1^2), \tag{14}$$

$$|w_N|^2_{[1]} + |w_N|^2_{(2)} \le C(\beta_N |u_N|^2_{(1)} + |u_N|^2_{(0)} + \beta_N |\varphi_N^0|_2^2 + |\varphi_N^0|_1^2 + \beta_N^2 |\varphi_N^1|_1^2). \tag{15}$$

Здесь константы C не зависят от N и функций, входящих в неравенства.

Аналогичные неравенства справедливы и для решений сопряженных уравнений (6), (7).

Доказательство. Учитывая замечание 1, оценки (11) — (13) достаточно вывести для гладких решений задач (1), (2) $w_N \in C(t_0, T; W^2, W^1, W^0)$. Умножая уравнение (1) на w_N' и интегрируя по t от t_0 до некоторого $s \in (t_0, T]$, приходим к неравенствам

$$\beta_N |w_N'(s)|_0^2 + 2|w_N'|^2_{(0)_s} + |A_N^{1/2}(s) w_N(s)|_0^2 \le \varepsilon_1^{-1} |u_N|^2_{(0)} + \varepsilon_1 |w_N'|^2_{(0)_s} +$$

$$+ 2\|A_N^{1/2}\|_{[1,0]} \|(A_N^{1/2})'\|_{[1,0]} |w_N|^2_{(1)_s} + \varepsilon_2^{-1} \|B_N\|^2_{[1,0]} |w_N|^2_{(1)_s} + \varepsilon_2 |w_N'|^2_{(0)_s} + \beta_N |\varphi_N^1|_0^2 + |\varphi_N^0|_1^2.$$

Выбирая ε_1, ε_2 и применяя лемму Гронуолла (см., например, [10, с. 30]), приходим к неравенству (11).

Умножая уравнение (1) на w_N и интегрируя по t от t_0 до некоторого $s \in (t_0, T]$, приходим к неравенству

$$|w_N(s)|_0^2 + 2\langle A_N w_N, w_N \rangle_{(0)_s} \le \varepsilon_1^{-1} |u_N|^2_{(-1)} + \varepsilon_1 |w_N|^2_{(1)_s} + 2\beta_N |w_N'|^2_{(0)} + 2\beta_N^2 |w_N'|^2_{[0]} +$$

$$+ 0{,}5 |w(s)|_0^2 + 2\beta_N^2 |\varphi_N^1|_0^2 + 1{,}5 |\varphi_N^0|_0^2 + \varepsilon_2 \|B_N\|^2_{[1,0]} |w_N|^2_{(1)_s} + \varepsilon_2^{-1} |w_N|^2_{(0)_s}.$$

Оценивая снизу второе слагаемое в левой части, подбирая малые ε_1 и ε_2, перенося слагаемые с этими множителями, а также пятое слагаемое в левую часть, затем используя для третьего, четвертого слагаемых оценку (11) и применяя лемму Гронуолла, приходим к неравенству (12).

Для любых $s \in (t_0, T]$ умножая уравнение (1) на функцию p_N, являющуюся решением задачи (6), (7) при $T = s$, $\bar{u}_N(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, s]$, $p_N(s) = \bar{\varphi}_N^0 \equiv 0$, $p_N'(s) = \bar{\varphi}_N^1 = -\beta_N^{-1} w_N(s)$, интегрируя по t от t_0 до s и оценивая с помощью неравенств (11), (12), приходим к оценке $|w_N(s)|_0^2 \le \beta_N |\varphi_N^1|_{-1} |p_N(t_0)|_1 + \beta_N |\varphi_N^0|_0 |p_N'(t_0)|_0 + |\varphi_N^0|_0 |p_N(t_0)|_0 + |u_N|_{(-1)} |p_N|_{(1)}$. Неравенства (11), (12) верны и для решений p_N сопряженной задачи (6), (7). Поэтому, оценивая справа p_N в первом и во втором слагаемых с помощью неравенства (11), а в третьем и четвертом — неравенства (12), получаем, что $|w_N(s)|_0^2 \le C(\beta_N^{1/2} |\varphi_N^1|_{-1} + |\varphi_N^0|_0 + |u_N|_{(-1)}) |w_N(s)|_0$. Отсюда вытекает оценка (13).

Умножая уравнение (1) на $A_N w_N'$ и интегрируя по t от t_0 до некоторого $s \in (t_0, T]$, приходим к оценке

$$\beta_N |A_N^{1/2}(s) w_N'(s)|_0^2 - \beta_N |A_N^{1/2}(t_0) \varphi_N^1|_0^2 + 2 |A_N^{1/2} w_N'|_{(0)_s}^2 + |A_N(s) w_N(s)|_0^2 - |A_N(t_0) \varphi_N^0|_0^2 \le$$

$$\le \varepsilon_1^{-1} \|A_N^{1/2}\|_{[1,0]}^2 |u_N|_{(1)}^2 + \varepsilon_1 \|A_N^{1/2}\|_{[1,0]}^2 |w_N'|_{(1)_s}^2 + 2\beta_N \langle (A_N^{1/2})' w_N', A_N^{1/2} w_N' \rangle_{(0)_s} + 2\langle B_N' w_N, A_N w_N \rangle_{(0)_s} +$$
$$+ 2\langle B_N w_N', A_N w_N \rangle_{(0)_s} - 2\langle B_N(s) w_N(s), A_N(s) w_N(s) \rangle_0 + \langle B_N(t_0) \varphi_N^0, A_N(t_0) \varphi_N^0 \rangle_0 +$$
$$+ 2\langle B_N w_N, A_N' w_N \rangle_{(0)_s} + 2\langle A_N w_N, A_N' w_N \rangle_{(0)_s}.$$

Выбирая малое ε_1 и учитывая предположения 1, 2, находим, что

$$\beta_N |w_N'(s)|_1^2 + |w_N'|_{(1)_s}^2 + |w_N(s)|_2^2 \le C(|u_N|_{(1)}^2 + \beta_N |w_N'|_{(1)_s}^2 + \|B_N'\|_{[1,0]}^2 |w_N|_{(1)_s}^2 +$$

$$+ (1 + \varepsilon_2^{-1}) \|A_N\|_{[2,0]}^2 |w_N|_{(2)_s}^2 + \varepsilon_2 \|B_N\|_{[1,0]}^2 |w_N'|_{(1)_s}^2 + \varepsilon_3^{-1} \|B_N\|_{[1,0]}^2 |w_N(s)|_1^2 + \varepsilon_3 \|A_N\|_{[2,0]}^2 |w_N(s)|_2^2 +$$
$$+ |\varphi_N^0|_2^2 + \|B_N\|_{[1,0]}^2 |w_N|_{(1)_s}^2 + |w_N|_{(2)_s} + \beta_N |\varphi_N^1|_1^2).$$

Отсюда, выбирая ε_2, ε_3, используя оценку (11) справа для $|w_N(s)|_1^2$ и применяя лемму Гронуолла, приходим к неравенству (14).

Умножая уравнение (1) на $A_N w_N$, интегрируя по t от t_0 до произвольного $s \in (t_0, T]$ и используя условия предположений 1 и 2, получаем $|w_N(s)|_1^2 + |w_N|_{(2)_s}^2 \le C(\beta_N |w_N'|_{(1)}^2 + \beta_N |w_N|_{(2)}^2 +$ $+ \varepsilon_1^{-1} \beta_N^2 |w_N'(s)|_1^2 + \varepsilon_1 |w(s)|_1^2 + \beta_N^2 |\varphi_N^1|_1^2 + |\varphi_N^0|_1^2 + |w_N|_{(1)_s}^2 + \varepsilon_2^{-1} |u_N|_{(0)}^2 + \varepsilon_2 |w_N|_{(2)_s}^2)$. Выбирая ε_1, ε_2, используя оценку (14) для первых трех слагаемых справа и применяя лемму Гронуолла, приходим к оценке (15). Теорема 1 доказана.

Докажем утверждения о сходимости решений. Для этого введем

Предположение 3. При $N \to \infty$ значения $\omega_N = \|A_N^{1/2} - A^{1/2}\|_{[1,0]} + \|B_N - B\|_{[1,0]} \to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия предположений 1, 3 и в задачах (1), (2)* $(\varphi_N^0, \varphi_N^1, u_N) \in W^1 \times W^0 \times L_2(t_0, T; W^0)$, $N = 1, 2, \ldots$, *а в (3)* $(\varphi^0, u) \in W^1 \times L_2(t_0, T; W^0)$. *Тогда для решений задач (1), (2)* $w_N(t)$, $N = 1, 2, \ldots$, *и задачи (3)* $w(t)$ *имеет место оценка*

$$|w_N - w|_{[0]}^2 + |w_N - w|_{(1)}^2 \le C\{|u_N - u|_{(-1)}^2 + |\varphi_N^0 - \varphi^0|_0^2 + \beta_N^2 |\varphi_N^1|_0^2 +$$

$$+ \omega_N^2 (|u_N|_{(-1)}^2 + |\varphi_N^0|_0^2) + \beta_N (|u_N|_{(0)}^2 + |\varphi_N^0|_1^2 + |u|_{(0)}^2 + |\varphi^0|_1^2)\}. \qquad (16)$$

Если $\varphi_N^0 \to \varphi^0$ *слабо в* W^1; $u_N \to u$ *слабо в* $L_2(t_0, T; W^0)$ *при* $N \to \infty$; $\sup\limits_N \beta_N |\varphi_N^1|_0^2 < \infty$, *то* $w_N \to w$ *слабо в* $L_2(t_0, T; W^1, W^0)$, $N \to \infty$. *Если* $(\varphi_N^0, \varphi_N^1, u_N) \in W^0 \times W^{-1} \times L_2(t_0, T; W^{-1})$, $(\varphi^0, u) \in W^0 \times L_2(t_0, T; W^{-1})$: $|\varphi^0 - \varphi_N^0|_1 + |u - u_N|_{(0)} + \beta_N |\varphi_N^1|_{-1}^2 \to 0$, $N \to \infty$, *то* $|w_N - w|_{[0]} \to 0$, $N \to \infty$. *В случае* $(\varphi_N^0, \varphi_N^1, u_N) \in W^2 \times W^1 \times L_2(t_0, T; W^1)$ *и при выполнении дополнительно условий предположения 2 справедлива оценка*

$$|\beta_N w_N' + w_N - w|_{[0]}^2 + |w_N - w|_{(1)}^2 \le C\{|u_N - u|_{(0)}^2 + |\beta_N \varphi_N^1 + \varphi_N^0 - \varphi^0|_0^2 + \omega_N^2 (\beta_N |u_N|_{(0)}^2 + |u_N|_{(-1)}^2 +$$

$$+ \beta_N |\varphi_N^0|_1^2 + |\varphi_N^0|_0^2 + \beta_N^2 |\varphi_N^1|_0^2 + |u|_{(0)}^2 + |\varphi^0|_1^2) + \beta_N^2 (|u_N|_{(1)}^2 + |\varphi_N^0|_2^2 + \beta_N |\varphi_N^1|_1^2)\}. \qquad (17)$$

Аналогичные утверждения справедливы и для решений сопряженных уравнений (6), (7) и решений (10), причем в (17) первое слагаемое слева заменяется на $|-\beta_N w_N' + w_N - w|_{[0]}^2$, а второе слагаемое в правой части — на $|-\beta_N \varphi_N^1 + \varphi_N^0 - \varphi^0|_0^2$.

Доказательство. В силу замечания 1 неравенство (16) достаточно доказать для гладких решений (1), (2) $w_N \in C(t_0,T;W^2,W^1,W^0)$. Для этого умножим разность уравнений (1) и (3) на $w_N - w$ и проинтегрируем от t_0 до некоторого $s \in (t_0,T]$:

$$\beta_N\langle w_N'', w_N - w\rangle_{(0)_s} + 0{,}5|w_N(s) - w(s)|^2_{(0)_s} - 0{,}5|\varphi_N^0 - \varphi^0|_0^2 + \langle A_N w_N - Aw, w_N - w\rangle_{(0)_s} =$$

$$= \langle u_N - u, w_N - w\rangle_{(0)_s} - \langle B_N w_N - Bw, w_N - w\rangle_{(0)_s}.$$

Перенося первое слагаемое в правую часть, преобразуя и оценивая, приходим к следующим неравенствам:

$$|w_N(s) - w(s)|_0^2 + 2|A^{1/2}(w_N - w)|^2_{(0)_s} \le \varepsilon_1^{-1}|u_N - u|^2_{(-1)} + \varepsilon_1|w_N - w|^2_{(1)_s} + |\varphi_N^0 - \varphi^0|_0^2 + 2\beta_N|w_N'|^2_{(0)} -$$

$$- 2\beta_N\langle w_N', w'\rangle_{(0)_s} + \beta_N^2\varepsilon_2^{-1}|w_N'(s)|_0^2 + \varepsilon_2|w_N(s) - w(s)|_0^2 + 2\beta_N\langle\varphi_N^1, \varphi_N^0 - \varphi^0\rangle_0 + \varepsilon_3^{-1}|(A_N - A)w_N|^2_{(-1)} +$$

$$+ \varepsilon_3|w_N - w|^2_{(1)_s} + \varepsilon_4\|B\|^2_{[1,0]}|w_N - w|^2_{(1)_s} + \varepsilon_4^{-1}|w_N - w|^2_{(0)_s} + |(B_N - B)w_N|^2_{(0)} + |w_N - w|^2_{(0)_s}.$$

Подбирая малые значения для ε_i, $i = 1,\dots,4$, перенося соответствующие слагаемые влево, используя оценку $|(A_N(t) - A(t))w_N(t)|_{-1} \le \|A_N^{1/2} - A^{1/2}\|_{[1,0]}(\|A^{1/2}\|_{[1,0]} + \|A_N^{1/2}\|_{[1,0]})|w_N(t)|_1$, приходим к неравенству

$$|w_N(s) - w(s)|_0^2 + |w_N - w|^2_{(1)_s} \le C(|w_N - w|^2_{(0)_s} + |u_N - u|^2_{(-1)} + |\varphi_N^0 - \varphi^0|_0^2 + 3\beta_N|w_N'|^2_{(0)} + \beta_N|w'|^2_{(0)} +$$

$$+ \beta_N^2|w_N'|^2_{[0]} + 2\beta_N\langle\varphi_N^1, \varphi_N^0 - \varphi^0\rangle_0 + \|A_N^{1/2} - A^{1/2}\|^2_{[1,0]}|w_N|^2_{(1)} + \|B_N - B\|^2_{[1,0]}|w_N|^2_{(1)}).$$

Применяя оценку (9) к $|w'|^2_{(0)}$, (14) к $|w_N'|^2_{(0)}$, $|w_N'(s)|_0^2$ и (12) для $|w_N|^2_{(1)}$, а также лемму Гронуолла, приходим к (16).

Докажем слабую сходимость решений. Из неравенств (11) следует ограниченность решений w_N в норме $C[t_0,T;W^1,W^0]$ и существование слабо предельных элементов $w \in$ $\in L_2(t_0,T;W^1,W^0)$. Из тождества для сильно обобщенных решений при $N \to \infty$ $\langle A^{1/2}w, A^{1/2}p\rangle_{(0)} - \langle w, p'\rangle_{(0)} + \langle Bw - u, p\rangle_{(0)} = \langle\varphi^0, p(t_0)\rangle_0 - \langle w(T), p(T)\rangle_0$ $\forall p \in L_2(t_0,T;W^1,W^0)$. Здесь w удовлетворяет начальному условию в (3) и тождеству для решения параболического уравнения из $L_2(t_0,T;W^1,W^{-1})$. Поэтому в силу единственности решения этого уравнения предельная функция $w \in L_2(t_0,T;W^2,W^0)$ является решением задачи (3) для $(\varphi^0,u) \in W^1 \times$ $\times L_2(t_0,T;W^0)$ и $w_N \to w$ слабо в $L_2(t_0,T;W^1,W^0)$ при $N \to \infty$.

Докажем сильную сходимость решений. Пусть $u_k \in L_2(t_0,T;W^0)$, $\varphi_k^0 \in W^1$, $k = 1,2,\dots$: $|\varphi_k^0 - \varphi^0|_0 + |u_k - u|_{(-1)} \to 0$, $k \to \infty$. Тогда для (φ_k^0, u_k) решения задачи (3) $w_k \in L_2(t_0,T;W^2,W^0)$, а для $(\varphi_N^0, \varphi_N^1, u_N) = (\varphi_k^0, 0, u_k)$ решения задач (1), (2) $w_{N,k} \in C(t_0,T;W^1,W^0)$. К слагаемым в правой части неравенства $|w_N - w|_{[0]} \le |w_N - w_{N,k}|_{[0]} + |w_{N,k} - w_k|_{[0]} + |w_k - w|_{[0]}$ применим оценки (13), (16) и (8) соответственно. Тогда

$$|w_N - w|^2_{[0]} \le C\{|u_N - u_k|^2_{(-1)} + |\varphi_N^0 - \varphi_k^0|_0^2 + \beta_N|\varphi_N^1|^2_{-1} +$$

$$+ \omega_N^2(|u_k|^2_{(-1)} + |\varphi_k^0|_0^2) + \beta_N(|u_k|^2_{(0)} + |\varphi_k^0|_1^2) + |u_k - u|^2_{(-1)} + |\varphi_k^0 - \varphi^0|_0^2\}.$$

Используя неравенства $|u_N - u_k|_{(-1)} \le |u_N - u|_{(-1)} + |u - u_k|_{(-1)}$, $|\varphi_N^0 - \varphi_k^0|_0 \le |\varphi_N^0 - \varphi^0|_0 + |\varphi^0 - \varphi_k^0|_0$ и устремляя N к ∞, получаем $\lim\limits_{N\to\infty}|w_N - w|^2_{[0]} \le C(|u - u_k|^2_{(-1)} + |\varphi^0 - \varphi_k^0|_0^2)$. Отсюда при $k \to \infty$ следует сходимость $|w_N - w|_{[0]} \to 0$ при $N \to \infty$.

Умножим разность уравнений (1) и (3) на $\beta_N w_N' + w_N - w$, проинтегрируем от t_0 до некоторого $s \in (t_0,T]$, оценивая и преобразовывая слагаемые, приходим к оценке

$$|\beta_N w_N'(s) + w_N(s) - w(s)|_0^2 + |A_N^{1/2}(w_N - w)|^2_{(0)_s} \le C(|u_N - u|^2_{(0)} + |\beta_N\varphi_N^1 + \varphi_N^0 - \varphi^0|_0^2 + |(A_N - A)w|^2_{(-1)} +$$

$$+ \beta_N^2|w_N'|^2_{(1)} + \varepsilon_1|A_N^{1/2}(w_N - w)|^2_{(0)_s} + \varepsilon_1^{-1}\beta_N^2|w_N'|^2_{(1)} + \varepsilon_2^{-1}|(A_N - A)w_N|^2_{(-1)} + \varepsilon_2|w_N - w|^2_{(1)_s} +$$

$$+ |(B_N - B)w_N|^2_{(0)} + |\beta_N w_N' + w_N - w|^2_{(0)_s} + \varepsilon_3|B(w_N - w)|^2_{(0)_s} + \varepsilon_3^{-1}|\beta_N w_N' + w_N - w|^2_{(0)_s}).$$

Подбирая ε_1, ε_2, ε_3 и перенося слагаемые, содержащие эти множители влево, получаем

$$|\beta_N w_N'(s)+w_N(s)-w(s)|_0^2+|w_N-w|_{(1)_s}^2 \le C(|u_N-u|_{(0)}^2+|\beta_N\varphi_N^1+\varphi_N^0-\varphi^0|_0^2+\|A_N^{1/2}-A^{1/2}\|_{[1,0]}^2|w|_{(1)}^2+$$

$$+\beta_N^2|w_N'|_{(1)}^2+\|A_N^{1/2}-A^{1/2}\|_{[1,0]}^2|w_N|_{(1)}^2+\|B_N-B\|_{[1,0]}^2|w_N|_{(1)}^2+|\beta_N w_N'+w_N-w|_{(0)_s}^2).$$

Оценивая $|w|_{(1)}^2$ по (9), $|w_N|_{(1)}^2$ по (12) и $|w_N'|_{(1)}^2$ по (14), находим, что

$$|\beta_N w_N'(s)+w_N(s)-w(s)|_0^2+|w_N-w|_{(1)_s}^2 \le C\{|\beta_N\varphi_N^1+\varphi_N^0-\varphi^0|_0^2+|u_N-u|_{(0)}^2+|\beta_N w_N'+w_N-w|_{(0)_s}^2+$$

$$+\|A_N^{1/2}-A^{1/2}\|_{[1,0]}^2(|u|_{(0)}^2+|\varphi^0|_1^2)+(\|A_N^{1/2}-A^{1/2}\|_{[1,0]}^2+\|B_N-B\|_{[1,0]}^2)(\beta_N|u_N|_{(0)}^2+|u_N|_{(-1)}^2+$$

$$+\beta_N|\varphi_N^0|_1^2+|\varphi_N^0|_0^2+\beta_N^2|\varphi_N^1|_0^2)+\beta_N^2(|u_N|_{(1)}^2+|\varphi_N^0|_2^2+\beta_N|\varphi_N^1|_1^2)\}.$$

Применяя лемму Гронуолла, приходим к неравенству (17). Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть в задачах (1), (2) и (3)* $A_N(t)=A(t)$, $B_N(t)=B(t)$, $t\in[t_0,T]$, *выполняются условия предположения 1 и* $(\varphi_N^0,\varphi_N^1,u_N)=(\varphi^0,\varphi^1,u)\in W^0\times W^{-1}\times L_2(t_0,T;W^{-1})$, $N=1,2,\ldots$

Тогда для соответствующих решений $|w_N-w|_{[0]}\to 0$, $N\to\infty$. *При* $(\varphi_N^0,\varphi_N^1,u_N)=(\varphi^0,\varphi^1,u)\in W^1\times W^0\times L_2(t_0,T;W^0)$, $N=1,2,\ldots$,

$$|w_N-w|_{[0]}^2+|w_N-w|_{(1)}^2\le\beta_N C(|\varphi^0|_1^2+|\varphi^1|_0^2+|u|_{(0)}^2), \tag{18}$$

а при $(\varphi_N^0,\varphi_N^1,f_N)=(\varphi^0,\varphi^1,u)\in W^2\times W^1\times L_2(t_0,T;W^1)$, $N=1,2,\ldots$, *и выполнении условий предположения 2*

$$|\beta_N w_N'+w_N-w|_{[0]}^2+|w_N-w|_{(1)}^2\le\beta_N^2 C(|\varphi^0|_2^2+|\varphi^1|_1^2+|u|_{(1)}^2). \tag{19}$$

Сильная сходимость и оценки (18), (19) справедливы и для сопряженных уравнений (6), (7) и (10) (в (19) первое слагаемое слева заменяется на $|-\beta_N w_N'+w_N-w|_{[0]}^2$).

Оценка (17) может быть использована для решений (1) при

$$w_N(t_0)=\varphi_N^0,\quad \beta_N w_N'(t_0)=\varphi_N^1,\quad N=1,2,\ldots \tag{2'}$$

Следствие 2. *Пусть в (1), (2') и (3) выполняются предположения 1 — 3 и*

$$(\varphi_N^0,\varphi_N^1,u_N)\in W^2\times W^1\times L_2(t_0,T;W^1),\quad (\varphi^0,u)\in W^1\times L_2(t_0,T;W^0).$$

Тогда

$$|\beta_N w_N'+w_N-w|_{[0]}^2+|w_N-w|_{(1)}^2\le C\{|u_N-u|_{(0)}^2+|\varphi_N^1+\varphi_N^0-\varphi^0|_0^2+\beta_N|\varphi_N^1|_1^2+\omega_N^2(\beta_N|u_N|_{(0)}^2+|u_N|_{(-1)}^2+$$

$$+\beta_N|\varphi_N^0|_1^2+|\varphi_N^0|_0^2+|\varphi_N^1|_0^2+|u|_{(0)}^2+|\varphi^0|_1^2)+\beta_N^2(|u_N|_{(1)}^2+|\varphi_N^0|_2^2)\}. \tag{20}$$

В частности, при $(\varphi_N^0,\varphi_N^1,u_N)=(\bar\varphi^0,\bar\varphi^1,u)\in W^2\times W^1\times L_2(t_0,T;W^1)$, $A_N(t)=A(t)$, $B_N(t)=B(t)$ *и* $\varphi^0=\bar\varphi^1+\bar\varphi^0$ *она принимает вид*

$$|\beta_N w_N'+w_N-w|_{[0]}^2+|w_N-w|_{(1)}^2\le\beta_N C\{|\bar\varphi_N^1|_1^2+\beta_N(|\bar\varphi^0|_2^2+|u|_{(1)}^2)\}. \tag{21}$$

Аналогичные утверждения справедливы и для сопряженных уравнений (6) при $w(T)=\varphi_N^0$, $\beta_N w'(T)=\varphi_N^1$, $N=1,2,\ldots$, и (10), причем в (20), (21) первое слагаемое слева заменяется на $|-\beta_N w_N'+w_N-w|_{[0]}^2$, а второе слагаемое в правой части (20) — на $|-\varphi_N^1+\varphi_N^0-\varphi^0|_0^2$, а в (21) условие $\varphi^0=\bar\varphi^1+\bar\varphi^0$ — на $\varphi^0=-\bar\varphi^1+\bar\varphi^0$.

3. Сходимость решений обратных задач. Пусть i равно 0, 1 или 2. Рассмотрим задачи определения правой части $u_N(t)\in L_2(t_0,T;W^{i-1})$ уравнений

$$L_N^0 w\equiv\beta_N w_N''+w_N'+Aw_N+b_N(t)w_N=u_N(t),\quad t_0<t<T, \tag{22}$$

при условиях

$$w_N(t_0) = \varphi_N^0 \in W^i, \quad w_N'(t_0) = \varphi_N^1 \in W^{i-1}, \quad w_N(T) = y_N^0 \in W^i. \tag{23}$$

Для $i = 0$ или 1 предельная задача заключается в определении функции $u(t) \in L_2(t_0, T; W^{i-1})$ из условий

$$L^0 w \equiv w' + Aw + b(t)w = u(t), \quad t_0 < t < T, \tag{24}$$

$$w(t_0) = \varphi^0 \in W^i, \quad w(T) = y^0 \in W^i. \tag{25}$$

Уравнения (22) и (24) являются частными случаями уравнений (1) и (3) соответственно. Предположим, что скалярные функции $b(t)$, $b_N(t) \in C^2[t_0, T]$, и обозначим $\overline{w}_N = |b_N - b|_c$, $N = 1, 2, \ldots$

Пусть $z_k \in W^2$, $k = 1, 2, \ldots$, — ортонормированная в W^0 система собственных функций оператора A : $Az_k = \lambda_k z_k$, $0 < \lambda_k \le \lambda_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lambda_k \to \infty$, $k \to \infty$. Тогда $\lambda_k^{-1/2} z_k$, $k = 1, 2, \ldots$, ортонормирована в W^1, а $\lambda_k^{-1} z_k$, $k = 1, 2, \ldots$, — в W^2 (см., например, [11]). Введем функции $p_{N,k}$, $N = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$, являющиеся решениями сопряженных к (1) уравнений

$$\beta_N p_{N,k}'' - p_{N,k}' + A p_{N,k} + b_N(t) p_{N,k} = 0, \tag{26}$$

$p_{N,k}(T) = 0$, $p_{N,k}'(T) = -\beta_N^{-1} z_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $N = 1, 2, \ldots$, и функции p_k, $k = 1, 2, \ldots$, являющиеся решениями сопряженных к (3) уравнений

$$-p_k' + A p_k + b(t) p_k = 0, \quad p_k(T) = z_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{27}$$

Эти решения имеют вид $p_{N,k}(t) = q_{N,k}(t) z_k$, $p_k(t) = q_k(t) z_k$, где скалярные функции $q_{N,k}(t)$ и $q_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, $N = 1, 2, \ldots$, — решения соответственно уравнений $\beta_N q_{N,k}'' - q_{N,k}' + \lambda_k q_{N,k} + b_N(t) q_{N,k} = 0$, $q_{N,k}(T) = 0$, $q_{N,k}'(T) = -\beta_N^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $N = 1, 2, \ldots$; $-q_k' + \lambda_k q_k + b(t) q_k = 0$, $q(T) = 1$, $k = 1, 2, \ldots$ Для этих решений из (8) вытекает

$$|q_k|_c + \lambda_k^{1/2} |q_k|_{\{2\}} + \lambda_k^{-1/2} |q_k'|_{\{2\}} \le C, \tag{28}$$

а из (11), (12) и (17) соответственно следуют оценки

$$\beta_N |q_{N,k}'|_c^2 + \lambda_k |q_{N,k}|_c^2 + |q_{N,k}'|_{\{2\}}^2 \le C \beta_N^{-1}, \tag{29}$$

$$|q_{N,k}|_c^2 + \lambda_k |q_{N,k}|_{\{2\}} \le C, \tag{30}$$

$$|-\beta_N q_{N,k}' + q_{N,k} - q_k|_c^2 + \lambda_k |q_{N,k} - q_k|_{\{2\}}^2 \le \lambda_k C(\beta_N + \overline{w}_N^2). \tag{31}$$

Введем для задач (22), (23) проблемы моментов (см., например, [12])

$$\langle u_N, p_{N,k} \rangle_{(0)} = a_{N,k}, \quad u_N(t) \in L_2(t_0, T; W^{i-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{32}$$

$$a_{N,k} = \langle y_N^0, z_k \rangle_0 - \beta_N q_{N,k}(t_0) \langle \varphi_N^1, z_k \rangle_0 + \beta_N q_{N,k}'(t_0) \langle \varphi_N^0, z_k \rangle_0 -$$
$$- q_{N,k}(t_0) \langle \varphi_N^0, z_k \rangle_0, \quad \varphi_N^0, y_N^0 \in W^i, \quad \varphi_N^1 \in W^{i-1}, \quad i = 0, 1, 2. \tag{33}$$

Для предельной задачи (24), (25) проблема моментов имеет вид

$$\langle u, p_k \rangle_{(0)} = a_k, \quad u(t) \in L_2(t_0, T; W^{i-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

$$a_k = \langle y^0, z_k \rangle_0 - q_k(t_0) \langle \varphi^0, z_k \rangle_0, \quad \varphi^0, y^0 \in W^i, \quad i = 0, 1. \tag{35}$$

Лемма 1. *Задачи (22), (23) и (24), (25) эквивалентны задачам (32), (33) и (34), (35) соответственно.*

Доказательство нетрудно получить, например, следуя работе [12].

Лемма 2. *Для последовательностей $a_{N,k}$, a_k и функций $p_{N,k}(t)$, $p_k(t)$, $t \in [t_0, T]$, $k = 1, 2, \ldots$, $N = 1, 2, \ldots$, справедливы оценки*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N,k}^2 \lambda_k^i \le C(|y_N^0|_i^2 + |\varphi_N^0|_i^2 + \beta_N |\varphi_N^1|_{i-1}^2), \quad \varphi_N^0, y_N^0 \in W^i, \quad \varphi_N^1 \in W^{i-1}, \tag{36}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \lambda_k^i \le C(|y^0|_i^2 + |\varphi^0|_i^2), \quad \varphi^0, y^0 \in W^i, \quad i = 0,1,2, \tag{37}$$

$$|p_{N,k}|_{(0)}^2 = |q_{N,k}|_{\{2\}}^2 \ge C\lambda_k^{-1}, \quad |p_k|_{(0)}^2 = |q_k|_{\{2\}}^2 \ge C\lambda_k^{-1}, \tag{38}$$

где константы C не зависят от k и N.

Доказательство. Оценки (36), (37) вытекают непосредственно из определений (33), (35) и оценок (28) — (30). Для доказательства второго неравенства в (38) умножим (27) на $p_k(t)$ и проинтегрируем от произвольного $s \in [t_0, T)$ до T, получим $-|p_k(T)|_0^2 + |p_k(s)|_0^2 + 2\lambda_k |p_k|_{s(0)}^2 + 2\langle b p_k, p_k\rangle_{s(0)} = 0$. Отсюда $2(\lambda_k + |b|_c)|p_k|_{(0)}^2 + |p_k(s)|^2 \ge 1$. Обозначая $T_0 = T - t_0$ и интегрируя еще раз по s от t_0 до T, приходим к неравенству $[2T_0(\lambda_k + |b|_c) + 1]|p_k^2|_{(0)} \ge T_0$, откуда следует второе неравенство в (38).

Умножим (26) на $p'_{N,k}$ и проинтегрируем от $s \in [t_0, T)$ до T, имеем $\beta_N |p'_{N,k}(T)|_0^2 - \beta_N |p'_{N,k}(s)|_0^2 - 2|p'_{N,k}|_{s(0)}^2 + \lambda_k |p_{N,k}(T)|_0^2 - \lambda_k |p_{N,k}(s)|^2 + 2\langle b_N p_{N,k}, p'_{N,k}\rangle_{s(0)} = 0$. Отсюда, обозначая $\tilde{b} = \max\limits_N |b_N|_c$, получаем

$$1 \le \beta_N^2 |p'_{N,k}(s)|_0^2 + \beta_N(\tilde{b}^2 + 2)|p'_{N,k}|_{s(0)}^2 + \beta_N \lambda_k |p_{N,k}(s)|_0^2 + \beta_N |p_{N,k}|_{(0)}^2. \tag{39}$$

Умножим (26) на $p_{N,k}$ и проинтегрируем от некоторого $s \in [t_0, T)$ до T, имеем

$$-2\beta_N |p'_{N,k}|_{s(0)}^2 + 2\beta_N \langle p'_{N,k}(T), p_{N,k}(T)\rangle_0 - 2\beta_N \langle p'_{N,k}(s), p_{N,k}(s)\rangle_0 - |p_{N,k}(T)|_0^2 + |p_{N,k}(s)|_0^2 +$$

$$+ 2\lambda_k |p_{N,k}|_{s(0)}^2 + 2\langle b_N p_{N,k}, p_{N,k}\rangle_{s(0)} = 0,$$

откуда находим, что

$$\beta_N |p'_{N,k}|_{s(0)}^2 \le \lambda_k |p_{N,k}|_{(0)}^2 + 0{,}5|p_{N,k}(s)|_0^2 - \beta_N \langle p'_{N,k}(s), p_{N,k}(s)\rangle_0 + \tilde{b}|p_{N,k}|_{(0)}^2 \le$$

$$\le C_0 \lambda_k |p_{N,k}|_{(0)}^2 + 0{,}5|p_{N,k}(s)|_0^2 - \beta_N \langle p'_{N,k}(s), p_{N,k}(s)\rangle_0. \tag{40}$$

Оценивая с помощью этого неравенства второе слагаемое в (39) и интегрируя по s от некоторого $\tau \in [t_0, T)$ до T, получаем, что $T_0 \le \beta_N^2 |p'_{N,k}|_{\tau(0)}^2 + (\tilde{b}^2 + 2)(C_0 \lambda_k T_0 |p_{N,k}|_{(0)}^2 + 0{,}5|p_{N,k}|_{(0)}^2 - 0{,}5\beta_N |p_{N,k}(T)|_0^2 + 0{,}5\beta_N |p_{N,k}(\tau)|_0^2) + \lambda_k \beta_N |p_{N,k}|_{(0)}^2 + \beta_N T_0 |p_{N,k}|_{(0)}^2 \le C\{\beta_N^2 |p'_{N,k}|_{\tau(0)}^2 + \lambda_k |p_{N,k}|_{(0)}^2 + \beta_N |p_{N,k}(\tau)|_0^2\}$. Оценивая здесь первое слагаемое еще раз с помощью неравенства (40) и интегрируя по τ от t_0 до T, приходим к неравенству $T_0^2 \le C\{\beta_N (C\lambda_k T_0 |p_{N,k}|_{(0)}^2 + 0{,}5|p_{N,k}|_{(0)}^2 - 0{,}5\beta_N |p_{N,k}(T)|_0^2 + 0{,}5\beta_N |p_{N,k}(t_0)|_0^2) + \lambda_k |p_{N,k}|_{(0)}^2 + \beta_N |p_{N,k}|_{(0)}^2\} \le C\{\lambda_k |p_{N,k}|_{(0)}^2 + \beta_N^2 |p_{N,k}(t_0)|_0^2\}$. Здесь в силу (30) второе слагаемое мало. Поэтому отсюда следует справедливость первого неравенства в (38). Лемма 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть для $i = 0,1,2$ элементы $\varphi_N^0, y_N^0 \in W^i$, $\varphi_N^1 \in W^{i-1}$. Тогда решения задач (22), (23) существуют в виде следующих рядов:*

$$u_N^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{N,k} |p_{N,k}|_{(0)}^{-2} p_{N,k}(t) \in L_2(t_0, T; W^{i-1}). \tag{41}$$

Для $i = 0,1$ и $\varphi^0, y^0 \in W^i$ решения задач (24), (25) существуют в виде соответственно рядов

$$u^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k |p_k|_{(0)}^{-2} p_k(t) \in L_2(t_0, T; W^{i-1}). \tag{42}$$

Для этих решений справедливы оценки

$$|u_N^*|_{(i-1)} \le C(|y_N^0|_i + |\varphi_N^0|_i + \beta_N^{1/2} |\varphi_N^1|_{i-1}), \quad i = 0,1,2; \quad |u^*|_{(i-1)} \le C(|y^0|_i + |\varphi^0|_i), \quad i = 0,1. \tag{43}$$

Доказательство вытекает из (28), (29) и оценок (36) — (38).

Рассмотрим сходимость u_N^*, $N = 1,2,\ldots$, к u^*.

Теорема 4. *Пусть для $i = 0,1$ элементы $\varphi^0, y^0, \varphi_N^0, y_N^0 \in W^i$, $\varphi_N^1 \in W^{i-1}$ и $|\varphi_N^0 - \varphi^0|_i + |y_N^0 - y^0|_i + \beta_N |\varphi_N^1|_{i-1}^2 \to 0$ при $N \to \infty$.*

Тогда для решений (41) и (42) задач (22), (23) и (24), (25) имеет место сходимость $|u_N^* - u^*|_{(i-1)} \to 0$, $N \to \infty$. *При* $\varphi_N^0 \to \varphi^0$, $y_N^0 \to y^0$ *слабо в* W^i, $N \to \infty$, $\sup\limits_N \beta_N |\varphi_N^1|_{i-1}^2 < \infty$ *для* u_N^*, $N = 1, 2, \ldots$, *имеет место слабая сходимость в* $L_2(t_0, T; W^{i-1})$ *ко множеству решений* U^* *задач (24), (25). Если, более того,* $\varphi^0, y^0 \in W^{i+1}$, *то*

$$|u_N^* - u^*|_{(i-1)}^2 \le C\{|y_N^0 - y^0|_i^2 + |\varphi_N^0 - \varphi^0|_i^2 + \beta_N |\varphi_N^1|_{i-1}^2 + (\overline{w}_N^2 + \beta_N)(|y^0|_{i+1}^2 + |\varphi^0|_{i+1}^2)\}. \quad (44)$$

Для решений $w_N^*(t) = w_N(t; u_N^*)$, $N = 1, 2, \ldots$, *и* $w^*(t) = w(t; u^*)$ *при* $\varphi^0, y^0, \varphi_N^0, y_N^0 \in W^0$, $\varphi_N^1 \in W^{-1}$ *имеет место* $|w_N^* - w^*|_{[0]} \to 0$, $N \to \infty$; *при* $\varphi^0, y^0, \varphi_N^0, y_N^0 \in W^1$, $\varphi_N^1 \in W^0$ *справедливо неравенство*

$$|w_N^* - w^*|_{[0]}^2 + |w_N^* - w^*|_{(1)}^2 \le C\{|y_N^0 - y^0|_0^2 + |\varphi_N^0 - \varphi^0|_0^2 + \beta_N |\varphi_N^1|_{-1}^2 + \beta_N^2 |\varphi_N^1|_0^2 +$$

$$+ \overline{w}_N^2(|y^0|_1^2 + |\varphi^0|_1 + |y_N^0|_0^2 + |\varphi_N^0|_0^2) + \beta_N(|y^0|_1^2 + |\varphi^0|_1^2 + |y_N^0|_1^2 + |\varphi_N^0|_1^2)\}. \quad (45)$$

Доказательство. Выведем оценку (44), используя оценки (28) — (31), (36) — (38). Пусть i равно 0 или 1. Тогда

$$|u_N^* - u^*|_{(i-1)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N,k}|p_{N,k}|_{(0)}^{-2} p_{N,k} - a_k |p_k|_{(0)}^{-2} p_k|_{(i-1)}^2 \le$$

$$\le C\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (a_{N,k}|p_k|_{(0)}^2 - a_k |p_{N,k}|_{(0)}^2)^2 |p_{N,k}|_{(0)}^{-4} |p_k|_{(0)}^{-4} \lambda_k^{i-2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \lambda_k^2 (\beta_N + \overline{w}_N^2)\lambda_k^{i-1}\right\} \le$$

$$\le C\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (a_{N,k} - a_k)^2 \lambda_k^i + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 (\beta_N + \overline{w}_N^2)\lambda_k^{i+1} + (\beta_N + \overline{w}_N^2) \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \lambda_k^{i+1}\right\} \le$$

$$\le C\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (a_{N,k} - a_k)^2 \lambda_k^i + (\beta_N + \overline{w}_N^2) \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \lambda_k^{i+1}\right\} \le C\Big\{|y_N^0 - y^0|_i^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_N \langle \varphi_N^1, z_k\rangle_0^2 \lambda_k^{i-1} + \langle \varphi_N^1 - \varphi^0, z_k\rangle_0^2 \lambda_k^i + \langle \varphi^0, z_k\rangle_0^2 (\beta_N + \overline{w}_N^2)\lambda_k^{i+1}) + (\beta_N + \overline{w}_N^2)(|y^0|_{i+1}^2 + |\varphi^0|_{i+1}^2)\Big\} \le$$

$$\le C\{|y_N^0 - y^0|_i^2 + \beta_N |\varphi_N^1|_{i-1}^2 + |\varphi_N^0 - \varphi^0|_i^2 + (\beta_N + \overline{w}_N^2)(|y^0|_{i+1}^2 + |\varphi^0|_{i+1}^2)\}.$$

Докажем сходимость. Пусть $u^*, u_N^* \in L_2(t_0, T; W^{i-1})$ — решения для $\varphi^0, y^0, \varphi_N^0, y_N^0 \in W^i$, $\varphi_N^1 \in W^{i-1}$ и $|\varphi_N^0 - \varphi^0|_i + |y_N^0 - y^0|_i + \beta_N |\varphi_N^1|_{i-1}^2 \to 0$, $N \to \infty$. Возьмем $\varphi_k^0, y_k^0 \in W^{i+1}$ такие, что $|\varphi_k^0 - \varphi^0|_i + |y_k^0 - y^0|_i \to 0$ при $k \to \infty$. В этом случае соответствующие решения задачи (34), (35) в виде (42) $u_k^* \in L_2(t_0, T; W^{i-1})$, а для элементов $\varphi_k^0, y_k^0, \varphi_N^1 = 0$ решения задачи (32), (33) в виде (41) $u_{N,k}^* \in L_2(t_0, T; W^{i-1})$. Тогда из (43), (44) имеем

$$|u_N^* - u^*|_{(i-1)} \le |u_N^* - u_{N,k}^*|_{i-1} + |u_{N,k}^* - u_k^*|_{(i-1)} + |u_k^* - u^*|_{(i-1)} \le$$

$$\le C\{|y_N^0 - y_k^0|_i + |\varphi_N^0 - \varphi_k^0|_i + \beta_N^{1/2} |\varphi_N^1|_{i-1} + (\omega_N^2 + \beta_N)(|y_k^0|_{(i+1)}^2 + |\varphi_k^0|_{(i+1)}^2) + |y_k^0 - y^0|_i + |\varphi_k^0 - \varphi^0|_i\}.$$

Используя неравенство $|y_N^0 - y_k^0|_i + |\varphi_N^0 - \varphi_k^0|_i \le |y_N^0 - y^0|_i + |y^0 - y_k^0|_i + |\varphi_N^0 - \varphi^0|_i + |\varphi^0 - \varphi_k^0|_i$, при $N \to \infty$ получаем $\lim\limits_{N\to\infty} |u_N^* - u^*|_{(i-1)} \le C\{|y_k^0 - y^0|_i + |\varphi_k^0 - \varphi^0|_i\}$. Отсюда при $k \to \infty$ вытекает сходимость.

Утверждение о слабой сходимости получается предельным переходом в равенствах (32) — (35).

При $\varphi^0, y^0, \varphi_N^0, y_N^0 \in W^0$, $\varphi_N^1 \in W^{-1}$ из $|u_N^* - u^*|_{(-1)} \to 0$, $N \to \infty$, в силу утверждения теоремы 2 следует сходимость $|w_N^* - w^*|_{[0]} \to 0$, $N \to \infty$. При $\varphi^0, y^0, \varphi_N^0, y_N^0 \in W^1$, $\varphi_N^1 \in W^0$, оценивая в неравенстве (16) теоремы 2 слагаемое $|u_N^* - u^*|_{(-1)}$ по доказанному неравенству (44) при $i = 0$ и используя (43), получаем неравенство (45). Теорема 4 доказана.

Следствие 3. *Пусть* $i = 0$ *или* 1, *функции* $b_N(t) = b(t)$, $t \in [t_0, T]$, *элементы* $\varphi_N^0 = \varphi^0 \in W^{i+1}$, $y_N^0 = y^0 \in W^{i+1}$, $\varphi_N^1 = \varphi^1 \in W^{i-1}$, $N = 1, 2, \ldots$ *Тогда для решений (41) и (42) задач (22), (23) и (24), (25) справедливы неравенства* $|u_N^* - u^*|_{(i-1)}^2 \le \beta_N C\{|\varphi^1|_{i-1}^2 +$

$+|y^0|^2_{i+1} + |\varphi^0|^2_{i+1}\}$, *а для соответствующих решений* $w^*_N(t) = w_N(t; u^*_N)$, $N = 1, 2, \ldots$, *и* $w^*(t) = w(t; u^*)$ *при* φ^0, $y^0 \in W^1$, $\varphi^1 \in W^0$ *неравенства* $|w^*_N - w^*|^2_{[0]} + |w^*_N - w^*|^2_{(1)} \leq \leq \beta_N C\{|\varphi^1|^2_{-1} + |y^0|^2_1 + |\varphi^0|^2_1 + \beta_N|\varphi^1|^2_0\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 97 — 01 — 00214).

Литература

1. *Олейник О. А.* // Мат. сб. 1966. Т. 69. С. 111 — 140.
2. *Lions J.-L.* Equations differentielles operationnielles dans les espaces de Hilbert. Cebtro Int. Mat. Estivo. Varenna, 1963. (Equazioni differenzialiastratte. Cremonese. Roma, 1963).
3. *Лионс Ж. Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., 1972.
4. *Егоров А. И., Михайлова Т. Ф.* // Докл. АН УССР. Сер. А. 1986. № 3. С. 74 — 77.
5. *Ишмухаметов А. З.* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 4. С. 597 — 604.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
7. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М., 1967.
8. *Ломовцев Ф. Е., Юрчук Н. И.* // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 12. С. 2242 — 2250.
9. *Ишмухаметов А. З.* // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 3. С. 493 — 499.
10. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М., 1981.
11. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М., 1979.
12. *Васильев Ф. П., Ишмухаметов А. З., Потапов М. М.* Обобщенная проблема моментов в задачах оптимального управления. М., 1989.

Вычислительный центр Российской академии наук, г. Москва

Поступила в редакцию 10 ноября 1997 г.