M. I. Belishev, The conservative model of a dissipative dynamical system, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1995, Volume 230, 21–35

М. И. Белишев

# КОНСЕРВАТИВНАЯ МОДЕЛЬ ДИССИПАТИВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

**0. Введение.** Развивается подход к обратным задачам, основанный на их связях с теорией граничного управления (т.н. $BC$-метод, см. [1–6]). В рамках подхода устанавливается, что диссипативные динамические системы (ДС) можно моделировать консервативными.

Мы говорим, что консервативная ДС является моделью диссипативной ДС, если передаточные операторы этих систем совпадают. Последнее означает, что диссипативная ДС и ее модель неразличимы с точки зрения "внешнего наблюдателя", изучающего системы по их отклику на внешнее воздействие.

В ходе построения модели, по передаточному оператору восстанавливается потенциал, определяющий консервативную ДС. Для решения этой хорошо известной задачи мы предлагаем новую процедуру, основанную на операторном интеграле М. С. Бродского [7, 8] (см. также [5]).

Работа выполнена в рамках проекта No. 1414 Королевской Академии Наук Швеции (KVA) и поддержана грантом РФФИ (93-011-16148).

## Консервативная ДС

**1. Начально-краевая задача.** Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + qu = 0 \quad x > 0, \quad 0 < t < T & (1) \\ u\big|_{t=0} = \partial_t u\big|_{t=0} = 0 & (2) \\ u\big|_{x=0} = f(t) \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant T & (3) \end{cases}$$

в которой $q = q(x)$ есть вещественная функция (потенциал) класса $C^\infty_{\text{loc}}[0,\infty)$; $f = f(t)$ - управление (вход), $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Пусть $u = u^f(x,t)$ есть решение, которое обладает следующими известными свойствами:

(i) при $f \in C^2[0,T]$, $f(0) = f'(0) = 0$ решение $u^f$ удовлетворяет (1)–(3) в классическом смысле.

Справедливо представление

$$u^f(x,t) = f(t-x) + \int\limits_x^t w(x,s)f(t-s)ds \quad x,t \geqslant 0, \tag{4}$$

в котором ядро $w(x,s)$ является гладкой функцией, определенной при $0 \leqslant x \leqslant s$;

(ii) в случае сингулярного управления $f = \delta(t)$ выполнено соотношение

$$2\frac{d}{d\xi}[u^\delta(\xi-0,\xi)] = 2\frac{d}{d\xi}w(\xi,\xi) = q(\xi) \quad 0 < \xi \leqslant T; \tag{5}$$

(iii) при каждом $t = \xi \in (0,T]$ верно включение

$$\operatorname{supp} u^f(\cdot,\xi) \subset \bar{\Omega}^\xi, \tag{6}$$

где $\Omega^\xi := (0,\xi)$ есть интервал на полуоси $x \geqslant 0$.

**2. Оператор управления.** Пространство управлений $\mathcal{F}^T := L_2(0,T)$ назовем внешним пространством ДС (1)–(3).

Пространство $\mathcal{H}^T := L_2(\Omega^T)$ называется внутренним. Решения (состояния) $u^f(\cdot,t)$ суть его элементы при каждом $t \in [0,T]$.

Оператор управления $W^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{H}^T$,

$$W^T f := u^f(\cdot,T)$$

реализует соответствие "вход-состояние" в нашей ДС. Согласно (4) он допускает представление в виде

$$(W^T f)(x) = f(T-x) + \int\limits_x^T w(x,s)f(T-s)ds \quad x \in \Omega^T. \tag{7}$$

Пусть $\mathcal{I}^T_{T-\xi} : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$ есть оператор запаздывания,

$$(\mathcal{I}^T_{T-\xi}f)(t) := \begin{cases} 0 & 0 < t < T-\xi \\ f(t-(T-\xi)) & T-\xi \leqslant t < T \end{cases}$$

($0 < \xi < T$; $\mathcal{I}^T_T := \mathbb{O}_{\mathcal{F}^T}$, $\mathcal{I}^T_0 := \mathbb{I}_{\mathcal{F}^T}$. Вследствие независимости потенциала от времени выполнено соотношение

$$W^T \mathcal{I}^T_{T-\xi} f = u^f(\cdot,\xi) \quad (0 \leqslant \xi \leqslant T). \tag{8}$$

Введем семейства подпространств:

$$\mathcal{F}^{T,\xi} := \mathcal{I}^T_{T-\xi}\mathcal{F}^T = \{f \in \mathcal{F}^T | f(t) = 0 \quad 0 < t < T-\xi\} \subset \mathcal{F}^T$$

и

$$\mathcal{H}^\xi := \{a \in \mathcal{H}^T | \operatorname{supp} a \subset \bar{\Omega}^\xi\} \subset \mathcal{H}^T.$$

Следующее предложение легко следует из (7).

**Лемма 1.** *При любом $T > 0$ оператор управления $W^T$ действует изоморфно из $\mathcal{F}^T$ на $\mathcal{H}^T$. При этом справедливы равенства*

$$W^T \mathcal{F}^{T,\xi} = \mathcal{H}^\xi \quad (0 \leqslant \xi \leqslant T). \tag{9}$$

Соотношение (5) можно записать в виде

$$2\frac{d}{d\xi}\{(W^T \mathcal{I}^T_{T-\xi}\delta)(\xi - 0)\} = q(\xi) \quad \xi \in \Omega^T. \tag{10}$$

**3. Передаточный оператор.** Соответствие “вход-выход” в ДС (1)–(3) описывается передаточным оператором $R^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, $\operatorname{Dom} R^T = \{f \in H^1[0,T] | f(0) = 0\}$,

$$(R^T f)(t) := \partial_x u^f(0,t) + \alpha f(t) \quad 0 < t < T,$$

где $\alpha$ – фиксированная постоянная. Подчеркивая зависимость передаточного оператора от потенциала и постоянной, мы будем также использовать обозначение $R^T_{q,\alpha}$.

Формула (4) ведет к представлению

$$(R^T f)(t) = -f'(t) + \alpha f(t) + \int_0^t r(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad 0 < t < T \tag{11}$$

с функцией $r(t)$, гладкой при $t > 0$.

**4. Оператор $L^T_q$.** Эволюция динамической системы (1)–(3) определяется оператором Штурма–Лиувилля $L^T_q : \mathcal{H}^T \to \mathcal{H}^T$, $\operatorname{Dom} L^T_q = \{u \in H^2(\bar{\Omega}^T) | u\big|_{x=T} = u'\big|_{x=T} = 0\}$,

$$(L^T_q u)(x) := -u''(x) + q(x)u(x) \quad x \in \Omega^T.$$

Система (1)–(3) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + L^T_q u = 0 & (x,t) \in \Omega^T \times (0,T) \\ u\big|_{t=0} = \partial_t u\big|_{t=0} = 0 \\ u\big|_{x=0} = f. \end{cases}$$

**5. Связывающий оператор.** Оператор $C^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$,

$$C^T := (W^T)^* W^T, \tag{12}$$

определяемый соотношением

$$(C^T f, g)_{\mathcal{F}^T} = (W^T f, W^T g)_{\mathcal{H}^T} = (u^f(\cdot,T), u^g(\cdot,T))_{\mathcal{H}^T} \quad f,g \in \mathcal{F}^T \tag{13}$$

связывает метрики внешнего и внутреннего пространств нашей ДС. Его роль в BC-методе выделена в силу того, что $C^T$ явно выражается через передаточный оператор [2–4]. Для формулировки результата введем оператор нечетного продолжения $S^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^{2T}$,

$$(S^T f)(t) := \begin{cases} f(t) & 0 < t < T \\ -f(2T - t) & T \leqslant t < 2T \end{cases}$$

и оператор интегрирования $Y^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^{2T}$,

$$(Y^{2T} f)(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

**Теорема 1.** *При каждом $T > 0$ оператор $C^T$ положительно определен в $\mathcal{F}^T$ и допускает представление*

$$C^T = -\frac{1}{2}(S^T)^* R^{2T} Y^{2T} S^T. \tag{14}$$

**Доказательство.** Определение (12) вместе с Леммой 1 и представлением (7) приводят к соотношению

$$(C^T f, f)_{\mathcal{F}^T} \geqslant \varkappa \|f\|^2_{\mathcal{F}^T}$$

с $\varkappa = \mathrm{const} > 0$. Вывод равенства (14) имеется в [2–4].

Представление (7) позволяет преобразовать (14) к виду

$$(C^T f)(t) = f(t) + \int_0^T C^T(t, \tau) f(\tau) d\tau \quad 0 < t < T$$

с симметрическим ядром

$$C^T(t, \tau) := \frac{1}{2} \int_{|t-\tau|}^{2T-t-\tau} r(y) dy.$$

## Восстановление консервативной ДС по ее передаточному оператору

**Обратная задача.** В силу гиперболичности задачи (1)–(3), при каждом $T > 0$ передаточный оператор $R^{2T}_{q,\alpha}$ вполне определяется значениями потенциала $q\big|_{\Omega^T}$ и не зависит от поведения $q$ вне $\Omega^T$. Это обстоятельство мотивирует следующую постановку обратной задачи: по заданному $R^{2T}_{q,\alpha}$ восстановить потенциал $q$ в $\Omega^T$.

Разделы 7–10 посвящены процедуре решения обратной задачи.

**7. Операторный интеграл.** Введем операторы:
унитарный оператор $I^T : \mathcal{H} \to \mathcal{F}^T$,

$$(I^T a)(t) := a(T-t) \quad 0 < t < T$$

и его сопряженный $(I^T)^* = (I^T)^{-1} : \mathcal{F}^T \to \mathcal{H}^T$,

$$((I^T)^* f)(x) = f(T-x) \quad x \in \Omega^T;$$

проектор $X^\xi$ в $\mathcal{F}^T$ на подпространство $\mathcal{F}^{T,\xi}$ (см. 2),

$$(X^\xi f)(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < T-\xi \\ f(t) & t-\xi \leqslant t < T \end{cases} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant T);$$

проектор $P^\xi$ в $\mathcal{H}^T$ на подпространство $\mathcal{H}^\xi$ (см. 2),

$$(P^\xi a)(x) = \begin{cases} a(x) & x \in \Omega^\xi \\ 0 & x \in \Omega^T \setminus \bar{\Omega}^\xi \end{cases} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant T).$$

Пусть $\Xi = \{\xi_i\}_{i=1}^N$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_N = T$ есть разбиение временного интервала $[0,T]$, имеющее ранг

$$\mu(\Xi) := \max_{i=1,\ldots,N}(\xi_i - \xi_{i-1}).$$

Рассмотрим операторную сумму $S_\Xi : \mathcal{F}^T \to \mathcal{H}^T$,

$$S_\Xi := \sum_{i=1}^N \Delta_i P^\xi W^T \Delta_i X^\xi,$$

где $\Delta_i P^\xi := P^{\xi_i} - P^{\xi_{i-1}}$, $\Delta_i X^\xi := X^{\xi_i} - X^{\xi_{i-1}}$. Справедлива

**Теорема 2.** *По любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) = 0$ такое, что неравенство*

$$\|(I^T)^* - S_\Xi\| < \varepsilon \tag{15}$$

*выполнено для произвольного разбиения $\Xi$, имеющего ранг $\mu(\Xi) < \delta$.*

**Набросок доказательства.** Как можно видеть из (7), каждый член суммы имеет вид

$$(\Delta_i P^\xi W^T \Delta_i X^\xi f)(x) = \begin{cases} f(T-x) + y_i^f(x) & x \in \Delta_i \Omega^\xi \\ 0 & \text{при других} \quad x \in \Omega^T, \end{cases} \tag{16}$$

где $\Delta_i \Omega^\xi := [\xi_{i-1}, \xi_i)$ и функция $y_i^f$ удовлетворяет оценке

$$\|y_i^f\|^2_{L_2(\Delta_i \Omega^\xi)} = o(\xi_i - \xi_{i-1}).$$

Суммируя слагаемые (16) и учитывая последнюю оценку, нетрудно получить (15).

Таким образом, суммы сходятся (по операторной норме) к пределу

$$\lim_{\mu(\Xi)\to 0} S_\Xi =: \int_0^T dP^\xi W^T dX^\xi = (I^T)^*.$$

**Следствие.** *Справедливо представление*

$$I^T = \int_0^T dX^\xi (W^T)^* dP^\xi. \tag{17}$$

**8. Пространство $\Phi^T$.** Во внешнем пространстве $\mathcal{F}^T$ можно ввести новое скалярное произведение

$$(f,g)_{\Phi^T} := (C^T g, g)_{\mathcal{F}^T}, \tag{18}$$

которое корректно определено в силу положительной определенности оператора $C^T$. Оно превращает $\mathcal{F}^T$ в гильбертово пространство, обозначаемое через $\Phi^T$.

Вместе с (13), лемма 1 приводит к соотношениям

$$(f,g)_{\Phi^T} = (W^T f, W^T g)_{\mathcal{H}^T}; \quad W^T \Phi^T = \mathcal{H}^T. \tag{19}$$

Они показывают, что оператор управления, расматриваемый как оператор из $\Phi^T$ в $\mathcal{H}^T$ является унитарным.

Пусть $\Phi^\xi$ есть линеал $\mathcal{F}^{T,\xi}$ (см. 2), рассматриваемый, как подпространство в $\Phi^T$, а $\mathcal{P}^\xi$ есть ортогональный (в смысле метрики (18)) проектор в $\Phi^T$ на $\Phi^\xi$. Ввиду (9) и унитарности $W^T : \Phi^T \to \mathcal{H}^T$ имеем соотношения

$$W^T \Phi^\xi = \mathcal{H}^\xi; \quad W^T \mathcal{P}^\xi = P^\xi W^T \quad (0 \leqslant \xi \leqslant T). \tag{20}$$

Важный факт состоит в том, что проекторы $\mathcal{P}^\xi$ можно выразить через связывающий оператор. Для формулировки результата введем оператор редукции $\tilde{X}^\xi : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^{T,\xi}$,

$$\tilde{X}^\xi f := f\big|_{(T-\xi,T)}$$

и блок оператора $C^T$ в подпространстве $\mathcal{F}^{T,\xi}$, т.е. оператор $C^{T,\xi} : \mathcal{F}^{T,\xi} \to \mathcal{F}^{T,\xi}$,

$$C^{T,\xi} := \tilde{X}^\xi \left[C^T\big|_{\mathcal{F}^{T,\xi}}\right] \quad (0 \leqslant \xi \leqslant T).$$

Заметим, что для всех $\xi$ этот блок является положительно определенным оператором в $\mathcal{F}^{T,\xi}$.

**Лемма 2.** *При каждом $\xi \in (0,T]$ справедливо представление*

$$\mathcal{P}^\xi = (\tilde{X}^\xi)^*[C^{T,\xi}]^{-1}\tilde{X}^\xi C^T. \tag{21}$$

**Доказательство.** Равенство (21) устанавливается проверкой характеристических свойств проектора

$$(\mathcal{P}^\xi)^2 = \mathcal{P}^\xi; \quad (\mathcal{P}^\xi)^* = \mathcal{P}^\xi; \quad \operatorname{Ran}\mathcal{P}^\xi = \Phi^\xi.$$

Все они удовлетворяются правой частью (21).

**9. Интегральное представление оператора управления.** Здесь мы приводим результат, играющий главную роль при решении обратной задачи.

Введем оператор $\Pi^\xi : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$,

$$\Pi^\xi := (W^T)^* P^\xi W^T \quad (0 \leqslant \xi \leqslant T).$$

Согласно (20), (21) его можно представить в виде

$$\Pi^\xi = (W^T)^* W^T \mathcal{P}^\xi = C^T\mathcal{P}^\xi = C^T(\tilde{X}^\xi)^*[C^{T,\xi}]^{-1}\tilde{X}^\xi C^T \\ (0 < \xi \leqslant T). \tag{22}$$

**Теорема 3.** *При каждом $T > 0$ справедливо представление*

$$W^T = (I^T)^* \int\limits_0^T dX^\xi d\Pi^\xi. \tag{23}$$

**Доказательство.**

$$W^T = (I^T)^* I^T W^T = (I^T)^* \int\limits_0^T dX^\xi (W^T)^* dP^\xi W^T = (I^T)^* \int\limits_0^T dX^\xi d\Pi^\xi.$$

**10. Решение обратной задачи.** Восстановить потенциал $q\big|_{\Omega^T}$ по передаточному оператору $R^{2T}_{q,\alpha}$ можно с помощью следующей процедуры:

1) определить $C^T$ по $R^{2T}$ с помощью (14);

2) используя (22), построить семейство операторов $\Pi^\xi$ $(0 < \xi \leqslant T)$;

3) восстановить $W^T$ из (23);

4) найти потенциал слгласно (10).

Для полного решения обратной задачи процедура должна быть дополнена характеристическим описанием ее данных, т.е. передаточного оператора. Приведем известный результат динамической системы, определяемой оператором Штерма–Лиувилля $L^T_q$ (см. [9, 10]).

**Теорема 4.** *При любом фиксированном $T > 0$ оператор $R^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^{2T}$, $\operatorname{Dom} R^{2T} = \{f \in H^1[0,T] | f(0) = 0\}$ является передаточным оператором некоторой ДС (1)–(3) если и только если*

(А) *$R^{2T}$ допускает представление в виде (11) с некоторой постоянной $\alpha$ и функцией $r \in C^\infty[0,2T]$;*

(Б) *оператор $-\frac{1}{2}(S^T)^* R^{2T} Y^{2T} S^T$ положительно определен в $\mathcal{F}^T$.*

*Если эти условия выполнены, то существует единственный потенциал $q\big|_{\Omega^T}$, определяющий ДС (1)–(3), такой что имеет место равенство $R^{2T} = R^{2T}_{q,\alpha}$.*

## Диссипативная ДС

**11. Начально-краевая задача.** Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \sigma \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \quad x > 0, \quad 0 < t < T & (24) \\ u\big|_{t=0} = \partial_t u\big|_{t=0} = 0 & (25) \\ u\big|_{x=0} = f(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant T & (26) \end{cases}$$

в которой $\sigma = \sigma(x) \geqslant 0$ есть функция (диссипация) класса $C^\infty_{\mathrm{loc}}[0,\infty)$; $f$ – управление; $u = u^f(x,t)$ – решение.

**Замечание 1.** Для упрощения записи используем те же обозначения, что и в случае консервативной ДС. При необходимости, отличая эти случаи, мы снабжаем обозначения индексами "$\sigma$" или "$q$".

Решение $u^f$ обладает известными свойствами:

(i) при $f \in C^2[0,T]$, $f(0) = f'(0) = 0$ решение $u^f$ удовлетворяет (24)–(26) в классическом смысле и допускает представление

$$u^f(x,t) = \left[\exp\left(-\int_0^x \frac{\sigma(s)}{2}\,ds\right)\right]\left\{f(t-x) + \int_x^t w(x,s) f(t-s)\,ds\right\} \qquad x, t, \geqslant 0; \tag{27}$$

с гладким ядром $w$;

(ii) соотношение (6) сохраняет силу.

**12. Оператор управления.** Внешнее пространство $\mathcal{F}^T$ и его подпространства $\mathcal{F}^{T,\xi}$, а также внутреннее пространство $\mathcal{H}^T$ и его подпространства $\mathcal{H}^\xi$ определяются для диссипативной ДС тем же образом, что и для консервативной (см. 2). Согласно (27) оператор управления может быть представлен в виде:

$$(W^T f)(x) = \left[\exp\left(-\int_0^x \frac{\sigma(s)}{2}\,ds\right)\right]\left\{f(T-x) + \int_x^T w(x,s) f(T-s)\,ds\right\}$$
$$x \in \Omega^T. \tag{28}$$

В силу последнего, для ДС (24)–(26) сохраняет силу утверждение Леммы 1. Обратный оператор $[W^T]^{-1} : \mathcal{H}^T \to \mathcal{F}^T$ действует непрерывно и допускает представление в виде

$$([W^T]^{-1}a)(t) = \left[\exp\left(-\int_0^{T-t} \frac{\sigma(s)}{2}\,ds\right)\right] a(T-t) -$$
$$- \int_0^t w^{(-1)}(t,s)\left[\exp\left(-\int_0^{T-s} \frac{\sigma(\eta)}{2}\,d\eta\right)\right] a(T-s)\,ds \quad 0 < t < T. \tag{29}$$

с гладким ядром $w^{(-1)}$.

Так как $\sigma$ не зависит от времени, свойство (8) сохраняет силу.

**13. Передаточный оператор.** Соответствие "вход-выход" для диссипативной ДС реализуется оператором $R^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, $\operatorname{Dom} R^T = \{f \in H^1[0,T] | f(0) = 0\}$,

$$(R^T f)(t) := \partial_x u^f(0,t) \quad 0 < t < T. \tag{30}$$

Используя (27), для него можно получить представление

$$(R^T f)(t) = -f'(t) - \frac{\sigma(0)}{2} f(t) + \int_0^t r(t-\tau) f(\tau)\,d\tau \quad 0 < t < T \tag{31}$$

с функцией $r(t)$, гладкой при $t \geqslant 0$.

**14. Оператор скорости.** Благодаря тому, что $W^T$ есть изоморфизм $\mathcal{F}^T$ на $\mathcal{H}^T$, оператор $V^T : \mathcal{H}^T \to \mathcal{H}^T$, $\operatorname{Dom} V^T = \{a \in H^1(\bar\Omega^T) | a\big|_{x=T} = 0\}$,

$$V^T := W^T \frac{d}{dt} [W^T]^{-1}$$

оказывается корректно определенным. Мы называем его оператором скорости, имея ввиду очевидное соотношение

$$V^T u^f(\cdot, T) = \partial_t u^f(\cdot, T),$$

справедливое для произвольного $f \in H^1[0,T]$, $f(0)=0$.

Представление

$$(V^T a)(x) = -a'(x) - \frac{\sigma(0)}{2}\,a(x) + \int\limits_x^T V(x,s)a(s)ds \quad x \in \Omega^T \qquad (32)$$

выводится из (28) и (29). Следующее предложение, доказательство которого мы опускаем, дает характеризацию ядра $V(x,s)$.

**Лемма 3.** *Функция $V(x,s)$ является единственным решением задачи*

$$\begin{cases} [\partial_s - \partial_x]V(x,s) + \frac{\sigma(x)-\sigma(s)}{2}\,V(x,s) & + \int\limits_x^s V(x,\eta)V(\eta,s)d\eta = 0 \\ & 0 < x < s < T, \\ V(x,x) = \frac{\sigma^2(x)}{2} - \frac{\sigma'(x)}{4} & 0 \leqslant x \leqslant T. \end{cases}$$

**15. Оператор $L_\sigma^T$.** Система (24)–(26) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + L_\sigma^T u = 0 & (x,t) \in \Omega^T \times (0,T) \\ u\big|_{t=0} = \partial_t u\big|_{t=0} = 0 & \\ u\big|_{x=0} = f(t) & 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

с оператором $L_\sigma^T : \mathcal{H}^T \to \mathcal{H}^T$, $\operatorname{Dom} L_\sigma^T = \{a \in H^2(\bar\Omega^T) | a\big|_{x=T} = a'\big|_{x=T} = 0\}$,

$$L_\sigma^T := -\frac{d^2}{dx^2} + \sigma V^T.$$

Формула (32) приводит к представлению

$$(L_\sigma^T a)(x) = -a''(x) - \sigma(x)a'(x) + \frac{\sigma^2(x)}{2}a(x)$$
$$- \sigma(x)\int\limits_x^T V(x,s)a(s)ds \quad x \in \Omega^T. \qquad (33)$$

Эволюция диссипативной ДС определяется этим оператором. В отличие от $L_q^T$ (см. 4), оператор $L_\sigma^T$ не является локальным из-за присутствия в (33) интегрального члена.

**16. Связывающий оператор диссипативной ДС.** Снабдим внутреннее пространство системы (24)–(26) новым скалярным произведением

$$(a,b)_{\mathcal{B}^T} := \int_0^T a(x)b(x)dx+$$
$$+\int_0^T dx\sigma(x)\int_0^T d\eta(W^T\mathcal{I}^T_{T-\eta}[W^T]^{-1}a)(x)(W^T\mathcal{I}^T_{T-\eta}[W^T]^{-1}b)(x), \quad (34)$$

корректно определенным при любом $\sigma(\cdot)\geqslant 0$. Пусть $\mathcal{B}^T$ есть соответствующие гильбертово пространство.

В силу (8), в случае $a=u^f(\cdot,T)$, $b=u^g(\cdot,T)$ соотношение (34) приобретает вид:

$$(W^Tf,W^Tg)_{\mathcal{B}^T}=(u^f(\cdot,T),u^g(\cdot,T))_{\mathcal{H}^T}+$$
$$+\int_0^T dx\sigma(x)\int_0^T d\eta u^f(x,\eta)u^g(x,\eta), \quad (35)$$

Связывающий оператор $C^T:\mathcal{F}^T\to\mathcal{F}^T$ определим соотношением

$$(C^Tf,g)_{\mathcal{F}^T}=(W^Tf,W^Tg)_{\mathcal{B}^T}.$$

Рассматривая оператор управления, как отображение из $\mathcal{F}^T$ на $\mathcal{B}^T$ и обозначая его сопряженный через $(W^T)^\#$, имеем равенство

$$C^T=(W^T)^\#W^T$$

(ср. с (12) для $C^T_q$).

Следующий результат позволяет выразить связывающий оператор диссипативной ДС через ее передаточный оператор.

**Теорема 5.** *При каждом $T>0$ оператор $C^T$ положительно определен в $\mathcal{F}^T$ и допускает представление*

$$C^T=-\frac{1}{2}(S^T)^*R^{2T}Y^{2T}S^T. \quad (36)$$

**Доказательство.** Положительная определенность $C^T$ следует из его определения и свойств оператор $W^T$, упомянутых в п.12.

Для вывода (36) выберем произвольные управления $f, g \in C_0^\infty[0,T]$; пусть $f_- := S^T f \in C_0^\infty[0,2T]$. Функция

$$z^{fg}(s,t) := \int_0^\infty dx[\sigma(x)u^{f_-}(x,s)u^g(x,t) + \partial_s u^{f_-}(x,s)u^g(x,t) + u^{f_-}(x,s)\partial_t u^g(x,t)]$$

определена при $0 \leqslant s \leqslant 2T$, $0 \leqslant t \leqslant T$ и удовлетворяет, в силу (25), условию

$$z^{fg}(0,s) = 0 \quad s \in [0,2T]. \tag{37}$$

Для нее выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
[\partial_t - \partial_s]z^{fg}(s,t) = \int_0^\infty dx\{u^{f_-}(x,s)[\sigma(x)\partial_t u^g(x,t) + \partial_t^2 u^g(x,t)]+ \\
+ \partial_s u^{f_-}(x,s)\partial_t u^g(x,t) - [\sigma(x)\partial_s u^{f_-}(x,s) + \partial_s^2 u^{f_-}(x,s)]u^g(x,t)- \\
- \partial_s u^{f_-}(x,s)\partial_t u^g(x,t)\} = \int_0^\infty dx[u^{f_-}(x,s)\partial_x^2 u^g(x,t) - \partial_x^2 u^{f_-}(x,s)u^g(x,t)] \\
= -u^{f_-}(0,s)\partial_x u^g(0,t) + \partial_x u^{f_-}(0,s)u^g(0,t) \\
= -f_-(s)(R^T g)(t) + (R^{2T} f_-)(s)g(t) \quad (s,t) \in (0,2T)\times(0,T).
\end{aligned}$$

Интегрируя полученное уравнение для $z_t^{fg}$ с учетом (37), имеем соотношение

$$z^{fg}(s,t) = \int_0^t d\eta[-f_-(t+s-\eta)(R^T g)(\eta) + (R^{2T} f_-)(t+s-\eta)g(\eta)]$$
$$0 \leqslant t < 2T - s.$$

Оно приводит к равенству

$$\int_0^T z^{fg}(t,t)dt = -\int_0^T d\eta(R^T g)(\eta) \int_\eta^{2T-\eta} d\tau f_-(\tau) + \int_0^T d\eta g(\eta) \int_\eta^{2T-\eta} d\tau(R^{2T} f_-)(\tau). \tag{38}$$

Первое слагаемое в (38) аннулируется в силу нечетности $f_-$; второе можно преобразовать к виду

$$\int_0^T z^{fg}(t,t)dt = \left(-\frac{1}{2}(S^T)^* R^{2T} Y^{2T} S^T f, g\right)_{\mathcal{F}^T}. \tag{39}$$

С другой стороны определение $z^{fg}$ приводит к равенствам

$$\int_0^T z^{fg}(t,t)dt = \int_0^T dt \int_0^T dx\{\sigma(x)u^f(x,t)u^g(x,t) + \partial_t[u^f(x,t)u^g(x,t)]\} =$$
$$= \int_0^T dx\sigma(x) \int_0^T dt u^f(x,t)u^g(x,t) + \int_0^T u^f(x,T)u^g(x,T)dx =$$
$$= (W^T f, W^T g)_{\mathcal{B}^T} = (C^T f, g)_{\mathcal{F}^T}. \tag{40}$$

Сопоставляя (39) и (40), получаем (36).

Мы установили, что связывающие операторы $C_q^T$ и $C_\sigma^T$ (см. Замечание 1) выражаются через передаточные операторы $R_{q,\alpha}^T$ и $R_\sigma^T$ одинаковым образом.

## Модельная DS

**Главный результат.** Представление (31) и теорема 5 показывают, что для передаточного оператора диссипативной ДС выполняются необходимые и достаточные условия, характеризующие передаточный оператор консервативной ДС.

**Теорема 6.** *Пусть $R_\sigma^{2T}$ есть передаточный оператор диссипативной ДС* (24)–(26). *Тогда существует единственный потенциал $q\big|_{\Omega^T}$ такой, что передаточный оператор $R^{2T}_{q,-\frac{\sigma(0)}{2}}$ консервативной ДС* (1)–(3) *совпадает с $R_\sigma^{2T}$ (в $\mathcal{F}^{2T}$).*

Пусть $R_\sigma^{2T}$ есть передаточный оператор диссипативной ДС (24)–(26). Ее моделью мы называем консервативную ДС вида (1)–(3), передаточный оператор которой $R_{q,\alpha}^{2T}$ (с $\alpha = -\frac{\sigma(0)}{2}$) удовлетворяет равенству

$$R^{2T}_{q,-\frac{\sigma(0)}{2}} = R_\sigma^{2T}.$$

Как показывает Теорема 6, любая диссипативная ДС имеет (консервативную) модель.

Диссипативная ДС и ее модель неразличимы с точки зрения "внешнего наблюдателя", изучающего системы по их соответствию "вход-выход".

**Замечание 2.** В частной беседе др. Дж. Пауэлл сообщил автору, что аналогичный факт имеет место и в спектральной задаче.

**18. Оператор преобразования.** Существует преобразование, связывающее диссипативную ДС с ее моделью. Ниже мы снабжаем объекты индексами "$\sigma$" или "$q$" в зависимости от их принадлежности диссипативной или консервативной системам. (см. Замечание 1).

Внутренние пространства консервативной ДС и ее модели связываются операторами $M^T : \mathcal{H}_\sigma^T \to \mathcal{H}_q^T$,

$$M^T := W_q^T [W_\sigma^T]^{-1}.$$

Он сплетает операторы $L_\sigma^T$ и $L_q^T$, определяющие эволюцию систем:

$$L_q^T M^T = M^T L_\sigma^T.$$

Следующий результат дает характеризацию оператора преобразования.

**Лемма 4.** *Справедливо представление*

$$(M^T a)(x) = \left[\exp\left(-\int\limits_0^x \frac{\sigma(s)}{2}\,ds\right)\right]\left\{a(x) - \int\limits_x^T M(x,s)a(s)ds\right\}$$
$$x \in \Omega_q^T.$$

*Ядро $M(x,s)$ является единственным решением задачи Гурса вида*

$$\begin{cases} [\partial_x^2 - \partial_s^2]M(x,s) + \sigma(x)\partial_x M(x,s) + \sigma(s)\partial_s M(x,s) + \\ + \left[\sigma'(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} + \frac{\sigma'(x)}{2} + \frac{\sigma^2(x)}{4} - q(x)\right] M(x,s) + \\ + \int\limits_x^s \sigma(\tau)V(\tau,s)M(x,\tau)d\tau = \sigma(x)V(x,s) \qquad 0 < x < s < T, \\ M(0,s) = 0 \quad 0 \leqslant s \leqslant T, \\ M(x,x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \left[q(\xi) - \frac{\sigma'(\xi)}{2} + \frac{\sigma^2(\xi)}{4}\right] d\xi \quad 0 \leqslant x \leqslant T, \end{cases}$$

*где $V(x,s)$ есть ядро оператора скорости (см. п. 14).*

Доказательство Леммы не приводится.

Как отображение из $\mathcal{B}^T$ в $\mathcal{H}_q^T$ оператор преобразования оказывается унитарным.

**19. Открытый вопрос.** Существует ли явная формула, выражающая диссипацию $\sigma(\cdot)$ через соответствующий модельный потенциал $q(\cdot)$?

**20. Благодарности.** Автор признателен проф. С. Стрему и др. Дж. Пауэллу за полезные обсуждения.

## Литература


1. М. И. Белишев, *Об одном подходе к многомерной обратной задаче для волнового уравнения.* — ДАН СССР **297, No. 3** (1987), 524–527.
2. М. И. Белишев, *Граничное управление и продолжение волновых полей.* — Препринт ЛОМИ Р-1-90 (1990), 41.
3. С. А. Авдонин, М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Граничное управление и матричная обратная задача для уравнения $u_{tt} - u_{xx} + V(x)u = 0$.* — Матем. Сборник **182, No. 3** (1991), 304–331.
4. M. I. Belishev, Ya.V. Kurylev, *Boundary control, wave fieds continuation and inverse problems for the wave equation.* — Computers Math. Appl. **22, No. 4–7** (1991), 27–52.
5. М. И. Белишев, А. П. Качалов, *Операторный интеграл в многомерной спектральной обратной задаче.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **215, No. 14** (1994), 9–37.
6. М. И. Белишев, В. А. Рыжов, В. Б. Филиппов, *Спектральный вариант BC-метода (теория и численный эксперимент.* — ДАН СССР **232, No. 4** (1994), 414–417.
7. М. С. Бродский, *Треугольные и жордановы представления линейных операторов.* М, 1969, с. 288.
8. И. О. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.* М, 1967, с. 508.
9. А. С. Благовещенский, *О локальном методе решения обратной задачи для неоднородной струны.* — Труды МИАН **115** (1971), 28–38.
10. А. С. Благовещенский, *О несамосопряженной матричной граничной обратной задаче для гиперболического уравнения.* — Проблемы матем. физики No. 5 (1971), 38–62.


Belishev M. I. Conservative model of dissipative dynamical system.

Let $R_\sigma$ be a response operator of dissipative dynamical system (DS) gouverned by the equation $u_{tt} - \sigma u_t - u_{xx} = 0$, $x > 0$ with $\sigma = \sigma(x) \geqslant 0$. Let $R_q$ be a response operator of conservative DS gouverned by the equation $u_{tt} - u_{xx} + qu = 0$, $x > 0$ with real $q = q(x)$. We demonstrate that for any dissipative DS there exists a unique conservative DS ("model") such that the equality $R_\sigma = R_q$ is valid.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 13 июня 1995 г.