ПАРАЗИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НА ФУНКЦИИ БЕЛОГО В ПРОСТРАНСТВАХ ГУРВИЦА

Е. М. Крейнес

Поиск различных конструктивных подходов к визуализации эквивалентности категории *детских рисунков* (вложенные графы на поверхностях) и категории *пар Белого* (алгебраическая кривая X и непостоянная рациональная функция β на ней, имеющая не более трех различных критических значений), доказанной в [1], начинается с работы А. Гротендика [2] и является актуальной задачей современной математики, см. [3]–[8].

В настоящей работе рассматривается проективная прямая $X = \mathbf{P}^1$. В этом случае соответствующие детские рисунки оказываются плоскими графами, а критическими значениями функции Белого можно без ограничения общности считать 0, 1 и ∞. При этом мы можем использовать глобальные координаты на $\mathbf{P}^1$ и задать в явном виде систему уравнений на функцию Белого, отвечающую данному рисунку.

Пусть Γ – некоторый связный плоский граф, $A_1,\dots,A_k \in \mathbf{P}^1$ – координаты его вершин, $C_1,\dots,C_m \in \mathbf{P}^1$ – координаты "центров" его граней, $\langle \alpha_1,\dots,\alpha_k \mid \gamma_1,\dots,\gamma_m\rangle$ – набор 0-валентностей и 2-валентностей графа Γ. Легко видеть, что функция Белого этого графа имеет вид $\beta(z) = c\dfrac{(z-C_1)^{\gamma_1}\cdots(z-C_m)^{\gamma_m}}{(z-A_1)^{\alpha_1}\cdots(z-A_k)^{\alpha_k}}$ для некоторого конечного ненулевого элемента c (в случае если какая-то из величин A_i, $i=1,\dots,k$, или C_j, $j=1,\dots,m$, равняется бесконечности, мы опускаем соответствующий множитель). Заметим, что β является элементом пространства Гурвица $\mathscr{H}_{0,2n}$ рода 0 степени $2n$, где n – количество ребер графа Γ.

Переходя к однородным координатам, замечая, что функция β не зависит от порядка сомножителей, и используя после этого в отдельности для числителя и для знаменателя функции β тот факт, что $\dfrac{(\mathbf{P}^1)^d}{S_d} \cong \mathbf{P}^d$ для любого натурального d, получим вложение $\tau\colon \mathscr{H}_{0,2n} \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^{2n} \times \mathbf{P}^{2n}$. Тем самым, функцию β можно рассматривать как элемент компактного (в естественной топологии) пространства $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^{2n} \times \mathbf{P}^{2n}$. В этом пространстве для каждого набора 0- и 2-валентностей $\langle \alpha_1,\dots,\alpha_k \mid \gamma_1,\dots,\gamma_m\rangle$ нами задается система уравнений, определяющая функцию β и называемая *системой Гротендика–Белого*. Эта система является покомпонентной записью утверждения о том, что числитель функции $(1-\beta)$ является полным квадратом. Для каждого решения $(c; A_1,\dots,A_k; C_1,\dots,C_m)$ системы Гротендика–Белого рассмотрим *псевдофункцию Белого*: $B = c\dfrac{(z-C_1)^{\gamma_1}\cdots(z-C_m)^{\gamma_m}}{(z-A_1)^{\alpha_1}\cdots(z-A_k)^{\alpha_k}}$.

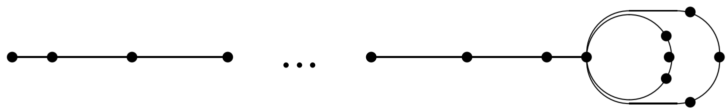
Решение $(c; A_1,\dots,A_k; C_1,\dots,C_m)$ называется *паразитическим*, если соответствующая псевдофункция Белого B является функцией Белого некоторого графа $\overline{\Gamma}$, набор 0- и 2-валентностей которого отличается от $\langle \alpha_1,\dots,\alpha_k \mid \gamma_1,\dots,\gamma_m\rangle$, или если B вообще не является функцией Белого. Будем говорить, что заданный набор валентностей (или граф Γ с заданным набором валентностей) обладает *геометрическим* и *негеометрическим* паразитическими решениями в первом и втором случаях соответственно.

Теорема 1. *Пусть граф Γ обладает геометрическим паразитическим решением. Тогда это решение лежит на границе множества $\tau(\mathscr{H}_{0,2n})$ в пространстве $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^{2n} \times \mathbf{P}^{2n}$.*

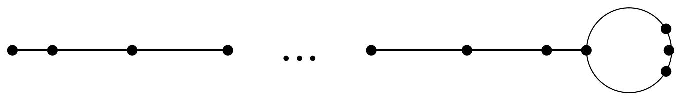
Теорема 2. *Граф обладает или не обладает паразитическим решением одновременно со своим двойственным графом. Паразитическое решение для графа является геометрическим тогда и только тогда, когда является геометрическим паразитическое решение для двойственного графа.*

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 00-15-96128 и № 99-01-00382).

Теорема 3. *Пусть* $\Gamma_{\lambda\mu}$ – *плоский граф следующего вида*:

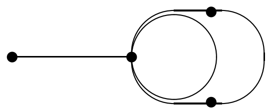


состоящий из "ручки", на которой расположено λ *точек валентности* 2 *и двух петель, обладающих общей точкой, на каждой из которых расположено по* μ *точек валентности* 2. *Для всех* λ *и* μ *граф* $\Gamma_{\lambda\mu}$ *обладает геометрическим паразитическим решением, соответствующим графу* $\overline{\Gamma_{\lambda\mu}}$, *который может быть получен из* $\Gamma_{\lambda\mu}$ *склеиванием петель друг с другом и имеет следующий вид*:



Следствие 1. *Существуют бесконечные семейства графов, обладающих геометрическими паразитическими решениями.*

Пример. Граф $\Gamma_{0,2,0}$



обладает однопараметрической системой паразитических решений, которые при всех значениях параметра, кроме двух, являются негеометрическими.

Следствие 2. *Существуют графы, обладающие бесконечным количеством негеометрических паразитических решений.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] G. B. Shabat, V. A. Voevodskij // Progr. Math. 1990. V. 88. P. 199–227. [**2**] A. Grothendieck // London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 1997. V. 243. P. 3–43. [**3**] J. Bètrèma, D. Pérè, A. Zvonkine. Plane Trees and their Shabat Polynomials. Catalog // Rapports Internes de LaBRI №75–92, Bordeaux, 1992. [**4**] Н. М. Адрианов, Ю. Ю. Кочетков, Г. Б. Шабат, А. Д. Суворов // Фундамент. прикл. матем. 1995. Т. 1. №2. С. 377–384. [**5**] Yu. Yu. Kochetkov // Proceedings of the 12-th International Conference FPSAC-00. Berlin: Springer-Verlag, 2000. P. 447–454. [**6**] G. Shabat // Proceedings of the 12-th International Conference FPSAC-00. Berlin: Springer-Verlag, 2000. P. 575–581. [**7**] Е. М. Крейнес, Г. Б. Шабат // Фундамент. прикл. матем. 2000. Т. 6. №3. С. 289–292. [**8**] G. Shabat, A. Zvonkine // Contemp. Math. 1994. V. 178. P. 233–275.

Принято редколлегией
24.09.2001