В. М. Рябцева, О резольвентном множестве спектральной функции изометрического оператора с бесконечными индексами дефекта,
Изв. вузов. Матем., 1968, номер 3, 75–79

https://www.mathnet.ru/ivm3290

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА *№ 3 (70)*

УДК 519.55

В. М. Рябцева

О РЕЗОЛЬВЕНТНОМ МНОЖЕСТВЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ИЗОМЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С БЕСКОНЕЧНЫМИ ИНДЕКСАМИ ДЕФЕКТА

Пусть U — замкнутый изометрический оператор, действующий в гильбертовом пространстве H; D_U и Δ_U — соответственно области определения и значений оператора U.

Резольвентным множеством спектральной функции E_t $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ оператора U называется множество точек комплексной плоскости ζ, $|\zeta| \neq 1$, вместе со всеми точками $\zeta = e^{-it}$, каждая из которых содержится в каком-нибудь открытом интервале $(e^{-i\alpha};\ e^{-i\beta})$ единичной окружности, через который обобщенная резольвента оператора U

$$R_\zeta = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dE_t}{1 - \zeta e^{it}},$$

соответствующая этой спектральной функции, допускает аналитическое продолжение из внутренности единичного круга во внешность его, причем это продолжение совпадает с указанной обобщенной резольвентой при $|\zeta| > 1$.

Известная формула А. В. Штрауса [2], описывающая множество всех обобщенных резольвент произвольного замкнутого симметрического оператора, переложена на случай изометрического оператора М. Е. Чумакиным [8]. Им показано, что всякая обобщенная резольвента R_ζ замкнутого изометрического оператора U, действующего в гильбертовом пространстве H, представима в виде

$$R_\zeta = [E - \zeta (U \oplus \Phi_\zeta)]^{-1}, \quad |\zeta| < 1, \tag{1}$$

где Φ_ζ — некоторый линейный оператор из $H \ominus D_U$ в $H \ominus \Delta_U$, являющийся аналитической в единичном круге операторной функцией параметра ζ и не превосходящий по норме единицы.

Перенося результат, полученный Р. Мак-Келви [6] для симметрического оператора, на случай изометрического оператора, М. Е. Чумакин [8] сформулировал условия, при которых формула (1) остается в силе и для некоторых значений ζ, по модулю равных единице, в терминах предельных значений резольвенты.

В настоящей работе условия принадлежности точек единичной окружности резольвентному множеству спектральной функции замкнутого изометрического оператора формулируются в терминах некоторого оператора V_ζ (близкого по определению к параллельному проектору, введенному А. В. Штраусом [1] для случая замкнутого эрмитова оператора) и семейства операторов Φ_ζ.

Используя метод А. В. Штрауса ([3], лемма 3) и лемму 3 из работы Ю. Л. Шмульяна [4], представим гильбертово пространство в виде прямой суммы подпространств, связанных с замкнутым изометрическим оператором и его точкой регулярного типа, расположенной на единичной окружности комплексной плоскости. Условимся обозначать через N_ζ при любом ζ из комплексной плоскости подпространство $H\ominus(E-\zeta U)D_U$, а через P_F — оператор ортогонального проектирования в H на любое подпространство $F\subset H$.

Лемма 1. *Пусть $\zeta^{-1}(|\zeta|=1)$ — точка регулярного типа оператора U. Тогда имеют место равенства*:

$$H=(E-\zeta U)D_U\dotplus(H\ominus D_U), \tag{2}$$

$$H=(E-\zeta U)D_U\dotplus(H\ominus\Delta_U), \tag{3}$$

$$H=D_U\dotplus N_\zeta, \tag{4}$$

$$H=\Delta_U\dotplus N_\zeta. \tag{5}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение оператор $F_\zeta=T_0-\zeta^{-1}E$, где $T_0=U\oplus 0$. В условиях леммы 3 Ю. Л. Шмульяна оператор $F_\zeta^{-1}=(T_0-\zeta^{-1}E)^{-1}$ существует, ограничен и определен всюду в H. Заметим, что

$$F_\zeta D_U=(T_0-\zeta^{-1}E)D_U=(U-\zeta^{-1}E)D_U=(E-\zeta U)D_U, \tag{6}$$

$$F_\zeta(H\ominus D_U)=(T_0-\zeta^{-1}E)(H\ominus D_U)=H\ominus D_U. \tag{7}$$

Пусть h — произвольный элемент пространства H. Из равенств (6) и (7) следует, что в сумме

$$h=\chi+g \tag{8}$$

элемент $\chi=F_\zeta P_{D_U}F_\zeta^{-1}h\in(E-\zeta U)D_U$, а элемент $g=F_\zeta P_{H\ominus D_U}F_\zeta^{-1}h\in$ $\in H\ominus D_U$. С другой стороны, предположим, что разложение (8) имеет место. Применяя к обеим частям равенства (8) оператор F_ζ^{-1}, будем иметь

$$F_\zeta^{-1}h=F_\zeta^{-1}\chi+F_\zeta^{-1}g. \tag{9}$$

Но в силу (7) $F_\zeta^{-1}g\in H\ominus D_U$, а в силу (6) $F_\zeta^{-1}\chi\in D_U$, поэтому $F_\zeta^{-1}g=P_{H\ominus D_U}F_\zeta^{-1}h$, $F_\zeta^{-1}\chi=P_{D_U}F_\zeta^{-1}h$, откуда $g=F_\zeta P_{H\ominus D_U}F_\zeta^{-1}h$, $\chi=F_\zeta P_{D_U}F_\zeta^{-1}h$. Итак, если представление (8) имеет место, то оно единственно. Равенство (2) доказано.

Аналогично, используя соотношения

$$F_\zeta^*(H\ominus\Delta_U)=(T_0^*-\zeta E)(H\ominus\Delta_U)=H\ominus\Delta_U, \tag{10}$$

$$F_\zeta^*\Delta_U=(T_0^*-\zeta E)UD_U=(E-\zeta U)D_U, \tag{11}$$

можно доказать равенство (3).

Переходим к доказательству равенства (4). Из (11) следует, что $(F_\zeta^*)^{-1}$ отображает $(E-\zeta U)D_U$ на Δ_U, а потому F_ζ^{-1} отображает $H\ominus\Delta_U$ на N_ζ. Кроме того, из (6) следует, что F_ζ^{-1} отображает $(E-\zeta U)D_U$ на D_U. Так как $F_\zeta^{-1}H=H$, то, применяя к обеим частям равенства (3) оператор F_ζ^{-1}, получим равенство (4).

Аналогично из справедливости равенства (2) выводится справедливость равенства (5). Лемма доказана.

Далее рассмотрим два предложения, которые аналогичны соответственно лемме 2 и теореме 4 из работы М. А. Красносельского [7].

Лемма 2. *Для каждого элемента* $f \in N_\zeta$ $(|\zeta| = 1)$ *справедливо равенство*

$$UP_{D_U} f = \zeta^{-1} P_{\Delta_U} f. \tag{12}$$

Доказательство. При любом $\varphi \in D_U$ и $f \in N_\zeta$ $(|\zeta| = 1)$ имеем:

$$(\zeta^{-1} f - UP_{D_U} f,\ U\varphi) = \zeta^{-1}(f,\ U\varphi) - (UP_{D_U} f,\ U\varphi) =$$
$$= (f,\ \zeta U\varphi) - (f,\ \varphi) = (f,\ (\zeta U - E)\varphi) = 0,$$

т. е. элемент $\zeta^{-1} f - UP_{D_U} f$ ортогонален к Δ_U. Следовательно, $P_{\Delta_U}(\zeta^{-1} f - UP_{D_U} f) = 0$, или $UP_{D_U} f = \zeta^{-1} P_{\Delta_U} f$. Лемма доказана.

Следствие. Для каждого элемента $f \in N_\zeta$ $(|\zeta| = 1)$ справедливо равенство

$$\| P_{H \ominus D_U} f \| = \| P_{H \ominus \Delta_U} f \|. \tag{13}$$

Предположим, что Φ — изометрический оператор, действующий из $H \ominus D_U$ в $H \ominus \Delta_U$. Известно, что если ζ^{-1} $(|\zeta| = 1)$ — собственное значение оператора $T = U \oplus \Phi$, то соответствующий собственный элемент принадлежит N_ζ.

Лемма 3. *Если* f *— собственный элемент оператора* T, *соответствующий собственному значению* $\zeta^{-1}(|\zeta| = 1)$, *то*

$$TP_{H \ominus D_U} f = \zeta^{-1} P_{H \ominus \Delta_U} f. \tag{14}$$

Доказательство. Преобразуем левую часть доказываемого равенства: $TP_{H \ominus D_U} f = T(f - P_{D_U} f) = \zeta^{-1} f - \zeta^{-1} P_{\Delta_U} f = \zeta^{-1} P_{H \ominus \Delta_U} f$. Лемма доказана.

Определим при любом $|\zeta| = 1$ оператор V_ζ с помощью равенства

$$V_\zeta P_{H \ominus D_U} f = \zeta^{-1} P_{H \ominus \Delta_U} f,\ f \in N_\zeta. \tag{15}$$

Как следует из равенства (13), данное определение корректно, а введенный оператор V_ζ изометричен. Пусть ζ^{-1} $(|\zeta| = 1)$ — точка регулярного типа оператора U, тогда оператор V_ζ из (15) отображает $H \ominus D_U$ на $H \ominus \Delta_U$. Действительно, применяя к обеим частям равенства (4) оператор $P_{H \ominus D_U}$, а к обеим частям равенства (5) оператор $P_{H \ominus \Delta_U}$, получим

$$P_{H \ominus D_U} N_\zeta = H \ominus D_U,\quad P_{H \ominus \Delta_U} N_\zeta = H \ominus \Delta_U\ ^{1)}.$$

Обозначим через S сужение оператора $P_{H \ominus D_U}$ на N_ζ, а через Q — сужение оператора $P_{H \ominus \Delta_U}$ на N_ζ. Если ζ^{-1} $(|\zeta| = 1)$ — точка регулярного типа оператора U, то подпространства D_U и N_ζ, а также подпространства Δ_U и N_ζ линейно независимы, и, следовательно,

1) Отметим, что этот факт, по существу, был получен Ю. Л. Шмульяном ([4], теорема 8).

операторы S и Q обладают обратными. В этом случае для любого элемента $g \in H \ominus D_U$ найдется в N_ζ такой элемент f, что $S^{-1}g = f$. Откуда, используя (15), получим $V_\zeta g = V_\zeta Sf = \zeta^{-1} Qf = \zeta^{-1}QS^{-1}g$, $g \in H \ominus D_U$.

Теорема 1. *Для того чтобы точка ζ^{-1} ($|\zeta| = 1$) регулярного типа оператора U была собственным значением произвольного унитарного расширения $T = U \oplus \Phi$ оператора U, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\Phi - V_\zeta$ аннулировал некоторый ненулевой элемент из $H \ominus D_U$.*

Доказательство. Пусть f — собственный элемент оператора T, соответствующий собственному значению ζ^{-1}: $Tf = \zeta^{-1} f$, $f \neq 0$. Представляя оператор Φ в виде TSS^{-1} и учитывая лемму 3, получим для элемента $g = Sf \neq 0$ $(\Phi - V_\zeta) g = (TS - \zeta^{-1} Q) S^{-1} Sf = TSf - \zeta^{-1}Qf = \zeta^{-1}Qf - \zeta^{-1}Qf = 0$. Обратно, пусть теперь $(\Phi - V_\zeta) g = 0$, $g \neq 0$. Представляя g в виде Sf, $f \in N_\zeta$, и используя равенство (12), получим, что $(\Phi - V_\zeta) g = (TS - \zeta^{-1}Q) S^{-1} Sf = TSf - \zeta^{-1} Qf = T(f - P_{D_U} f) - \zeta^{-1}(f - P_{\Delta_U} f) = Tf - UP_{D_U} f - \zeta^{-1} f + \zeta^{-1} P_{\Delta_U} f = Tf - \zeta^{-1} f = 0$ при $f \neq 0$, т. е. что ζ^{-1} — собственное значение оператора T. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если ζ^{-1} ($|\zeta| = 1$) — точка регулярного типа оператора U, то уравнение*

$$Tx - \zeta^{-1}x = h \tag{16}$$

имеет решение при всех $h \in H$ тогда и только тогда, когда $(\Phi - V_\zeta)(H \ominus D_U) = H \ominus \Delta_U$.

Доказательство. Пусть уравнение (16) имеет решение при любом $h \in H$. При этом если $h \in H \ominus \Delta_U$, то $x \in N_\zeta$. В самом деле, при любом $\varphi \in D_U$ $(x, (E - \zeta U)\varphi) = (x, (U^{-1}U - \zeta U)\varphi) = (x, (U^{-1} - \zeta E) U\varphi) = (x, (T^* - \zeta E) U\varphi) - ((T - \zeta^{-1}E) x, U\varphi) = (h, U\varphi) = 0$. Применяя теперь к элементу $g = Sx$ оператор $\Phi - V_\zeta$, будем иметь $(\Phi - V_\zeta) g = Tx - \zeta^{-1} x = h$. Итак, для любого $h \in H \ominus \Delta_U$ найдется элемент $g \in H \ominus D_U$ такой, что $(\Phi - V_\zeta) g = h$. Обратно, предположим, что $(\Phi - V_\zeta)(H \ominus D_U) = H \ominus \Delta_U$. Произвольный элемент $h \in H$ представим в силу (3) в виде $h = \psi + (E - \zeta U)\varphi$, $\psi \in H \ominus \Delta_U$, $\varphi \in D_U$. Для элемента ψ, согласно предположению, найдется такой элемент $g \in H \ominus D_U$, что $(\Phi - V_\zeta) g = \psi$. Введем в рассмотрение элемент $x = S^{-1}g - \zeta\varphi$ и применим к нему оператор $T - \zeta^{-1} E$. Будем иметь

$$(T - \zeta^{-1}E) x = (T - \zeta^{-1}E) S^{-1} g - \zeta (T - \zeta^{-1}E)\varphi = TS^{-1} g -$$
$$- \zeta^{-1} S^{-1} g + (E - \zeta U)\varphi = UP_{D_U} S^{-1} g + \Phi SS^{-1} g -$$
$$- \zeta^{-1}S^{-1} g + (E - \zeta U)\varphi = \Phi g + \zeta^{-1} P_{\Delta_U} S^{-1} g - \zeta^{-1}S^{-1} g +$$
$$+ (E - \zeta U)\varphi = \Phi g - \zeta^{-1}(S^{-1}g - P_{\Delta_U} S^{-1} g) + (E - \zeta U)\varphi = \Phi g -$$
$$- \zeta^{-1} QS^{-1}g + (E - \zeta U)\varphi = (\Phi - V_\zeta) g + (E - \zeta U)\varphi = \psi + (E - \zeta U)\varphi = h.$$

Итак, для любого $h \in H$ найдется элемент x такой, что $(T - \zeta^{-1}E) x = h$, т. е. уравнение (16) разрешимо при любом $h \in H$. Теорема доказана.

Отметим, что теоремы 1 и 2 являются перенесением теорем 6 и 7 из работы Ю. Л. Шмульяна [5] на тот случай, когда расширение T унитарно, а $|\zeta| = 1$. Из справедливости теорем 1 и 2 следует

Теорема 3. *Для того чтобы оператор* $[E-\zeta(U\oplus\Phi)]^{-1}$ $(|\zeta|=1)$, *где* Φ — *некоторый изометрический оператор, отображающий* $H\ominus D_U$ *на* $H\ominus\Delta_U$, *существовал, был определен всюду в* H *и ограничен, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) ζ^{-1} — *точка регулярного типа оператора* U;

2) *оператор* $\Phi - V_\zeta$ *обладает обратным и отображает все* $H\ominus D_U$ *на все* $H\ominus\Delta_U$.

Все сказанное выше позволяет сформулировать условия принадлежности точки единичной окружности резольвентному множеству спектральной функции E_t $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ изометрического оператора U в терминах оператора V_ζ.

Теорема 4. *Для того чтобы точка* $\zeta_0=e^{-it_0}$ *единичной окружности принадлежала резольвентному множеству спектральной функции* E_t $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ *замкнутого изометрического оператора* U, *действующего в гильбертовом пространстве* H *и имеющего произвольные равные индексы дефекта* (m, m), *необходимо и достаточно, чтобы существовал некоторый открытый интервал* Δ_e *единичной окружности, содержащий точку* ζ_0, *такой, что*

1) *для каждой точки* $\zeta\in\Delta_e$ ζ^{-1} — *точка регулярного типа оператора* U;

2) *семейство операторов* Φ_ζ, *соответствующее* E_t $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, *допускает непрерывное продолжение (в смысле сходимости по норме) из внутренности единичного круга на* Δ_e, *и при любом* $\zeta\in\Delta_e$ *оператор* Φ_ζ *изометрически отображает* $H\ominus D_U$ *на* $H\ominus\Delta_U$;

3) *для каждого* $\zeta\in\Delta_e$ *оператор* $(\Phi_\zeta - V_\zeta)^{-1}$ *существует и определен всюду в* $H\ominus\Delta_U$ [1].

Пользуясь случаем, автор благодарит проф. А. В. Штрауса за полезные советы.

г. Ульяновск

Поступило
11 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Штраус А. В. К теории эрмитовых операторов. ДАН СССР, т. 67, № 4, 1949, с. 611—614.
2. Штраус А. В. К теории обобщенных резольвент симметрического оператора. ДАН СССР, т. 78, № 2, 1951, с. 217—220.
3. Штраус А. В. Обобщенные резольвенты симметрических операторов. ИАН СССР. Сер. матем., т. 18, № 1, 1954, с. 51—86.
4. Шмульян Ю. Л. Изометрические операторы с бесконечными индексами дефекта и их ортогональные расширения. ДАН СССР, т. 87, № 1, 1952, с. 11—14.
5. Шмульян Ю. Л. Строение операторов с точечным спектром, заполняющим единичный круг либо полуплоскость. Автореф. кандид. диссерт., Изд. Ин-та матем. АН УССР, 1956.
6. Mc Kelvey R. The spectra of minimal self-adjoint extensions of a symmetric operator. Pacific J. Math., v. 12, № 3, 1962, p. 1003—1022.
7. Красносельский М. А. О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов. УМЖ, 1949, № 1, с. 21—38.
8. Чумакин М. Е. Спектральные функции изометрического оператора. Автореф. кандид. диссерт., Изд. Ленинградск. педин-та, 1964.

[1] Требование ограниченности оператора $(\Phi_\zeta - V_\zeta)^{-1}$ выполняется автоматически.