F. L. Nazarov, On the theorems of Turan, Amrein–Berthier and Zigmund, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1992, Volume 201, 117–123

Ф.Л.Назаров

К ТЕОРЕМАМ ТУРАНА, АМРЕЙНА-БЕРТЬЕ И ЗИГМУНДА

Эта короткая заметка является по существу аннотацией моей статьи "Локальные оценки экспоненциальных полиномов, количественные варианты теорем Амрейна-Бертье и Зигмунда и смежные вопросы", которая, вероятно, будет опубликована в одном из ближайших номеров журнала "Алгебра и Анализ". Статья эта, в свою очередь, возникла из попыток ответить на три вопроса В.П.Хавина, которые он задал мне, когда писал "совсем элементарную" часть своей совместной с Ерикке книги "Принцип неопределенности в гармоническом анализе".

Вот эти вопросы:

1. Хорошо известна лемма Турана ([7], 1953 г.), утверждающая, что для любого экспоненциального полинома $p(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k t}$ $(c_k \in \mathbb{C},\ \lambda_k \in \mathbb{R})$ и любых промежутков $J \subset I \subset \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\sup_I |p| \leqslant \left(\frac{4e|I|}{|J|}\right)^{n-1} \sup_J |p|$$

($|I|$ означает длину I).

Можно ли в этом неравенстве заменить интервал J на произвольное множество $E \subset I$ положительной лебеговой меры?

2. Очевидно, функция $f \in L^2(\mathbb{R})$ и ее преобразование Фурье $\hat{f}$ не могут быть одновременно финитными, если только $f \neq 0$ (если f финитна, то $\hat{f}$ - целая!). В 1977 г. Амрейн и Бертье ([5]) распространили этот факт на произвольные множества E и $\Sigma \subset \mathbb{R}$ конечной меры, показав, что для любой такой пары множеств существует число $C(E,\Sigma) < +\infty$, такое что для всех $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C(E,\Sigma)\left(\int_{\mathbb{R}\setminus E} |f|^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\Sigma} |\hat{f}|^2\right).$$

От каких именно характеристик E и Σ зависит постоянная $C(E,\Sigma)$ и как ее хорошо оценить сверху?

3. Классическая теорема единственности Зигмунда для суммы лакунарного ряда (см., например, [2]) гласит, что если Λ -

очень редкое подмножество $\mathbb{Z}$, а, точнее, если существует $M < +\infty$ такое, что всякое отличное от 0 целое число представимо в виде разности элементов Λ не более, чем M различными способами, то для любого подмножества E единичной окружности $\mathbb{T}$ положительной лебеговой меры и любой функции $f \in L^2(\mathbb{T})$ со спектром $\operatorname{spec} f \overset{\text{def}}{=} \{k \in \mathbb{Z} : \hat{f}_k \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{T}} f\, z^{-k} \neq 0\} \subset \Lambda$

имеет место оценка $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant C(E) \int_E |f|^2$,

где $C(E) < +\infty$ зависит лишь от множества E, но не от функции f.

Можно ли в тех же условиях гарантировать, что $\int_{\mathbb{T}} \varphi\left(\frac{1}{|f|}\right) < +\infty$, где φ - некоторая фиксированная функция $\varphi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ и $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$? А нельзя ли взять $\varphi(x) = \log(1+x)$, как в случае аналитических функций?

Неожиданным образом эти проблемы оказались тесно связанными друг с другом и положительный ответ на первый вопрос послужил ключом к, по крайней мере, частичному решению остальных. Ниже приведены известные мне результаты с небольшими комментариями.

<u>К вопросу № I</u>: Как я уже говорил, ответ здесь утвердительный, и удается получить неравенство

$$\sup_I |p| \leqslant \left(\frac{315|I|}{|E|}\right)^{n-1} \sup_E |p| .$$

Несколько исторических замечаний: возможность какой-то оценки максимума модуля экспоненциального полинома на отрезке через его супремум на подмножестве положительной меры отмечалась многими авторами. При этом чаще всего интересовались верхней границей не для $\sup_I |p|$, а для $\sum_{k=1}^{n} |c_k|$. На показатели λ_j в этом случае всегда накладывается дополнительное условие разделенности $|\lambda_j - \lambda_k| \geqslant \Delta > 0$ при $j \neq k$, несколько упрощающее задачу. Если отрезок I имеет длину $|I| \geqslant \frac{4\pi}{\Delta}$, то величины $\sup_I |p|$ и $\sum_{k=1}^{n} |c_k|$ отличаются лишь несущественным множителем порядка n. В противном случае для перехода от $\sup |p|$ к $\sum |c_k|$ нужно рассмотреть какой-либо отрезок длины $\frac{4\pi}{\Delta}$, содержащий I, что приведет к замене $|I|$ на $\frac{4\pi}{\Delta}$ в окончательном неравенстве.

Обычно для доказательства рассматривалось продолжение p в комплексную плоскость и затем применялась в той или иной форме теорема о двух константах для оценки крайнего коэффициента (см., например, [8]). Другой подход можно найти в работе Белова ([9], 1979 г.), где доказано неравенство вида

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| \leqslant \left(\frac{A|I|}{|E|}\right)^{2^n} \sup_E |p| \quad \text{при условии, что } |I| > \frac{4\pi}{\Delta} .$$

(техника аналитического продолжения дает еще худший множитель).

Самое любопытное в этой истории то, что методы самого Турана почти мгновенно приводят к значительно более сильному результату:

$$\sup_I |p| \leqslant 2^n \left(\frac{|I|}{|E|}\right)^{2n^2} \sup_E |p| .$$

Если интересоваться оценками экспоненциальных полиномов с произвольными комплексными показателями $\lambda_j \in \mathbb{C}$, то ответ становится чуть менее законченным:

$$\sup_I |p| \leqslant \left(\frac{A|I|}{|E|}\right)^{A(n-1)} e^{|I| \max_j |\operatorname{Im} \lambda_j|} \sup_E |p| .$$

Этого достаточно для тех приложений, где важен характер роста по n при фиксированной мере $|E|$. Если же, наоборот, хочется устремлять $|E|$ к 0 при $n = \mathrm{const}$, то лучше пользоваться другим вариантом:

$$\sup_I |p| < \left(\frac{An^A|I|}{|E|}\right)^{n-1} e^{|I| \max_j |\operatorname{Im} \lambda_j|} \sup_E |p| .$$

Основным препятствием к доказательству неулучшаемого (если не интересоваться точным значением постоянной, а она неизвестна даже для двух отрезков) неравенства

$$\sup_I |p| \leqslant \left(\frac{A|I|}{|E|}\right)^{n-1} e^{|I| \max_j |\operatorname{Im} \lambda_j|} \sup_E |p| \qquad (*)$$

является отсутствие такой же полной информации о комплексных нулях $p(z)$, какую в случае $\lambda_j \in \mathbb{R}$ доставляет лемма Лангера. Для доказательства (*) вполне достаточно положительного решения следующего вопроса:

ПРОБЛЕМА I. Существует ли абсолютная постоянная $\delta > 0$, такая что никакой экспоненциальный полином $p(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k z}$ с показателями $\lambda_j \in \mathbb{C}, |\lambda_j| \leq 1$ не может иметь $\ell + n - 1$ нулей в круге радиуса $\delta\ell$ ни при каком $\ell \in \mathbb{N}$?

Насколько я понимаю, это неясно даже при $\ell = 1$. Лемма Турана в сочетании с неравенством Иенсена позволяет увидеть лишь, что в любом круге радиуса ℓ не более $A(\ell + n - 1)$ нулей, а это приводит к лишнему постоянному множителю в показателе степени.

Оценки экспоненциальных полиномов в комплексной области осложняются тем, что плоская мера Лебега – слишком грубая характеристика множества E, на котором полином мал. Попытка найти правильную форму леммы Турана (а туда должна войти скорее емкость E, чем мера) приводит к вопросам следующего сорта:

ПРОБЛЕМА 2. Пусть μ – произвольная конечная комплексная мера в $\mathbb{C}$, $C_\mu(z) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{C}} \frac{d\mu(\zeta)}{z-\zeta}$ – ее интеграл Коши, $Q_y \overset{\text{def}}{=}$ $\overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |C_\mu(z)| > y\}$ $(y > 0)$. Хорошо известно, что для любой прямой $\mathscr{X} \subset \mathbb{C}$ $m_1(\mathscr{X} \cap Q_y) \leq \frac{A}{y}\|\mu\|$ (m_1 – одномерная мера Лебега, $\|\mu\|$ – полная вариация μ). Можно ли в этом неравенстве заменить сечение $Q_y \cap \mathscr{X}$ проекцией Q_y на $\mathscr{X}$? Можно ли оценить емкость Q_y ?

<u>К вопросу № 2</u>. Возможна довольно точная оценка

$$C(E, \Sigma) \leq A e^{11|E||\Sigma|}$$

(неравенство $C(E,\Sigma) \geq \text{const}\, e^{\frac{\pi}{2}|E||\Sigma|}$ для двух отрезков E и Σ вытекает из рассмотрения собственной функции преобразования Фурье $f(x) = e^{-\pi x^2}$, в которой сделана подходящая линейная замена переменной). Этот результат приводит к следующей теореме единственности:

ТЕОРЕМА. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R})$, φ и ψ – убывающие перестановки $|f|$ и $|\hat{f}|$ соответственно (т.е., например, $\varphi : (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$, и для любого $y > 0$ $m_1\{t \in (0,+\infty) : \varphi(t) > y\}$ = $= m_1\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > y\}$). Если $\varliminf_{a,b \to +\infty} e^{11ab}\left(\int_a^\infty \varphi^2 + \int_b^\infty \psi^2\right) = 0$, то $f \equiv 0$. В частности, f и $\hat{f}$ не могут одновременно убывать по распределению как e^{-Bx^p} и $e^{-B'x^{p'}}$, если только $B^{1/p} B'^{1/p'} \geq 11$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$. Не совсем формальное выражение "f убывает по распределению как e^{-Bx^p}" означает здесь, что

$\Phi(x) = O(e^{-Bx^p})$ при $x \to +\infty$ или, другими словами, что для некоторой постоянной $C>0$ $|f(x)| < Ce^{-Bt^p}$ для всех $x \in \mathbb{R}$ за исключением, быть может, множества меры t $(t \geq t_0 > 0)$.

Последний результат интересно сравнить с теоремой Моргана ([6], 1934 г.), утверждающей, что из условий $|f(x)| = O(e^{-B|x|^p})$ $|\hat{f}(x)| = O(e^{-B'|x|^{p'}})$ $(x \to \pm\infty)$ следует, что $f \equiv 0$, если только $B^{1/p} B'^{1/p'} > a(p) = \frac{2\pi}{p^{1/p} p'^{1/p'}} \left|\cos\frac{\pi p'}{2}\right|^{1/p'}$ $\left(p \geq 2,\ p' = \frac{p}{p-1}\right)$, причем постоянная $a(p)$ неулучшаема. Заключение теоремы Моргана остается справедливым, если ограничиться быстрым убыванием f и $\hat{f}$ лишь на левой полуоси $\mathbb{R}_-$ (константу $a(p)$ в этом случае надо заменить на $b(p) = \frac{2\pi}{p^{1/p} p'^{1/p'}} \sin\frac{\pi}{p'}$). Хорошего аналога для убывания по распределению здесь получить не удается. Я могу доказать лишь, что носители функций f и $\hat{f}$ не могут одновременно пересекаться с $\mathbb{R}_-$ по множеству конечной меры. Верно также некоторое промежуточное утверждение: $\hat{f}$ не может убывать по распределению как $e^{-\varepsilon x^q}$ на левой полуоси, если $f \not\equiv 0$ убывает по распределению как $e^{-\varepsilon x^p}$ на всей оси и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$.

Для читателей, мало знакомых с предметом, не лишним будет, наверно, замечание, что конечность меры носителя $\hat{f}$ не накладывает фактически никаких локальных ограничений на поведение f: например, f может обратиться в 0 на последовательности интервалов со сколь угодно быстро растущими относительными длинами; так что условие $|\operatorname{supp}\hat{f}| < +\infty$ оказывается даже в некотором смысле слабее условия наличия спектрального люка: $\hat{f}|_I \equiv 0$ ($I \subset \mathbb{R}$ – невырожденный интервал) (см., например, [3]).

<u>К вопросу № 3</u>. В условиях теоремы Зигмунда справедлива оценка постоянной $C(E) \leq \exp\left(\frac{A_\varepsilon}{|E|^{4+\varepsilon}}\right)$ ($\varepsilon > 0$ – произвольное положительное число, $A_\varepsilon > 0$ зависит лишь от ε и M), откуда немедленно вытекает суммируемость $\log^{1/4-\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{|f|}\right)$ при всех $\varepsilon > 0$. К сожалению, мой подход не допускает переноса на произвольные S_p-системы с $p > 2$ (т.е. на подмножества $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, обладающие тем свойством, что $\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \text{const}\, \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$ для всех $f \in L^2(\mathbb{T})$ со спектром $\operatorname{spec} f \subset \Lambda$), в то время как благодаря Михееву ([1], 1975 г.) сейчас известно, что заключение теоремы Зигмунда сохраняется и в этой более общей ситуации (спектр Λ с ус-

ловием Зигмунда – простейший представитель S_4 –систем).

Под конец я хотел бы привести некоторые соображения относительно того, как мог бы здесь выглядеть правильный результат. Одну из теорем Мандельбройта ([4]) можно сформулировать следующим образом:

ТЕОРЕМА. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, $0<\alpha<1$. Следующие утверждения равносильны:

(а) для всех $k\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}$ $\operatorname{card}(\Lambda\cap[k-N,k+N])\leqslant \mathrm{Const}\cdot N^{\alpha}$

(в) для всех дуг $J\subset\mathbb{T}$ и функций $f\in L^2(\mathbb{T})$ со спектром $\operatorname{spec} f\subset\Lambda$

$$\int_J |f|^2 \leqslant \mathrm{Const}\,|J|^{1-\alpha}\,\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})}$$

(с) для всех дуг $J\subset\mathbb{T}$ и функций $f\in L^2(\mathbb{T})$ со спектром $\operatorname{spec} f\subset\Lambda$

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant \exp\left\{\mathrm{Const}\,|J|^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\}\int_J |f|^2 .$$

Утверждения (в) и (с) имеют естественные аналоги, в которых дуга J заменяется на произвольное множество $E\subset\mathbb{T}$ положительной меры. При этом (в) превращается почти в определение S_p – системы с $p=\frac{2}{\alpha}$, а (с) – почти в суммируемость $\log^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(1+\frac{1}{|f|}\right)$.

В результате возникает такая, на мой взгляд довольно симпатичная, гипотеза (ее, видимо, следует приписать С.В.Кислякову):

ГИПОТЕЗА (осторожный вариант). Пусть $\Lambda\subset\mathbb{Z}$, $2<p<+\infty$. Следующие утверждения почти равносильны (т.е. $(b)_p \Rightarrow (c)_{p-\varepsilon}$, $(c)_p\Rightarrow(b)_{p-\varepsilon}$ для любого $\varepsilon>0$)

$(в)_p$: Λ – S_p – система

$(с)_p$: $\sup\left\{\int_{\mathbb{T}} \log^{\frac{p-2}{2}}\left(1+\frac{1}{|f|}\right) : f\in L^2(\mathbb{T}), \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}=1, \operatorname{spec} f\subset\Lambda\right\}<+\infty.$

Насколько я знаю, пока не известна никакая импликация типа $(в)_p \Rightarrow (с)_q$ или $(с)_p \Rightarrow (в)_q$, а вопрос о том, что следует поставить в качестве $(а)_p$ (т.е. вопрос о полном арифметическом описании S_p –систем), вообще представляется трансцендентно трудным.

Литература

I. М и х е е в И.М. О рядах с лакунами. – Матем.сб. I975, 98, № 4, с.538–563.

2. З и г м у н д А. Тригонометрические ряды. т.I, 2. М., Мир, I965.

3. К а р г а е в П.П. Нелокальные почти дифференциальные операторы и интерполяция функциями с редким спектром. Матем.сб., I985, I28, № I, с.I33–I42.

4. М а н д е л ь б р о й т С. Квазианалитические классы функций. М.-Л., ГИТТЛ, I937.

5. A m r e i n W.O., B e r t h i e r A.M. On support properties of L^p -functions and their Fourier transforms. – J. Funct.Anal., 1977, 24, N 3, p.258-267.

6. M o r g a n J.W. A note on Fourier transform. J.Lond.Math. Soc., 1934, 9, N 3, p.187-192.

7. T u r a n P. Eine neue Methode in der Analyses und deres Anwendungen. Budapest, Akádémiai, Kiadó, 1953.

8. G a i e r D. Bemerkungen zum Turanshen Lemma. – Abhandlungen Math.Semin.Univ.Hamburg, 1970, 35, N 1-2, S.1-7.

F.L.Nazarov. On the theorems of Turan, Amrein-Berthier and Zigmund.

Summary

A rather sharp inequality of Turan's lemma type is obtained. Its applications to some uniqueness theorems are discussed. No proofs are given.