Л. В. Данилов, О некоторых классах трансцендентных чисел,
Матем. заметки, 1972, том 12, выпуск 2, 149–154

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 2 (1972), 149—154

УДК 511

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

Л. В. Данилов

Приведены некоторые классы чисел, позволяющих по заданному q-ичному разложению определить их арифметическую природу. Один из классов характеризуется тем, что для каждого числа класса можно одновременно указать q-ичное разложение и разложение в правильную цепную дробь. Библ. 1 назв.

Проблема определения трансцендентности числа по заданному его q-ичному разложению рассматривалась в работах Малера, Шнайдера, Фельдмана и ряда других математиков (см. [1]). В данной заметке описаны еще некоторые классы чисел, позволяющих по заданному q-ичному разложению определить их арифметическую природу.

До настоящего времени, по-видимому, не было построено примеров иррациональных чисел, для которых одновременно были бы известны их q-ичное разложение и разложение в правильную цепную дробь. Один из описываемых классов чисел характеризуется тем, что для каждого числа класса можно найти оба указанных разложения.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $k_1, k_2, \ldots$ — *произвольная последовательность натуральных чисел,* $L_0, L_1, \ldots$ — *другая последовательность, элементы которой определяются следующим рекуррентным соотношением:*

$$L_0 = 1,\ L_1 = 1,\ L_\nu = k_{\nu-1} L_{\nu-1} + L_{\nu-2};\quad \nu = 2, 3, \ldots \qquad (1)$$

и $\{c_j,\ j = 1, 2, \ldots\}$ — *третья последовательность чисел:* $c_1 = c_2 = \ldots = c_{k_1} = q - 1$, $q > 1$ — *натуральное;* $c_{k_1+1} = 0$; *если* r *и* m *таковы, что* $L_r < m \leqslant L_{r+1}$ $(r \geqslant 2)$, *то* $c_m = c_t$, *где* t — *наименьший положительный вычет* m *по модулю* L_r.

Предположим, что последовательность чисел после запятой в q*-ичном разложении некоторого числа* $0 < \alpha < 1$ *совпадает с* $\{c_j\}$. *Тогда*

1. *Разложение* α *в цепную дробь имеет вид*

$$\alpha = [0;\ a_1,\ a_2, \ldots],\ a_1 = 1;$$

$$a_n = q^{L_{n-2}} \sum_{i=0}^{k_{n-1}-1} q^{iL_{n-1}}; \quad n = 2, 3, \ldots \tag{2}$$

2. α — *трансцендентное число.*

ЛЕММА. *Пусть* p_k/q_k — k*-я подходящая дробь цепной дроби, определяемой выражением* (2). *Тогда*

а)

$$p_0 = 0;\ p_1 = 1;\ p_n = \sum_{i=1}^{L_n} b_i q^{L_n - i}; \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

$$b_r = \frac{c_r}{q-1}; \quad r = 1, 2, \ldots,$$

б)

$$q_0 = q_1 = 1; \quad q_n = \sum_{i=1}^{L_n} q^{L_n - i}; \quad n = 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Доказательство. Доказательство проводим индукцией по n. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$p_0 = 0;\ p_1 = 1;\ p_2 = q^{k_1} + q^{k_1 - 1} + \ldots + q + 0 \cdot q^0$$

и утверждение леммы выполнено для $n = 0, 1, 2$ [так как утверждения а) и б) леммы доказываются совершенно аналогично, то приводится лишь доказательство утверждения а)]. Пусть теперь равенство (3) уже доказано для всех n: $2 \leqslant n \leqslant m$. Так как

$$p_{m+1} = a_{m+1} p_m + p_{m-1},$$

то, подставляя сюда выражение для p_m и p_{m-1} из (3) и выражение для a_{m+1} из (2), убеждаемся, что последовательность коэффициентов при убывающих степенях q в выражений для p_{m+1} имеет следующий вид:

$$\underbrace{\underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_{L_m}}, \underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_{L_m}}, \ldots, \underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_{L_m}}}_{k_m \text{ раз}},$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_{L_{m-1}},$$

т. е. строится таким же образом, как совокупность первых L_{m+1} чисел последовательности $\{c_j\}$. При этом $b_r = 1$, если $c_r = q - 1$, и $b_r = 0$, если $c_r = 0$. Таким образом, утверждение а) леммы доказано.

Доказательство теоремы 1.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{L_k} b_i q^{L_k - i}}{\sum_{i=1}^{L_k} q^{L_k - i}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(q-1)\sum_{i=1}^{L_k} b_i q^{L_k - i}}{q^{L_k} - 1} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{L_k} b_i (q-1) q^{-i}.$$

Последнее выражение в силу леммы совпадает с q-ичным разложением числа α, откуда и следует утверждение п. 1 теоремы 1.

Докажем п. 2. Прежде всего, для любого $\nu \geqslant 0$:

$$\left| \alpha - \frac{p_\nu}{q_\nu} \right| < \frac{1}{a_{\nu+1} q_\nu^2}. \tag{5}$$

Пусть $\nu > 2$. Если $k_{\nu-1} = 1$, то в силу (1) $L_{\nu-1} > \frac{1}{2} L_\nu$, и, используя (2), получаем

$$a_{\nu+1} > q^{0,5 L_\nu}. \tag{6}$$

Если же $k_{\nu-1} > 1$, то в силу (2)

$$a_\nu > q^{L_{\nu-1}} > q^{0,5 L_{\nu-1}}. \tag{7}$$

Таким образом, для любой пары неполных частных a_ν, $a_{\nu+1}$, $\nu > 2$ выполнено хотя бы одно из неравенств (6) и (7). Тем самым существует бесконечная последовательность номеров $\nu = \nu_1, \nu_2, \ldots$ таких, что

$$a_{\nu_i + 1} > q^{0,5 L_{\nu_i}}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Согласно (4) имеем

$$q_\nu < q^{L_\nu}, \quad \nu \geqslant 2. \tag{9}$$

Используя в выражении (5) те индексы ν_i, для которых выполнено (8), получаем

$$\left|\alpha - \frac{p_{\nu_i}}{q_{\nu_i}}\right| < \frac{1}{q_{\nu_i}^{2,5}}; \quad i = 1, 2, \ldots,$$

откуда по теореме Рота [1] заключаем, что α — трансцендентное число. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $p > 2$ — фиксированное натуральное число. Каждому натуральному k поставим в соответствие целое рациональное число ν_k, обладающее тем свойством, что*

$$p^{\nu_k} \mid k, \quad p^{\nu_k+1} \nmid k.$$

Пусть $c \geqslant 1$ — произвольное число и $b_0, b_1, \ldots$ — произвольная последовательность целых рациональных чисел из отрезка $[0, c]$, обладающая тем свойством, что для любого $N > 0$ среди чисел $b_n, b_{n+1}, \ldots, n > N$ найдется хотя бы одна пара различных. Образуем последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots,$ связанную с предыдущей последовательностью следующим образом:

$$a_i = b_{\nu_i}; \quad i = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Тогда функция

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

принимает трансцендентные значения при $x = a/b$; a, b — произвольные натуральные числа, $(a, b) = 1$,

$$a^p < b^{p-2}. \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^{p^k}}{1 - x^{p^k}}; \quad |x| < 1; \tag{12}$$

$$c_0 = b_0; \quad c_k = b_k - b_{k-1}; \quad k = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Представляя каждое слагаемое в (12) в виде ряда по степеням x и собирая коэффициенты при одинаковых степенях, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^{p^k}}{1-x^{p^k}} = \sum_{i=1}^{\infty} d_i x^i; \; d_m = \sum_{j=0}^{\nu_m} c_j; \; m = 1, 2, \ldots \quad (14)$$

или в силу (10) и (13)

$$d_m = b_{\nu_m} = a_m; \quad m = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, определенная в условии теоремы 2 функция $F(x)$ равна

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^{p^k}}{1-x^{p^k}}. \quad (15)$$

Подставим в правую часть (15) вместо x рациональное число a/b, определенное условием (11), и покажем, что

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{p^k}}{b^{p^k}-a^{p^k}} \quad (16)$$

есть трансцендентное число.

Прежде всего ряды (15) и (16) имеют бесконечное число отличных от нуля слагаемых, так как в противном случае из условия $c_k = 0$ для любого $k > N$ следовало бы в силу (13) $b_{k-1} = b_k = \ldots$, что противоречит условию теоремы. Рассмотрим сумму $n+1$ первых членов ряда (16):

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{a^{p^k}}{b^{p^k}-a^{p^k}} = \frac{A_n}{b^{p^n}-a^{p^n}},$$

A_n — целое. Отсюда и из (16), учитывая, что $|c_k| \leqslant c$, получаем

$$\left| F\left(\frac{a}{b}\right) - \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{a^{p^k}}{b^{p^k}-a^{p^k}} \right| = \left| F\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{A_n}{b^{p^n}-a^{p^n}} \right| < \\ < \frac{\lambda a^{p^{n+1}}}{b^{p^{n+1}}-a^{p^{n+1}}},$$

где λ — константа, которую можно выбрать не зависящей от n. Обозначим $(b^{p-2})/(a^p) = b^{\varepsilon}$. В силу (11) $\varepsilon > 0$. Далее:

$$\frac{a^{p^{n+1}}}{b^{p^{n+1}} - a^{p^{n+1}}} = \frac{1}{\left(\frac{b^{p-2}}{a^p}\right)^{p^n} \cdot b^{2p^n} - 1} = \frac{1}{b^{(2+\varepsilon)p^n} - 1} <$$

$$< \frac{1}{\left(b^{p^n} - a^{p^n}\right)^{2+\varepsilon}}.$$

Таким образом,

$$\left| F\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{A_n}{b^{p^n} - a^{p^n}} \right| < \frac{\lambda}{\left(b^{p^n} - a^{p^n}\right)^{2+\varepsilon}}.$$

Отсюда по теореме Рота заключаем, что $F(a/b)$ — трансцендентное число. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы 2 легко усмотреть, что утверждение теоремы останется справедливым, если для чисел последовательности $b_0, b_1, \ldots$ допустить не слишком быстрый рост. Например, можно положить $b_k \leqslant m^k$, $k = 0, 1, \ldots,$ $m > 1$ — произвольное фиксированное число.

В качестве непосредственного следствия теоремы 2 получаем следующую теорему о трансцендентности некоторых чисел, заданных своим q-ичным разложением.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2, причем $c = q - 1$, $q > 1$ — натуральное, $a = 1$, $b = q$. Тогда число α, q-ичное разложение которого имеет вид*

$$\alpha = 0,\ a_1\ a_2 \ldots,$$

есть трансцендентное число.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И. Н. Блинову за обсуждение работы и полезные замечания.

Ленинградский электротехнический институт

Поступило 7.IV.1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Фельдман Н. И., Шидловский А. Б., Развитие и современное состояние теории трансцендентных чисел, Успехи матем. наук, **22**, № 3 (135) (1967), 3—81.