S. A. Vakulenko, Justification of asymptotic formula for the solutions of perturbed Fock–Klein–Gordon equation, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 104, 84–92

С.А.Вакуленко

ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ФОКА-ГОРДОНА

В последнее время получили широкое распространение различные асимптотические методы для нелинейных уравнений в частных производных. Возможна как вариационная формулировка этих методов [I], так и подход, связанный с разложениями в ряды [2-4]. Задача обоснования асимптотических формул в общем случае представляется весьма сложной. В настоящей работе предлагается способ такого обоснования для уравнения Клейна-Фока-Гордона (КФГ)

$$u_{tt}-c^2u_{xx}+m^2u=\varepsilon R[u], \qquad \varepsilon \ll 1,$$

возмущенного некоторым малым нелинейным оператором $\varepsilon R[u]$, m и c - постоянные.

I. Постановка задачи и вывод системы интегральных уравнений

Рассмотрим смешанную задачу

$$u_{tt}-c^2u_{xx}+m^2u=\varepsilon R(u,u_x,u_{xx},\varepsilon t),$$
$$u|_{t=0}=a\cos x, \quad u_t|_{t=0}=-a\omega\sin x, \qquad (\text{I.I})$$

где $\omega^2=c^2+m^2$, $m\neq 0$, с граничными условиями 2π - периодическими по x

$$u(x+2\pi)=u(x) \qquad (\text{I.I}')$$

Предположим, что функция R - аналитическая функция переменных u, u_x, u_{xx} и дважды непрерывно дифференцируемая функция от $\varepsilon t=\tau$. Данная задача представляет собой задачу о деформации синусоидальной волны под действием возмущения εR. Формальное асимптотическое разложение (при $\varepsilon\to 0$) решений (I.I) было найдено в [5]. Главный член этого разложения имеет вид

$$u_0=a\cos z. \qquad (\text{I.2})$$

При этом амплитуда a и фаза $z=x-\omega t+b$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{da}{d\tau}=(2\omega)^{-1}f_1(a), \qquad \frac{db}{d\tau}=(2\omega)^{-1}g_1(a) \qquad (\text{I.3})$$

где

$$f_1(a)=\pi^{-1}\int_0^{2\pi} R(u_0,u_{0z},u_{0zz},\tau)\sin z\,dz,$$
$$g_1(a)=\pi^{-1}\int_0^{2\pi} R(u_0,u_{0z},u_{0zz},\tau)\cos z\,dz \qquad (I.4)$$

Возникает, однако, вопрос – действительно ли первое приближение близко к точному решению на временах порядка ε^{-1} при $\varepsilon\to 0$ Этот вопрос тем более естествен, так как даже само существование решения u задачи (I.I), (I.I$'$) далеко не очевидно заранее.

В настоящей работе показано, что решение задачи существует на промежутке времени $J(\ell)=[0,\ell\cdot\varepsilon^{-1}]$ при достаточно малом ε. Кроме того, оно является аналитической функцией x в некоторой полосе $T_\sigma=\{x:|Jm\,x|\leq\sigma\},\sigma>0$, , и удовлетворяет внутри нее оценке:

$$u=a\cos z+\varepsilon v(x,t),\qquad \max_{x\in T_\sigma}|v(x,t)|<K \qquad (I.5)$$

Положительные константы ℓ и K зависят только от максимума модуля функции $R(u,u_x,u_{xx},\tau)$ в области $|u|<ae^{\sigma}$, $|u_x|<ae^{\sigma}$, $|u_{xx}|<ae^{\sigma},\tau\leq 1$.

Приступим к решению задачи. Представим функцию $u(x,t)$ в виде

$$u=u_0+\varepsilon v=a\cos z+\varepsilon v(z,t) \qquad (I.6)$$

и перейдем в уравнении (I.I) к переменным (z,t), $z=x-\omega t+b(\tau)$, $b(\tau)$ удовлетворяет (I.3). Для функции $v(z,t)$ получим задачу

$$\begin{cases} v_{tt}-2\omega v_{tz}+m^2v_{zz}+m^2v=\Phi_0(z,\tau)+\varepsilon\Phi_1(v,v_z,v_{zz},z,\tau)-2\varepsilon b v_{tz} \\ v|_{t=0}=0, \qquad v_t|_{t=0}=0, \qquad v(z+2\pi)=v(z) \end{cases} \qquad (I.7)$$

где обозначено:

$$\Phi_0=R(u_0,u_{0z},u_{0zz},\tau)-2\omega u_{0z\tau},\ \Phi_1=(b\omega-2\varepsilon b^2)v_{zz}-\varepsilon b_{\tau\tau}v_z+2u_{0\tau z}b_\tau-$$
$$-u_{0\tau\tau}+\varepsilon^{-1}\big(R(u_0,u_{0z},u_{0zz},\tau)-R(u_0+\varepsilon v,u_{0z}+\varepsilon v_z,u_{0zz}+\varepsilon v_{zz})\big) \qquad (I.8)$$

Для решения задачи (I.7) воспользуемся методом Галеркина 6 . Возьмем отрезок ряда Фурье:

$$v^{(N)}(z,t)=\sum_{k=-N}^{N} v_k^{(N)}(t)e^{ikz},\ v_k=v_{-k}^{*}, \qquad (I.9)$$

и подставим его в (I.7), наложив в стандартные требования ортогональности по отношению к системе функций $\{e^{ikz}\}, k=0\neq 1,\pm 2,\dots \pm N$ [6]. Для коэффициентов Фурье $\vartheta_k(t)$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2}{dt^2}\vartheta_k - 2\omega i k\frac{d}{dt}\vartheta_k + m^2(1-k^2)\vartheta_k = \Phi_{0k} + \varepsilon\Phi_{1k}(\vartheta,\tau) - 2\varepsilon b i k\frac{d}{dt}\vartheta_k \qquad \text{(I.10)}$$

$$\vartheta_k(0) = \frac{d}{dt}\vartheta_k\Big|_{t=0} = 0$$

Индекс N в дальнейшем будем иногда, для краткости, опускать. Систему (I.9) легко свести к системе интегральных уравнений. Имеем:

$$\vartheta_k(t) = \int_0^t G_k(t,s)\Big(\Phi_{0k} + \varepsilon\Phi_{1k}(\vartheta(s),\varepsilon s) - 2\varepsilon b(\varepsilon s) i k\frac{d}{ds}\vartheta_k\Big)ds, \qquad \text{(I.II)}$$

где $G_k(t,s) = (\exp i\lambda_k^{+}(t-s) - \exp i\lambda_k^{-}(t-s))(2i\sqrt{c^2k^2+m^2})^{-1}$, $\lambda_k^{\pm} = \omega k \pm\sqrt{c^2k^2+m^2}$. Интегрируя последнее в (I.II) по частям, окончательно получим:

$$\vartheta_k(t) = \int_0^t G_k(t,s)(\Phi_{0k} + \varepsilon\Phi_{1k}(\vartheta(s),\varepsilon s)ds + 2\varepsilon\int_0^t [b(\varepsilon s)G_k'(t,s)]_s\, i k\vartheta_k(s)ds,$$

$$(k=\pm 0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\dots \pm N). \qquad \text{(I.I2)}$$

Уравнения (I.I2) представляют собой систему $2N+1$ интегральных уравнений для вектор-функции $(\vartheta_k(t))$, которая ниже обозначается просто $\vartheta(t)$. Заметим, что в правую часть (I.I2), ввиду формул (I.8) входят функции a, a_τ, b_τ, b. В дальнейшем предполагается, что величина ℓ выбирается так, что все эти функции равномерно ограничены некоторой константой $K_1 > 0$. (Это возможно в силу (I.3)).

В следующем пункте будет показано, что уравнения (I.I2) имеют решение на некотором интервале $J(\ell)=[0,\ell\varepsilon^{-1}]$. Это решение допускает оценки, равномерные по N и ε, при достаточно малом ε. Используя это, в пункте 3 мы перейдем к пределу при $N\to\infty$ и этим завершим построение решения задачи (I.I, I.I').

2. Существование решения системы интегральных уравнений (I.I2).

Мы получим решение уравнения (I.I2) при помощи метода последовательных приближений, используя специальные нормы для вектора ϑ.

Введем семейство норм, зависящее от положительного параметра σ на множестве $2N+1$ - векторов ϑ:

$$\|\vartheta\|_{\sigma,p} = \max_k |\vartheta_k| \exp\sigma(|k|+1)\cdot(1+|k|)^{2p},\ p\geq 1,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\dots \pm N. \qquad \text{(2.I)}$$

Исследуем сначала некоторые свойства этих норм. Построим по двум векторам v, w функции $v(z), w(z)$:

$$v(z)=\sum_{|k|\le N} v_k e^{ikz}, \qquad w(z)=\sum_{|k|\le N} w_k e^{ikz}, \tag{2.2}$$

и оценим коэффициенты Фурье $v(z)w(z)$. Заметим, что

$$|(vw)_k| \le \sum_{|k|\le N} |v_n w_{k-n}| \le \|v\|_{\sigma,p}\|w\|_{\sigma,p}\sum_{-\infty}^{+\infty}(1+|n|)^{-2p}(1+|n-k|)^{-2p}\exp(-\sigma(2+|n|+|n-k|))$$

$$< \|v\|_{\sigma,p}\|w\|_{\sigma,p} e^{-\sigma} e^{-\sigma(1+|k|)} \sum_{-\infty}^{\infty}(1+|n|)^{-2p}(1+|n-k|)^{-2p}. \tag{2.3}$$

Бесконечный ряд в (2.3) оценивается следующим образом:

$$\sum(1+|n|)^{-2p}(1+|n|)^{-2p} \le \sum\left(\left(\tfrac{1}{2}+|n|\right)^{-1}+\left(\tfrac{1}{2}+|n-k|\right)^{-1}\right)^{2p}(1+|n|+|n-k|)^{-2p} \le$$

$$\le (1+|k|)^{-2p}\sum\left(\tfrac{1}{2}+|n|\right)^{-2p} 2^{2p}, \tag{2.4}$$

равномерно по N, при $p \ge 1$. Через $K_1, K_2, K_3 \ldots$ и т.д. будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от N, ε, ℓ. Из (2.4) и (2.3) выводим, что

$$|(v(z)w(z))_k| \le e^{-\sigma(1+|k|)}(1+|k|)^{-2p}\|v_1\|_{\sigma,p}\|w\|_{\sigma,p}\cdot K_2. \tag{2.5}$$

Аналогично, по индукции можно показать, что

$$|(v_1(z)v_2(z)\ldots v_n(z))_k| \le e^{-\sigma(1+|k|)}(1+|k|)^{-2p}\|v_1\|_{\sigma,p}\|v_2\|_{\sigma,p}\ldots\|v_n\|_{\sigma,p}K_2^{n-1}. \tag{2.6}$$

Пусть теперь $f(v_1, v_2, v_3)$ – аналитическая функция в окрестности точки $(0,0,0)$. Пусть $v_1(z), v_2(z), v_3(z)$ – конечные суммы Фурье

$$v_j=\sum_{-N}^{N} v_{kj} e^{ikz} \qquad j=1,2,3. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в $f(v_1, v_2, v_3)$, получаем аналитическую периодическую функцию $f(z)$. Оценим коэффициенты Фурье функции $f(z)$. Для этого разложим f в ряд

$$f(v_1,v_2,v_3)=\sum_{m_1 m_2 m_3 \ge 0} F_{m_1 m_2 m_3} v_1^{m_1} v_2^{m_2} v_3^{m_3}. \tag{2.8}$$

Применяя к каждому члену этого ряда оценку (2.5), мы получим:

$$|f_k| < e^{-\sigma(|k|+1)}(1+|k|)^{-2p}\sum_{m_1 m_2 m_3}|F_{m_1 m_2 m_3}|K_2^{m_1+m_2+m_3-1}\|v_1\|_{\sigma,p}^{m_1}\|v_2\|_{\sigma,p}^{m_2}\|v_3\|_{\sigma,p}^{m_3} \tag{2.9}$$

Этот результат верен, если ряды сходятся. Если функция f аналитична в поликруге $\mathcal{D}_z=\{v: |v_j|<r\}$ и $|f|$ M в $\mathcal{D}_r$, то

по формуле Коши, согласно [7, теорема (2.2.7)] , имеем

$$F_{m_1m_2m_3}\leqslant M\,\tau^{-(m_1+m_2+m_3)} \tag{2.10}$$

Кроме того, при $p\geqslant 1$

$$\max_{z\in T_\sigma}|v(z)|\leqslant\sum_{-N}^{N}|v_k|e^{\sigma|k|}\leqslant\|v\|_{\sigma,p}\sum_{-\infty}^{+\infty}(1+|k|)^{-2p}\leqslant K_3\|v\|_{\sigma,p} \tag{2.11}$$

Из (2.10), (2.11) вытекает, что ряды сходятся, если $\|v_j\|_{\sigma,p}\leqslant\frac{1}{2}\min(\tau(K_2K_3)^{-1},\tau K_2^{-1})$. При этом условии

$$|f_k|\leqslant 8Me^{-\sigma(1+|k|)}(1+|k|)^{-2p} \tag{2.12}$$

Пусть $\|v\|_{\sigma,2}\leqslant K_4$. Оценим Φ_{1k} - коэффициент Фурье выражения $\Phi_1(v,\tau)$, определенного формулой (1.8). Для этого к разности $R(u_0,u_{0z},u_{0zz})-R(u_0+\varepsilon v,u_{0z}+\varepsilon v_z,u_{0zz}+\varepsilon v_{zz})$ применяется теорема о среднем и затем оценки (2.12), (2.5). Величину ε мы должны считать настолько малой, чтобы ряды для $\frac{\partial R}{\partial u},\frac{\partial R}{\partial u_z},\frac{\partial R}{\partial u_{zz}}$ сходились. Обозначим $M(A)$ - максимум модуля R в полукруге $\mathcal{D}_\tau$, $\tau=e^{\sigma}A$, $A=\max|a(\tau)|$ при $0\leqslant\tau\leqslant\ell$. Тогда

$$|\Phi_{1k}(v)|\leqslant(1+|k|)^{-2}e^{-\sigma(1+|k|)}K_5(M(A)) \tag{2.13}$$

Запись $K_5(M(A))$ означает, что K_5 зависит от $M(A)$ (но она не зависит от N и ε). Легко видеть также, что

$$|\Phi_{0k}|\leqslant(1+|k|)^{-2}e^{-\sigma|k|}K_6,\quad\left|\frac{d}{d\tau}\Phi_{0k}\right|\leqslant(1+|k|)^{-2}e^{-\sigma|k|}K_7. \tag{2.14}$$

Для дальнейшего, кроме (2.13) и (2.14), потребуется еще оценка разности $\Phi_{1k}(v)-\Phi_{1k}(\bar v)$, где $v,\bar v$ - два $2N+1$ - вектора. Предположим, что $\|v\|_{\sigma,2}\leqslant K_4,\|\bar v\|_{\sigma,2}\leqslant K_4$. По теореме о среднем

$$\Phi_{1k}(v)-\Phi_{1k}(\bar v)=\widetilde{\frac{d\Phi}{dv}}(v-\bar v)+\widetilde{\frac{d\Phi}{dv_z}}(v-\bar v_z)+\widetilde{\frac{d\Phi}{dv_{zz}}}(v_{zz}-\bar v_{zz}) \tag{2.15}$$

В (2.15) производные отмечены тильдой, так как они берутся, вообще говоря, в различных средних точках на прямой между (v,v_z,v_{zz}) и $(\bar v,\bar v_z,\bar v_{zz})$. (Разумеется, $v(z)$ определено формулой вида (2.7)). Коэффициенты Фурье от всех трех производных оцениваются точно также, как и $\Phi_{1k}(v)$, по неравенству (2.13). Применяя (2.5), легко видеть, что

$$|\Phi_{1k}(v)-\Phi_{1k}(\bar v)|\leqslant(\exp-\sigma(1+|k|))(1+|k|)^{-2}K_8(M(A))\,\|v-\bar v\|_{\sigma,2} \tag{2.16}$$

Имея (2.13-2.16), приступим к непосредственному анализу (I.12). Правая часть (I.12) задает некоторый оператор $T(v)$, который определим на множестве непрерывных вектор-функций $v(t).t\in J(\ell)$ В дальнейшем некоторые трудности вызывают тот факт, что в правой части (I.12) возникает нескомпенсированный множитель порядка K. Чтобы обойти эти трудности, по аналогии с работами [10, 11] вводим нормы, зависящие от времени. Введем функцию

$$\sigma(t)=2\sigma-\tfrac{1}{2}\ell^{-1}\varepsilon t\sigma \tag{2.17}$$

При $t\in J(\ell)$ будет $\sigma(t)\geq\frac{3}{2}\sigma$. Пользуясь (2.17), введем на множестве непрерывных функций $v(t)$ норму

$$\|v(t)\|=\max_{t\in J(\ell)}\|v(t)\|_{\sigma(t),2} \tag{2.18}$$

Обозначим V_K множество непрерывных функций $v(t)$, таких что

$$\|v(t)\|\leq K,\quad K=K_4. \tag{2.19}$$

Покажем, что существует такое ℓ, что на интервале $J(\ell)$ будет: $T: V_K\to V_K$ и константа сжатия оператора меньше I. Действительно, так как $|G_K(t,s)|<K_9(1+|K|)^{-1}$ в силу (I.II), то

$$\varepsilon\int_0^t|\Phi_{1K}(v,s)-\Phi_{1K}(\bar v)||G_K(t,s)|ds\leq\|v-\bar v\|(1+|K|)^{-3}K_9K_8\cdot\int_0^t e^{-\sigma(s)(1+|K|)}ds \tag{2.20}$$

Принимая во внимание (2.17), легко берем интеграл и находим, что

$$\left|\varepsilon\int_0^t(\Phi_{1K}(v,s)-\Phi_{1K}(\bar v,s))G_K(t,s)ds\right|\leq\|v-\bar v\|(1+|K|)^{-4}K_{11}\ell\cdot e^{-\sigma(t)(1+|K|)} \tag{2.21}$$

Второй интеграл в правой части (I.12) оценивается с учетом того, что $\frac{\partial}{\partial s}[G(t,s)2b(\varepsilon s)]\leq K_{12}$. Таким образом,

$$\|T(v)-T(\bar v)\|\leq\ell\|v-\bar v\|K_{13}\leq\tfrac{1}{2}\|v-\bar v\| \tag{2.22}$$

если $\ell\leq\frac{1}{2}K_{13}^{-1}$. Осталось показать, что T - отображение в себя. Для этого оценим $\int_0^t G_K(t,s)\Phi_{0K}(\varepsilon s)\,ds$. (для оценки остальных слагаемых в (I.12) достаточно взять (2.22), положив $\bar v=0$ и учесть, что $\|v\|\leq K$). В этом интеграле интегрируем по частям при $|K|\neq 1$. При $|K|=1$ $\Phi_{0K}\equiv 0$, так как (см. [5, 8]) уравнения (I.3) как раз эквивалентны тому, что $\int_0^{2\pi}\Phi_0 e^{\pm iz}dz=0$. Получаем:

$$\left|\int_0^t G_K(t,s)\Phi_{0K}(\varepsilon s)ds\right|\leq\varepsilon\left|\int_0^t\int_0^s G_K(t,s')ds'\cdot\frac{d}{d\tau}\Phi_{0K}ds\right|+\left|\int_0^t G_K(t,s)ds\right|\cdot|\Phi_{0K}(\varepsilon t)|$$

Очевидно (из (I.II) - явной формулы для G_K), что $\left|\int_0^t G_K(t,s)ds\right| \leq K_{14}$ при $|K| \neq 1$. Отсюда

$$\left|\int_0^t G_K(t,s)\Phi_{0K}(\varepsilon s)ds\right| \leq (1+|K|)^{-4} e^{-6(t)(1+|K|)} e K_{15}, t \in J(\ell) \qquad (2.23)$$

Из (2.23) и (2.22) вытекает, что при $\ell \leq (K_{15}+K_{13}K)^{-1} T$ - отображение „$\mathcal{B}$". Таким образом, если ℓ удовлетворяет неравенствам

$$\ell \leq (K_{15}+K_{13}K_4)^{-1}, \; \ell \leq \frac{1}{2}K_{13}^{-1}$$

то T - сжатие и решение $v(t)$ системы уравнений (I.I2) существует. Кроме того, оно удовлетворяет оценке (так как $\sigma(t) \geq \frac{3}{2}\sigma$):

$$|v_K(t)| \leq K_4(1+|K|)^{-4} e^{-\frac{3}{2}\sigma(1+|K|)} \qquad (2.24)$$

Из самого уравнения (I.I2) вытекает, что эти решения - дважды непрерывно дифференцируемые функции времени t, и следовательно, они удовлетворяют также (I.I0) - соответствующим дифференциальным уравнениям. Непосредственно из (I.I2) вытекают оценки производных.

$$\left|\frac{d}{dt}v_K\right|, \left|\frac{d^2}{dt^2}v_K\right| \leq K_{16}(1+|K|)^{-2} e^{-\frac{3}{2}\sigma(1+|K|)} \qquad (2.25)$$

3. Переход к пределу $N \to \infty$.

Применяя рассуждения п.2, для каждого натурального $N > 0$ строим решение $v_K^{(N)}(t)$ системы (I.I0), удовлетворяющее (2.25), равномерно по N и ε. Строим функции $v^{(N)}(z,t)$ по формуле

$$v^{(N)}(z,t) = \sum_{K=-N}^{N} v_K(t) e^{iKz}$$

Эти функции, очевидно, аналитические и равномерно ограничены в полосе $T_{5/4\sigma}$, более узкой, чем $T_{3/2\sigma}$. Действительно,

$$\max_{z \in T_{5/4\sigma}} |v^{(N)}(z,t)| < \sum_{K=-N}^{-N} |v_K| e^{5/4\sigma|K|} \leq K_{16} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4}\sigma|K|} \leq K_{17} \qquad (3.I)$$

Аналогично и для производных $\frac{d}{dt}v^{(N)}(z,t), \frac{d^2}{dt^2}v^{(N)}(z,t)$.

Согласно принципу компактности для пространств аналитических функций [9], из последовательности $\{v^{(N)}\}$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{v^{(N_n)}\}, N_1 < N_2 < N_3 < \ldots$, что

$$\lim_{n\to\infty} \vartheta^{(N_n)}(z,t)=\vartheta(z,t),\ \frac{\partial}{\partial t}\vartheta^{(N_n)}(z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\vartheta(z,t),\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vartheta^{(N_n)}(z,t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vartheta(z,t) \qquad (3.2)$$

причем равномерно в полосе $T_{\sigma_1}, \sigma_1=9/8\,\sigma$. Покажем, что $\vartheta(z,t)$ - искомое решение нашей задачи. Ограниченность $\vartheta(z,t)$ и ее производных вытекает непосредственно из (3.I) и (3.2). Будем подставлять $\vartheta^{(N_n)}(z,t)$ в основное уравнение (I.7) нашей задачи, причем все члены в (I.7) перенесем в левую часть. Тогда в левой части (I.7) будет возникать невязка, которая является аналитической функцией $-R^{(N_n)}(z,t)$. Функции $R^{(N_n)}(z,t)$, по самому построению, таковы, что их коэффициенты Фурье $R_K^{(N_n)}$ обращаются в ноль при $|K|>N_n$. Кроме того $R^{(N_n)}$ ограничены в T_{σ_1}. Оценим их максимум в T_σ:

$$\max_{T_\sigma}|R^{(N_n)}(z,t)|\leqslant\sum_{K=-\infty}^{+\infty}|R_K^{(N_n)}|e^{|K|\sigma}\leqslant\Big(\sum_{|K|\geqslant N_n} e^{-|K|\frac{1}{8}\sigma}\Big)K_{18}\to 0 \text{ при } n\to\infty \qquad (3.3)$$

Тем самым, в силу (3.3) предельная функция $\vartheta(z,t)$ должна удовлетворять (I.7). Сделаем несколько замечаний. Равномерность всех оценок по N объясняется просто тем, что все суммы в оценках можно заменить на сходящиеся бесконечные ряды. Величина ℓ, определяющая длину интервала времени, на котором существует решение, определяется величиной a (амплитудой начального возмущения) и свойствами возмущения $\varepsilon R[u]$, а также выбором σ. Константа $\sigma>0$ - ширина полосы, в которой решение аналитично - может быть выбрана любой, так как начальные данные аналитичные во всей плоскости z, но увеличение σ приводит к уменьшению $\ell(\sigma,a)$.

Наш результат верен также для случая, когда c, m - функции медленного времени $\varepsilon t=\tau$, не обращающиеся в ноль. Можно предполагать также, что начальные данные (I.I) слабо возмущены:

$$u|_{t=0}=a\cos x+\varepsilon u_1(x), \qquad u_t|_{t=0}=-a\omega\sin x+\varepsilon u_2(x),$$

u_1, u_2 - аналитические функции от x. В неаналитическом случае теорема верна, если R не зависит от u_{xx}: $R=R(u,u_x,\varepsilon t)$. Решение при этом принадлежит классу $C^m, m\geqslant 2$, если $u_1,u_2\in C^m$.

В заключение автор приносит глубокую благодарность И.А.Молоткову, В.М.Бабичу, Я.В.Курылеву, М.М.Попову, В.Б.Филиппову и всем участникам семинара по дифракции волн (ЛОМИ) за ценные советы, указания и обсуждения.

Литература

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., 1977, 622 с.
2. Luke I.C. A perturbation method for non-linear dispersive wave problems, Proc.Roy.Soc.(London), 1966, A292, p.403-412.
3. Kaup D.I. A perturbation expansion for the Zakharov-Shabat inverse scattering transforme. - SIAM J.Appl.Math., 1976, v.31, N 1, p.121-133.
4. Карпман В.И., Маслов Е.М. Теория возмущений для солитонов - ЖЭТФ, 1977, т.2, вып.8, с.537.
5. Montgomery D., Tidman D.A. Secular and nonsecular behavior for cold plasma equation.Phys.Fluids,1964,7,242-249.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М., 1973, 407 с.
7. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, М., 1968, 277 с.
8. Найфэ А. Методы возмущений., М., 1976, 455 с.
9. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М., 1968, 646 с.
10. Овсянников Л.В. Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств. - Докл.АН СССР,1971, т.200, № 4, с.789-792.
11. Nirenberg L. An obstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem. - J.Diff.Geom., 1972, vol.6, p.561-576.

Vakulenko S.A. Justification of asymptotic formula for the solutions of perturbed Fock-Klein-Gordon equation.

The Fock-Klein-Gordon equation, perturbed by the small non--linear operator $\varepsilon R(\varepsilon t, u, u_x, u_{xx})$ is considered:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + m^2 u = \varepsilon R(\varepsilon t, u, u_x, u_{xx}),\quad 0<\varepsilon \ll 1.$$

The boundary condition and the initial data are periodical

$$u(x+2\pi) = u(x);\ u|_{t=0} = a\cos x;\ u|_{t=0} = a\omega \sin x;\ \omega^2 = c^2+m^2.$$

It is proved (if some additional conditions are realised) that 1) the solution of the problem exists on an interval $0 \leqslant t \leqslant \frac{\ell}{\varepsilon}$, $\ell = \mathrm{const.} > 0$ and that 2) the difference between u and the known asymptotic solution of the problem is small.