А. Е. Кулаго, В. П. Шкадова, В. Я. Шкадов, К гидродинамической теории нанесения тонкослойных покрытий на движущиеся поверхности, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1993, номер 2, 95–100

https://www.mathnet.ru/vmumm2361

2. Козлов В. В. Вихревая теория волчка//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1990. № 4. 56—62.
3. Бурбаки Н. Интегрирование. М., 1970.

Поступила в редакцию
10.09.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 532.62

А. Е. Кулаго, В. П. Шкадова, В. Я. Шкадов

К ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НАНЕСЕНИЯ ТОНКОСЛОЙНЫХ ПОКРЫТИЙ НА ДВИЖУЩИЕСЯ ПОВЕРХНОСТИ

В работе [1] предложена первая математическая модель для расчета толщины слоя вязкой жидкости, образующегося на плоской твердой поверхности при извлечении ее из жидкого объема. В [2] дано обобщение на осесимметричный случай. Существенный недостаток примененного в [1, 2] подхода состоит в том, что он не позволяет учесть конвективные члены, роль которых возрастает с увеличением скорости движения твердой поверхности. В настоящей статье разработан метод расчета формы свободной поверхности, пригодный при конечных скоростях извлечения.

Выпишем основные уравнения для осесимметричного течения в цилиндрической системе координат r, z; уравнения для плоского течения получаются как частный случай. Пусть цилиндр бесконечной длины движется вдоль своей оси z с постоянной скоростью V через жидкий объем, ограниченный свободной поверхностью $z=0$. Вследствие прилипания вязкая жидкость выносится из жидкого объема в виде тонкого слоя увлечения на твердой поверхности $r=R$. Выход цилиндра из жидкого объема сопровождается образованием мениска под действием сил поверхностного натяжения. Возмущенная поверхность жидкости, объединяющая слой увлечения и мениск, непрерывно и гладко сопрягающиеся в промежуточной области, задается уравнением

$$r=s(z).$$

Определение $s(z)$ представляет основную цель исследования.

Течение жидкости описывается уравнениями Навье—Стокса, граничными условиями прилипания на теле и условиями для напряжений на возмущенной поверхности [3]. Введем безразмерные переменные соотношениями

$$\begin{gathered} r=R+h_0\eta,\ z=l\xi,\ v_r=h_0l^{-1}Uv,\ v_z=Uu, \\ p=p_a-\sigma h_0l^{-1}\varkappa+\rho U^2(Ul\nu^{-1})\tilde{p},\ s=R+h_0H(\xi). \end{gathered} \tag{1}$$

Тогда получим следующие уравнения:

$$\begin{gathered} \Delta u-A\frac{d\varkappa}{d\xi}-F-\delta^2\tilde{p}_\xi=c(uu_\xi+vu_\eta), \\ \Delta v-\varepsilon^2\tilde{r}^{-2}v-\tilde{p}_\eta=c(uv_\xi+vv_\eta), \\ (\tilde{r}u)_\xi+(\tilde{r}v)_\eta=0. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\varkappa=(1+\delta^2H'^2)^{-\frac{3}{2}}\left[-H''+\varepsilon\delta^{-2}\frac{1+\delta^2H'^2}{1+\varepsilon H}\right],$$
$$\Delta f=\frac{1}{\widetilde{r}}(\widetilde{r}f_\eta)_\eta+\delta^2 f_{\xi\xi},\quad \widetilde{r}=1+\varepsilon\eta. \qquad (3)$$

Граничные условия принимают вид

$$\eta=0:u=1,\ v=0;$$
$$\eta=H:uH'=v,\ u_\eta+\delta^2\left(v_\xi+4\frac{H'}{1-\delta^2H'^2}v_\eta\right)=0; \qquad (4)$$
$$\widetilde{p}=2\frac{1+\delta^2H'^2}{1-\delta^2H'^2}v_\eta;$$
$$H(\xi)\to\infty \text{ при } \xi\to 0. \qquad (5)$$

Краевая задача (1)—(5) содержит следующие безразмерные коэффициенты:

$$\delta=\frac{h_0}{l},\ \mathrm{Ca}=\frac{U\mu}{\sigma},\ F=\varepsilon^2\frac{gR^2}{U\nu},$$
$$A=\delta^3\mathrm{Ca}^{-1},\ c=\varepsilon\delta\frac{UR}{\nu},\ \varepsilon=\frac{h_0}{R}.$$

Величина h_0 представляет асимптотическое значение толщины слоя покрытия, формирующегося при $\xi\to\infty$. Масштаб l длины по z определяется из условия $A=1$, что дает $\delta=\mathrm{Ca}^{\frac{1}{3}}$. Из решения краевой задачи следует определить

$$\varepsilon=\varepsilon\left(\mathrm{Ca},\ \frac{UR}{\nu},\ \frac{gR}{U^2}\right),\ h_0=\varepsilon R$$

при заданных значения параметров $\mathrm{Ca},\ \frac{UR}{\nu},\ \frac{gR}{U^2}$.

В случае плоской твердой поверхности сохраняют силу все уравнения и условия (1)—(5), если положить $\varepsilon R=h_0$, $\varepsilon=0$. При этом выражения для коэффициентов F, c преобразуются следующим образом:

$$F=\delta\Phi^2,\ \Phi=\delta^{-2}\sqrt{\frac{g\rho}{\sigma}}h_0,$$
$$c=q\Phi,\ q=\mathrm{Ca}^2\sqrt{\frac{\sigma^3}{\nu^4\rho^3g}}. \qquad (6)$$

Из решения краевой задачи следует найти

$$\Phi=\Phi(\delta,\ \gamma),\ h_0=\delta^{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\Phi$$

при заданных значениях параметров Ca, $\gamma^3=\sigma^3\nu^{-4}\rho^{-3}g^{-1}$. Величина γ определяется свойствами жидкости [3], Ca задает режим нанесения покрытия.

Таким образом, в осесимметричном случае имеем задачу с тремя свободными параметрами $\mathrm{Ca},\ \frac{UR}{\nu},\ \frac{gR}{U^2}$, в плоском случае — с двумя свободными параметрами Ca, γ.

Рассмотрим слой увлечения вблизи твердой поверхности, течение в котором асимптотически переходит в плоскопараллельное при $\xi=\infty$:

$$u=1+(3-F)\left(\eta-\frac{1}{2}\eta^2\right),\quad v=0,\ H=1. \tag{7}$$

Ограничиваясь малыми значениями δ и пренебрегая членами порядка δ^2, из (1)—(6) получаем упрощенную краевую задачу:

$$\begin{aligned}&u_{\eta\eta}-\frac{d\varkappa}{d\xi}-F=c\,(uu_\xi+vu_\eta),\\&u_\xi+v_\eta=0,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\eta=0: u=1,\ v=0,\\&\eta=H: u_\eta=0,\ uH'=v,\\&\varkappa=-H''+\varepsilon\delta^{-2}.\end{aligned} \tag{9}$$

В уравнениях (8), (9) принято $\varepsilon\sim\delta^2$, что подтверждается вычислениями. Уравнения (9) составляют систему уравнений пограничного слоя, в котором распределение давления создается изменением кривизны поверхности ($\varkappa$) и силой тяжести (F). Эффективный метод решения этой системы для пленочных течений предложен в [3].

Интегрируя каждое из уравнений (9) по η, получим интегральные соотношения

$$\begin{aligned}&HH'''=(u_\eta)_{\eta=0}+c\frac{d}{d\xi}\left(\int_0^H u^2\,d\eta\right)+FH,\\&\frac{d}{d\xi}\left(\int_0^H u\,d\eta\right)=0.\end{aligned} \tag{10}$$

Аппроксимируем теперь скорость u выражением, согласующимся с граничными условиями (10) и с точным решением (7):

$$u=1+a(\xi)\left[\frac{\eta}{H}-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{H}\right)^2\right]. \tag{11}$$

Вычисляя интегралы в (10), выводим уравнение для $H(\xi)$

$$H^3H'''=3(1-H)+\frac{1}{5}c\left[H^2-6\left(1-\frac{1}{3}F\right)^2\right]H'+F(H^3-1) \tag{12}$$

и выражение для функции $a(\xi)$

$$aH=3(1-H)-F.$$

Уравнение (12) для толщины слоя $H(\xi)$ можно проинтегрировать численно. Рассмотрим асимптотические условия при $\xi\to\infty$. Полагая $H=1+b\exp\sigma\xi$, $b\ll1$, из линеаризованного уравнения (12) получаем уравнение для σ:

$$\sigma^3+\frac{1}{5}c\left[6\left(1-\frac{1}{3}F\right)^2-1\right]\sigma+3(1-F)=0. \tag{13}$$

Из (13) находим отрицательный корень σ_1 и затем формулируем начальные условия:

$$\xi=\xi_\infty: H=1+H_\infty,\ H'=\sigma_1H_\infty,\ H''=\sigma_1^2H_\infty,\ H_\infty\ll1.$$

Решение $H(\xi)$ уравнения (12) возрастает с уменьшением ξ. Если $F=0$, то выполняются следующие асимптотические оценки при $\xi \to -\infty$:

$$H'' \sim 2B - \frac{1}{B\xi^3}, \quad c=0;$$
$$H'' \sim 2B + \frac{2}{5} c \ln|\xi|, \quad c \neq 0, \ B = \text{const}. \tag{14}$$

В обоих случаях решение (12) не может удовлетворить условию (5) перехода в невозмущенную поверхность при $\xi \to 0$. Поэтому вблизи невозмущенной поверхности жидкого объема $\xi=0$ следует использовать иное приближение для решения исходной краевой задачи (1)—(5). В [1] для плоской задачи при $c=0$, $F=0$ предложено согласовывать решение $H(\xi)$ уравнения (12) с решением $h(\xi)$ уравнения статического мениска, не прибегая к рассмотрению деталей течения в жидком объеме. Согласование решений сводилось к соотношению

$$(H'')_{H\to\infty} = (h'')_{h\to 0}.$$

Так как в [1] принималось $c=0$, то получающееся значение Φ зависит только от Са и пригодно лишь при малых значениях Са. В последующих экспериментальных работах установлено, что эти значения лежат в интервале $10^{-5} < \text{Ca} < 10^{-2}$. Очевидно, эта процедура согласования решений не пригодна при $c \neq 0$, когда в силу (14) предельное значение $(H'')_{H\to\infty}$ не существует.

Рассмотрим метод сращивания решения $H(\xi)$ уравнения (12) с решением $h(\xi)$ уравнения статического мениска

$$\frac{d\varkappa}{d\xi} + F = 0 \tag{15}$$

в промежуточной точке ξ_*, вводя условия непрерывности $H(\xi)$ и ее первых трех производных

$$\xi = \xi_*: \ H = h, \ H' = h', \ H'' = h'', \ H''' = h'''. \tag{16}$$

Каждое из уравнений (12), (15) имеет третий порядок, поэтому указанные условия сращивания (16) требуют не только гладкости функций, но и непрерывности коэффициентов уравнений в точке ξ_*.

В случае плоского течения уравнение (15) интегрируется в квадратурах, что с учетом граничного условия (5) дает

$$h' \left(1 + \delta^2 h'^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} F\xi^2 - \frac{1}{\delta}. \tag{17}$$

Дифференцируя дважды (17) и записывая условия сращивания решений (16), выводим соотношения при $\xi = \xi_*$:

$$\Phi = \frac{H''}{\sqrt{2}\, D^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{\Delta}{D^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}},$$
$$\delta\Phi^2 = H''' D^{-\frac{3}{2}} - 3\delta^2 H''^2 H' D^{-\frac{5}{2}}, \tag{18}$$
$$D = 1 + \Delta^2, \ \Delta = \delta H'.$$

Условие $H(\xi_*) = h(\xi_*)$ можно удовлетворить независимо от соотношений (18), так как интегрирование уравнения (17) добавляет необходимую для этого произвольную константу. Пусть заданы значения свободных параметров Ca, γ. Зададим некоторое значение Φ и проинтегрируем численно уравнение (12) от $\xi=\xi_\infty$ до точки $\xi=\xi_*$, в которой выполняется второе соотношение (18). Тогда из первого соотношения (18) находим новое значение Φ. Величину Φ можно уточнить итерациями. Отметим, что при $c=0$ и $\mathrm{Ca}\to 0$ из (18) получаем

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{2}}(H'')_{H\to\infty}=0{,}944$$

как в [1]. Примеры расчетов по формулам (18) приведены в табл. 1.

Таблица 1

c	F	$H(\varepsilon_*)$	δ	Ca	γ	Φ
0	0	∞	0	0	0	0,944
0	0,082	3,72	0,162	0,0043	0	0,711
0	0,106	2,81	0,255	0,0165	0	0,645
0,5	0,082	3,92	0,177	0,0056	716,5	0,681
0,5	0,088	3,55	0,2035	0,0084	486,3	0,657
0,5	0,094	3,25	0,2326	0,0126	291,2	0,635

Для осесимметричного течения положим $c\neq 0$, $F=0$. Случай этот представляет интерес для режимов высокоскоростного нанесения покрытий на волокна, проволочки, нити. Уравнение (15) вновь интегрируется в квадратурах, и с учетом граничного условия (5) получаем

$$1+s_z^2=Q^{-2}(\tilde{s}^{-1}-\tilde{s})^{-1}, \tag{19}$$

где $Q=\frac{1}{2}ks_{\max}$, $s=\tilde{s}s_{\max}$, $k>0$, $0<\tilde{s}\leqslant 1$.

Полагая в (19) $s=R+h_0h(\xi)$ и записывая условия сращивания (16), выводим соотношения

$$\begin{gathered}\frac{1}{\delta^2}=\frac{H''^2H'}{H'''}\,\frac{1+8\tilde{s}_*^2+3\tilde{s}_*^4}{(1+\delta^2H'^2)(1+\tilde{s}_*^2)},\\ \frac{\varepsilon}{\delta^2}=H''\,\frac{1+\varepsilon H}{1+\delta^2H'^2}\,\frac{1-\tilde{s}_*^2}{1+\tilde{s}_*^2}.\end{gathered} \tag{20}$$

Переход поверхности жидкости к невозмущенному состоянию происходит асимптотически, поэтому при $s_{\max}\to\infty$ имеем $s_*\to 0$. Учитывая еще, что решение $H(\xi)$ определено в (12) с точностью до членов $o(\delta^2)$, можно записать соотношения (20) с той же точностью:

$$\delta^2=\frac{H'''}{H''^2H'},\quad \varepsilon=H''\delta^2,\quad \xi=\xi_*. \tag{21}$$

При каждом заданном значении c можно численно проинтегрировать уравнение (12). Выбирая на интегральной кривой точку ξ_*, получаем из (21) значения δ^2 и $\varepsilon\delta^{-2}$, а затем вычисляем Ca, $\frac{UR}{\nu}$, ε.

Скорость жидкости на возмущенной поверхности $\eta=H(\xi)$ в силу (11) равна

$$u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{H}-1\right).$$

При $H=3$ получим точку торможения, а при $H>3$ — зону возвратного течения. Уравнение (15) при $F=0$ означает, что давление принимается постоянным в зоне возвратного течения. Таким образом, точку ξ_* сращивания решений следует выбирать так, чтобы было $H(\xi_*)>3$. В частном случае $c=0$, $H\to\infty$ получаем из (21) $\varepsilon=1{,}32\ \delta^2$ как в [2]. Примеры расчетов при различных значениях свободных параметров приведены в табл. 2.

Таблица 2

c	$H(\xi_*)$	δ	$\varepsilon\delta^{-2}$	Ca	Re
0	16	0,032	1,318	$0{,}32\cdot 10^{-4}$	0
0	8	0,079	1,283	0,0005	0
0	6	0,117	1,253	0,0016	0
1	8	0,141	1,294	0,0028	276
1	6	0,184	1,212	0,0063	130
1	4	0,288	1,073	0,024	38,8

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Левич В. Г. Увлечение жидкости движущейся пластинкой// Acta Phys. Chim. USSR. 1942. N 17. 42—54.
2. Дерягин Б. В. Теория нанесения вязкой жидкости на вытаскиваемое из нее волокно или проволоку//Журн. прикл. матем. и теор. физ. 1963. № 3. 71—78.
3. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести//Механ. жидкости и газа. 1967. № 1. 43—51.

Поступила в редакцию
16.10.92