ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 5.

УДК 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-305-319

Прохождение сферической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием[1]

Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен

Толконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru
Нгуен Тхи Шанг — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: nguyensangnb@gmail.com

Аннотация

В статье рассматривается задача об отражении и прохождении сферической звуковой волны через однородную изотропную упругую пластину с непрерывно-неоднородным по толщине упругим покрытием. Полагается, что пластина помещена в безграничную идеальную жидкость, а падающая звуковая волна является гармонической и генерируется точечным источником.

Аналитическое решение поставленной задачи получено на основе известного решения задачи о прохождения плоских звуковых волн через пластину с непрерывно-неоднородным покрытием и с использованием интегрального представления сферической волны в виде разложения по плоским волнам.

Нахождение поля смещений в неоднородном слое сведено к решению краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Представлены результаты численных расчетов частотных характеристик отраженного и прошедшего акустических полей.

Ключевые слова: отражение и прохождение звука, сферическая звуковая волна, однородная упругая пластина, неоднородное покрытие.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен. Прохождение сферической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 5, с. 305–319.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 5.

UDC 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-5-305-319

Transmission of spherical sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating[2]

L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru
Nguyen Thi Sang — postgraduate student, Tula State University (Tula).
e-mail: nguyensangnb@gmail.com

Abstract

In paper the problem of spherical sound wave reflection and transmission through a homogeneous isotropic elastic plate with a continuously inhomogeneous in thickness elastic coating is considered. It is believed that the plate is placed in an infinite ideal fluid, and the incident sound wave is harmonic and is generated by point source.

An analytical solution of the posed problem is obtained on the basis of the known solution of the problem about the passage of plane sound waves through plate with a continuously inhomogeneous coating and using integral representation of a spherical wave in the form of an expansion on flat waves.

Finding the displacement field in an inhomogeneous layer is reduced to solving boundary value problem for a system of ordinary differential equations of the second order.

The results of numerical calculations of frequency characteristics are presented for reflected and transmitted acoustic fields.

Keywords: reflection and transmission of sound, spherical sound wave, homogeneous elastic plate, inhomogeneous coating.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen, 2022, “Transmission of spherical sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 305–319.

1. Введение

Отражение и прохождение звука через плоские однородные изотропные упругие пластины с непрерывно-неоднородными покрытиями исследовалось в ряде работ. Задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны упругим однородным плоским слоем с неоднородным по толщине упругим покрытием решена в [1]. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами проведено в [2]. Прямая и обратная задачи о прохождении плоской звуковой волны через однородную термоупругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с теплопроводными жидкостями, решены в [3]. В [4 - 6] исследовано влияние непрерывно-неоднородного покрытия однородной упругой пластины на отражение и прохождение плоской звуковой волны при расположении покрытия

[2]Supported by the Russian Science Foundation grant No. 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/

на разных поверхностях пластины и разных законах неоднородности механических параметров материала покрытия. В [4] полагалось, что пластина граничит с идеальными жидкостями, а в [5, 6] — с вязкими жидкостями. Задача определения толщины и вида зависимостей материальных параметров неоднородного изотропного покрытия конечной однородной упругой пластины со сферической полостью, обеспечивающих требуемые характеристики отражения звука, решена в [7]. В [8] получено решение задачи об отражении и преломлении плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием.

В работах, упомянутых выше, первичное поле возмущений представлялось в виде падающей плоской волны. Однако, как правило, источник звука находится на конечном удалении от рассеивателя. Поэтому необходимо учитывать криволинейность фронта падающей волны, что оказывает существенное влияние на отражение и прохождение звука через плоский слой. Отражение и прохождение цилиндрической звуковой волны через однородную упругую пластину с неоднородным по толщине упругим покрытием исследовано в [9]. В [10, 11] решены задачи о прохождении сферической звуковой волны через однородную изотропную упругую пластину.

В настоящей работе рассматривается задача об отражении и прохождении сферической звуковой волны через однородную упругую пластину с неоднородным по толщине упругим покрытием.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную однородную изотропную упругую пластину толщиной H, материал которой характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0. Пластина имеет покрытие в виде неоднородного по толщине изотропного упругого слоя толщиной h. Полагаем, что модули упругости λ и μ материала неоднородного слоя описываются дифференцируемыми функциями координаты z, а плотность ρ — непрерывной функцией координаты z: $\lambda = \lambda(z)$, $\mu = \mu(z)$, $\rho = \rho(z)$. При этом декартова система прямоугольных координат x, y, z выбрана таким образом, что ось x лежит в плоскости, разделяющей однородный слой и неоднородное покрытие, а ось z направлена вниз по нормали к поверхности пластины (рис. 1). Пластина с покрытием помещена между двумя полупространствами, заполненными идеальными однородными жидкостями, которые имеют плотности ρ_1, ρ_2 и скорости звука c_1, c_2 соответственно.

Пусть из полупространства $z < -h$ на пластину с покрытием падает монохроматическая сферическая звуковая волна, излучаемая точечным источником, координаты которого (x_i, y_i, z_i). Без ограничения общности положим, что

$$x_i = 0; \quad y_i = 0; \quad z_i = -z_0.$$

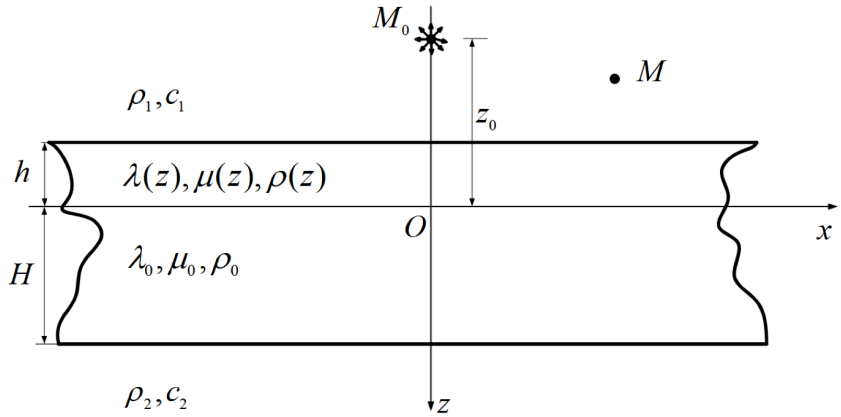
Потенциал скорости падающей волны имеет вид

$$\psi_0 = A\frac{\exp[i(k_1 R - \omega t)]}{R}, \tag{1}$$

где A — амплитуда волны; $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число в полупространстве $z < -h$; ω — круговая частота; $R = |r - r_0|$; r и r_0 — векторы, соединяющие начало координат с точкой наблюдения M $(x,\ y,\ z)$ и с точкой M_0 $(0, 0, -z_0)$, определяющей положение источника, соответственно; $R = [x^2 + y^2 + (z + z_0)^2]^{1/2}$; t — время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Рис. 1: Геометрия задачи

Определим отраженную и прошедшую через пластину с покрытием звуковые волны, а также найдем поля смещений в однородной пластине и неоднородном слое.



3. Математическая модель задачи

Рассматриваемая задача является трехмерной. Все искомые величины зависят от координат x, y, z.

Распространение звуковых волн в полупространствах $z < -h$ и $z > H$ в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [12]

$$\Delta\psi_j + k_j^2\psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \tag{2}$$

где ψ_1 и ψ_2 — потенциалы скорости отраженной от пластины и прошедшей через нее волн; $k_2 = \omega/c_2$ — волновое число в полупространстве $z > H$ $(j = 2)$; $\psi = \psi_0 + \psi_1$ — потенциал скорости полного акустического поля в полупространстве $z < -h$. При этом скорость частиц жидкости v_j и акустическое давление p_j в верхнем и нижнем полупространствах определяются по формулам

$$v_1 = \text{grad}\,(\psi_0 + \psi_1), \quad v_2 = \text{grad}\,\psi_2, \quad p_1 = i\rho_1\omega(\psi_0 + \psi_1), \quad p_2 = i\rho_2\omega\psi_2.$$

Распространение малых возмущений в упругой однородной изотропной пластине в случае гармонического движения описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [12]

$$\Delta\Psi + k_l^2\Psi = 0, \quad \Delta\mathbf{\Phi} + k_\tau^2\mathbf{\Phi} = 0, \tag{3}$$

где Ψ и $\mathbf{\Phi}$ — скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + \mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн соответственно. При этом вектор смещения частиц упругого однородного слоя

$$\mathbf{u}^0 = \text{grad}\Psi + \text{rot}\mathbf{\Phi},$$

где

$$\mathbf{\Phi} = \Phi_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + \Phi_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + \Phi_z(x, y, z)\mathbf{e}_z,$$

$\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ — единичные векторы осей x, y и z прямоугольной декартовой системы координат.

Компоненты вектора $\mathbf{u}^0$ выражаются через функции Φ_x, Φ_y и Φ_z следующим образом:

$$u_x^0 = \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_y}{\partial z}, \quad u_y^0 = \frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_z}{\partial x}, \quad u_z^0 = \frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_x}{\partial y}. \tag{4}$$

Распространение упругих волн в неоднородном покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды [13], которые при отсутствии массовых сил для установившегося режима движения имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=-\omega^2\rho(z)u_x,\\
&\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}=-\omega^2\rho(z)u_y,\\
&\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=-\omega^2\rho(z)u_z,
\end{aligned}\tag{5}$$

где u_x, u_y и u_z — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ частиц неоднородного слоя; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Связь между компонентами тензора напряжений σ^0_{ij} и составляющими вектора смещения $\mathbf{u}^0$ в однородной упругой пластине устанавливается на основе обобщенного закона Гука [13]. Связь между σ_{ij} и составляющими вектора $\mathbf{u}$ в неоднородном упругом покрытии имеет аналогичный вид.

Решения дифференциальных уравнений (2), (3), (5) должны удовлетворять граничным условиям.

Граничные условия на поверхностях, соприкасающихся с жидкостями, заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на них нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$z=-h:\quad -i\omega u_z=v_{1z},\quad \sigma_{zz}=-p_1,\quad \sigma_{xz}=0,\quad \sigma_{yz}=0,\tag{6}$$

$$z=H:\quad -i\omega u^0_z=v_{2z},\quad \sigma^0_{zz}=-p_2,\quad \sigma^0_{xz}=0\quad \sigma^0_{yz}=0.\tag{7}$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения

$$z=0:\quad u_x=u^0_x,\quad u_y=u^0_y,\quad u_z=u^0_z,\quad \sigma_{zz}=\sigma^0_{zz},\quad \sigma_{xz}=\sigma^0_{xz},\quad \sigma_{yz}=\sigma^0_{yz}.\tag{8}$$

4. Аналитическое решение задачи

Прежде всего отметим, что векторное уравнение в (3) распадается на три независимых скалярных уравнения Гельмгольца относительно проекций вектора $\mathbf{\Phi}$. В результате (3) представляет собой систему четырех уравнений Гельмгольца относительно четырех скалярных функций. Граничные условия задачи полностью определяют лишь три функции. Поэтому решение системы содержит некоторый произвол. Чтобы полностью определить четыре искомых функции при подчинении граничным условиям, необходимо привлечь еще одно дополнительное условие. Этим условием может служить равенство

$$\operatorname{div}\mathbf{\Phi}=0.\tag{9}$$

Компоненты Φ_x и Φ_z вектора $\mathbf{\Phi}$ будем определять как решения соответствующих уравнений Гельмгольца, а компоненту Φ_y найдем с помощью уравнения (9), из которого следует

$$\frac{\partial\Phi_y}{\partial y}=-\frac{\partial\Phi_x}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_z}{\partial z}.\tag{10}$$

Представим потенциал скорости падающей сферической волны в виде разложения по плоским волнам [12, 14]

$$\psi_0(x,y,z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_0(\xi,\varsigma)d\xi d\varsigma, \tag{11}$$

где

$$\tilde{\psi}_0(\xi,\varsigma) = A\frac{i}{2\pi\chi_1}e^{i(\xi x+\varsigma y+\chi_1|z+z_0|)}, \tag{12}$$

$\chi_1 = \sqrt{k_1^2-\xi^2-\varsigma^2}$.

При $z > -z_0$ формула (12) принимает вид

$$\tilde{\psi}_0(\xi,\varsigma) = I(\xi,\varsigma)e^{i(\xi x+\varsigma y+\chi_1 z)}, \tag{13}$$

где

$$I(\xi,\varsigma) = A\frac{i}{2\pi\chi_1}e^{i\chi_1 z_0}.$$

Замечаем, что подынтегральное выражение в (11), определяемое (12), аналогично по форме выражению плоской волны, падающей произвольным образом на пластину с покрытием. Потенциал скорости такой волны определяется выражением

$$\psi_{0\,pl} = A_0\,\exp\left[i(k_{1x}x + k_{1y}y + k_{1z}(z+h))\right], \tag{14}$$

где A_0 — амплитуда волны; $k_{1x} = k_1\sin\theta_0\cos\varphi_0$, $k_{1y} = k_1\sin\theta_0\sin\varphi_0$, $k_{1z} = k_1\cos\theta_0$ — проекции волнового вектора $\mathbf{k}_1$ на оси координат x, y, z; $|\mathbf{k_1}| = k_1$; θ_0 и φ_0 — полярный и азимутальный углы падения плоской волны соответственно.

Сравнивая формулы (13) и (14) находим, что ξ соответствует k_{1x}, ς — k_{1y}, а $I(\xi,\varsigma)$ — $A_0e^{ik_{1z}h}$. Поэтому решение задачи (2), (3), (5)–(8) можно найти, воспользовавшись решением задачи о прохождения плоских звуковых волн через пластину с непрерывно-неоднородным покрытием.

При рассеянии первичного поля возмущений, определяемого потенциалом $\tilde{\psi}_0(\xi,\varsigma)$, потенциалы отраженной $\tilde{\psi}_1$ и прошедшей $\tilde{\psi}_2$ волн, потенциалы смещения $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}$ в однородной пластине и компоненты вектора смещения $\tilde{u}_x$, $\tilde{u}_y$, $\tilde{u}_z$ в покрытии определяются формулами, аналогичными в случае падения плоской волны с потенциалом $\psi_{0\,pl}$, в которых следует сделать указанные выше замены.

Искомые величины ψ_j $(j = 1,\ 2)$, Ψ, Φ, $\mathbf{u}$ подлежат определению путем интегрирования $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ по ξ и ς.

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо воспользоваться решением задачи об отражении и прохождении плоской волны через упругую пластину с неоднородным покрытием в случае произвольного падения.

4.1. Отражение и преломлении плоской звуковой волны, падающей произвольным образом на упругую пластину с неоднородным покрытием

Пусть из полупространства $z < -h$ на слой с покрытием падает под произвольным углом плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой определяется выражением (14). Определим волновые поля в пластине и вне ее. Элементы решения задачи будем сопровождать индексом pl.

Потенциалы скоростей отраженной от слоя и прошедшей через слой волн ψ_{1pl} и ψ_{2pl}, являющиеся решениями уравнений Гельмгольца, будем искать в виде

$$\begin{aligned}\psi_{1\,pl} &= A_1\,\exp\left[i(k_{1x}x + k_{1y}y - k_{1z}(z+h))\right],\\ \psi_{2\,pl} &= A_2\,\exp\left[i(k_{2x}x + k_{2y}y + k_{2z}(z-H))\right],\end{aligned} \tag{15}$$

где k_{2x}, k_{2y}, k_{2z} — проекции волнового вектора $\mathbf{k_2}$ на оси x, y и z; $|\mathbf{k_2}| = k_2$; $k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2 - k_{2y}^2}$. При этом согласно закону Снеллиуса [14] $k_{2x} = k_{1x}$; $k_{2y} = k_{1y}$.

Потенциалы смещения в упругой однородной пластине, являющиеся решениями соответствующих уравнений Гельмгольца, будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{pl} &= B_1 \exp\left[i(k_{lx}x + k_{ly}y + k_{lz}z)\right] + B_2 \exp\left[i(k_{lx}x + k_{ly}y - k_{lz}z)\right], \\ \Phi_{x\,pl} &= C_1 \exp\left[i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y + k_{\tau z}z)\right] + C_2 \exp\left[i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)\right], \\ \Phi_{z\,pl} &= D_1 \exp\left[i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y + k_{\tau z}z)\right] + D_2 \exp\left[i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)\right], \end{aligned} \tag{16}$$

где $k_{lz} = \sqrt{k_l^2 - k_{lx}^2 - k_{ly}^2}$, $k_{\tau z} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{\tau x}^2 - k_{\tau y}^2}$. При этом $k_{lx} = k_{\tau x} = k_{1x}$, $k_{ly} = k_{\tau y} = k_{1y}$.

Подставим выражения для $\Phi_{x\,pl}$ и $\Phi_{z\,pl}$ из (16) в (10) и проинтегрируем по y. Получим

$$\begin{aligned} \Phi_{y\,pl} = &-(k_{\tau x}/k_{\tau y})\,(C_1 + D_1)\,\exp\left[i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y + k_{\tau z}z)\right] + \\ &+ (k_{\tau x}/k_{\tau y})\,(-C_2 + D_2)\,\exp\left[i(k_{\tau x}x + k_{\tau y}y - k_{\tau z}z)\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Коэффициенты A_j, B_j, C_j и D_j $(j = 1, 2)$ в выражениях (15)–(17) подлежат определению из граничных условий.

Согласно закону Снеллиуса зависимость составляющих вектора смещения от координаты x будет иметь вид $\exp(ik_{1x}x)$, а от координаты y — $\exp(ik_{1y}y)$. Поэтому составляющие вектора $\mathbf{u}_{pl}$ будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_{xpl} &= U_1(z)\,\exp(ik_{1x}x)\,\exp(ik_{1y}y), \\ u_{ypl} &= U_2(z)\,\exp(ik_{1x}x)\,\exp(ik_{1y}y), \\ u_{zpl} &= U_3(z)\,\exp(ik_{1x}x)\,\exp(ik_{1y}y). \end{aligned} \tag{18}$$

Подставляя выражения (18) в уравнения (5), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$:

$$\mathbf{A}\mathbf{U}'' + \mathbf{B}\mathbf{U}' + \mathbf{C}\mathbf{U} = 0, \tag{19}$$

где $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^T$; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — матрицы третьего порядка;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mu' & 0 & ik_{1x}(\lambda + \mu) \\ 0 & \mu' & ik_{1y}(\lambda + \mu) \\ ik_{1x}(\lambda + \mu) & ik_{1y}(\lambda + \mu) & \lambda' + 2\mu' \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -k_{1x}^2(\lambda + 2\mu) - k_{1y}^2\mu + \omega^2\rho & -k_{1x}k_{1y}(\lambda + \mu) & i\mu' k_{1x} \\ -k_{1x}k_{1y}(\lambda + \mu) & -k_{1x}^2\mu - k_{1y}^2(\lambda + 2\mu) + \omega^2\rho & i\mu' k_{1y} \\ i\lambda' k_{1x} & i\lambda' k_{1y} & -\mu(k_{1x}^2 + k_{1y}^2) + \omega^2\rho \end{pmatrix}.$$

Здесь штрихи обозначают производные по координате z.

Подставим выражения (15)–(18) в граничные условия. В результате получим выражения для коэффициентов A_j, B_j, C_j, D_j $(j = 1, 2)$ и шесть условий для нахождения частного решения системы дифференциальных уравнений (19):

$$\begin{gathered} A_1 = A_0 + (\omega/k_{1z})U_3(-h), \\ A_2 = (-i\omega/k_{2z})[k_{lz}(B_1e_{1l} - B_2e_{2l}) - (k_{1x}^2 + k_{1y}^2)(C_1e_{1\tau} + C_2e_{2\tau})/k_{1y} - \\ -k_{1x}k_{\tau z}(E_1e_{1\tau} - E_2e_{2\tau})/k_{1y}, \\ B_j = b_{j1}U_1(0) + b_{j2}U_2(0) + b_{j3}U_3(0), \quad C_j = c_{j1}U_1(0) + c_{j2}U_2(0) + c_{j3}U_3(0), \\ D_j = d_{j1}U_1(0) + d_{j2}U_2(0) + d_{j3}U_3(0) \quad (j = 1, 2), \end{gathered} \tag{20}$$

$$\big(\mathbf{AU}' + \mathbf{EU}\big)_{z=-h} = \mathbf{G}, \quad \big(\mathbf{AU}' + \mathbf{FU}\big)_{z=0} = 0. \tag{21}$$

Выражения для коэффициентов e_{jl}, $e_{j\tau}$, b_{jn}, c_{jn}, d_{jn} $(j = 1, 2; n = 1, 2, 3)$ и элементов матриц $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ приводить не будем из-за их громоздкости.

Из формул (20) следует, что коэффициенты в выражениях (15) и (16) могут быть вычислены лишь после определения значений функции $U_1(z)$, $U_2(z)$ и $U_3(z)$ на поверхностях неоднородного слоя при $z = -h$ и $z = 0$.

Для определения поля смещений в упругом неоднородном слое необходимо решить краевую задачу (19), (21).

Получим решение этой задачи методом степенных рядов так, как это сделано в [15].

Предположим, что функции ρ, λ и μ имеют вид многочленов относительно переменной z (или аппроксимированы такими многочленами):

$$\rho(z) = \sum_{k=0}^{R} \rho^{(k)}(z + h/2)^k, \quad \lambda(z) = \sum_{k=0}^{R} \lambda^{(k)}(z + h/2)^k, \quad \mu(r) = \sum_{k=0}^{R} \mu^{(k)}(z + h/2)^k,$$

где R — степень многочленов.

Приближенное аналитическое решение краевой задачи (19), (21) будем искать в виде

$$U_n(z) = \sum_{l=1}^{6} T_l U_n^l(z), \quad U_n^l = \sum_{s=0}^{\infty} U_n^{l(s)}(z + h/2)^s \quad (n = 1, 2, 3). \tag{22}$$

Коэффициенты T_l $(l = 1, 2, \ldots, 6)$ определяются из системы шести линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{l=1}^{6} T_l \left(\mathbf{AU}^{l\prime} + \mathbf{EU}^l\right)_{z=-h} = \mathbf{G},$$

$$\sum_{l=1}^{6} T_l \left(\mathbf{AU}^{l\prime} + \mathbf{FU}^l\right)_{z=0} = 0,$$

где $\mathbf{U}^l(z) = (U_1^l, U_2^l, U_3^l)^T$.

Коэффициенты $U_n^{l(s)}$ $(n = 1, 2, 3; l = 1, 2, \ldots, 6)$ разложений (22) вычисляются по формулам

$$U_1^{l(0)} = \delta_{1l}, \quad U_2^{l(0)} = \delta_{2l}, \quad U_3^{l(0)} = \delta_{3l}, \quad U_1^{l(1)} = \delta_{4l}, \quad U_2^{l(1)} = \delta_{5l}, \quad U_3^{l(1)} = \delta_{6l},$$

$$U_n^{l(s+2)} = -[(s+1)(s+2A_{nn}^{(0)})]^{-1} \sum_{q=1}^{3} \sum_{k=0}^{R_1} \{(s+1-k)[(s-k)A_{nq}^{(k+1)} + B_{nq}^{(k)}]U_q^{l(s+1-k)} + C_{nq}^{(k)} U_q^{l(s-k)}\}$$

$$(s = 0, 1, ...),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; $R_1 = \min(R, s)$;

$$A_{11}^{(k)} = A_{22}^{(k)} = \mu^{(k)}; \quad A_{12}^{(k)} = A_{13}^{(k)} = A_{21}^{(k)} = A_{23}^{(k)} = A_{31}^{(k)} = A_{32}^{(k)} = 0; \quad A_{33}^{(k)} = \lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)};$$

$$B_{11}^{(k)} = B_{22}^{(k)} = (k+1)\mu^{(k+1)}; \quad B_{13}^{(k)} = B_{31}^{(k)} = ik_{1x}(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)});$$

$$B_{23}^{(k)} = B_{32}^{(k)} = ik_{1y}(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}); \quad B_{12}^{(k)} = B_{21}^{(k)} = 0; \quad B_{33}^{(k)} = (k+1)(\lambda^{(k+1)} + 2\mu^{(k+1)});$$

$$C_{11}^{(k)} = -k_{1x}^2(\lambda + 2\mu) - k_{1y}^2\mu + \omega^2\rho; \quad C_{12}^{(k)} = C_{21}^{(k)} = -k_{1x}k_{1y}(\lambda + \mu);$$

$$C_{13}^{(k)} = ik_{1x}(k+1)\mu^{(k+1)}; \quad C_{22}^{(k)} = -k_{1x}^2\mu - k_{1y}^2(\lambda + 2\mu) + \omega^2\rho;$$

$$C_{23}^{(k)} = ik_{1y}(k+1)\mu^{(k+1)}; \quad C_{31}^{(k)} = ik_{1x}(k+1)\lambda^{(k+1)};$$
$$C_{32}^{(k)} = ik_{1y}(k+1)\lambda^{(k+1)}; \quad C_{33}^{(k)} = -(k_{1x}^2 + k_{1y}^2)\mu^{(k)} + \omega^2\rho^{(k)}.$$

4.2. Определение волновых полей в случае сферической падающей волны

При рассеянии первичного поля возмущений, определяемого потенциалом (13) потенциалы отраженной $\tilde{\psi}_1$ и прошедшей $\tilde{\psi}_2$ волн, потенциалы смещения $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}_x$, $\tilde{\Phi}_y$ $\tilde{\Phi}_z$ в однородной пластине и компоненты вектора смещения $\tilde{u}_x$, $\tilde{u}_y$, $\tilde{u}_z$ в покрытии определяются соответствующими формулами (15)–(18), полученными при решении задачи в случае падения плоской волны с потенциалом $\psi_{0\,pl}$, в которых следует заменить k_{1x} на ξ, k_{1y} на ς, A_0 на $I(\xi,\varsigma)e^{-ik_{1z}h}$.

В результате получаем

$$\tilde{\psi}_1 = \tilde{A}_1 \exp\left[i(\xi x + \varsigma y - \chi_1(z+h))\right],$$
$$\tilde{\psi}_2 = \tilde{A}_2 \exp\left[i(\xi x + \varsigma y + \chi_2(z-H))\right],$$
$$\tilde{\Psi} = \tilde{B}_1 \exp\left[i(\xi x + \varsigma y + \chi_l z)\right] + \tilde{B}_2 \exp\left[i(\xi x + \varsigma y - \chi_l z)\right],$$
$$\tilde{\Phi}_x = \tilde{C}_1 \exp\left[i(\xi x + \varsigma y + \chi_\tau z)\right] + \tilde{C}_2 \exp\left[i(\xi x + \varsigma y - \chi_\tau z)\right],)$$
$$\tilde{\Phi}_y = -\left(\xi/\varsigma\right)\left(\tilde{C}_1 + \tilde{D}_1\right) \exp\left[i(\xi x + \varsigma y + \chi_\tau z)\right] +$$
$$+\left(\xi/\varsigma\right)\left(-\tilde{C}_2 + \tilde{D}_2\right) \exp\left[i(\xi x + \varsigma y - \chi_\tau z)\right].$$
$$\tilde{\Phi}_z = \tilde{D}_1 \exp\left[i(\xi x + \varsigma y + \chi_\tau z)\right] + \tilde{D}_2 \exp\left[i(\xi x + \varsigma y - \chi_\tau z)\right],$$
$$\widetilde{u}_x = \tilde{U}_1(z,\,\xi,\varsigma) \exp(i\xi x) \exp(i\varsigma y),$$
$$\widetilde{u}_y = \tilde{U}_2(z,\,\xi,\varsigma) \exp(i\xi x) \exp(i\varsigma y),$$
$$\widetilde{u}_z = \tilde{U}_3(z,\,\xi,\varsigma) \exp(i\xi x) \exp(i\varsigma y),$$

где

$$\chi_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2 - \varsigma^2}, \quad \chi_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2 - \varsigma^2}, \quad \chi_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \varsigma^2}, \quad \chi_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2 - \varsigma^2},$$
$$\tilde{A}_1 = I(\xi,\varsigma)e^{-i\chi_1 h} + (\omega/\chi_1)\tilde{U}_3(-h,\,\xi,\,\varsigma),$$
$$\tilde{A}_2 = (-i\omega/\chi_2)[\chi_l(\tilde{B}_1\tilde{e}_{1l} - \tilde{B}_2\tilde{e}_{2l}) - (\xi^2+\varsigma^2)(\tilde{C}_1\tilde{e}_{1\tau} + \tilde{C}_2\tilde{e}_{2\tau})/\varsigma - \xi\chi_\tau(\tilde{E}_1\tilde{e}_{1\tau} - \tilde{E}_2\tilde{e}_{2\tau})/\varsigma],$$
$$\tilde{B}_j = \tilde{b}_{1j}\tilde{U}_1(0,\xi,\varsigma) + \tilde{b}_{2j}\tilde{U}_2(0,\xi,\varsigma) + \tilde{b}_{3j}\tilde{U}_3(0,\xi,\varsigma),$$
$$\tilde{C}_j = \tilde{c}_{1j}\tilde{U}_1(0,\xi,\varsigma) + \tilde{c}_{2j}\tilde{U}_2(0,\xi,\varsigma) + \tilde{c}_{3j}\tilde{U}_3(0,\xi,\varsigma),$$
$$\tilde{D}_j = \tilde{d}_{1j}\tilde{U}_1(0,\xi,\varsigma) + \tilde{d}_{2j}\tilde{U}_2(0,\xi,\varsigma) + \tilde{d}_{3j}\tilde{U}_3(0,\xi,\varsigma) \qquad (j=1,2).$$

Кроме того, указанные замены k_{1x} на ξ, k_{1y} на ς и A_0 на $I(\xi)e^{-i\xi h}$ следует произвести и в элементах матриц $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ краевой задачи (19), (21) для нахождения $\tilde{U}_n(z,\xi,\varsigma)$ $(n=1,2,3)$.

Согласно (22) будем иметь

$$\tilde{U}_n(z,\xi,\varsigma) = \sum_{l=1}^{6} \tilde{T}_l\, \tilde{U}_n^l(z,\xi,\varsigma), \quad \tilde{U}_n^l(z,\xi,\varsigma) = \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{U}_n^{l(s)}(z+h/2)^s \quad (n=1,2,3),$$

где

$$\tilde{U}_1^{l(0)} = \delta_{1l}; \quad \tilde{U}_2^{l(0)} = \delta_{2l}; \quad \tilde{U}_3^{l(0)} = \delta_{3l}; \quad \tilde{U}_1^{l(1)} = \delta_{4l}; \quad \tilde{U}_2^{l(1)} = \delta_{5l}; \quad \tilde{U}_3^{l(1)} = \delta_{6l};$$

$$\tilde{U}_n^{l(s+2)} = -[(s+1)(s+2)A_{nn}^{(0)}]^{-1} \sum_{q=1}^{3} \sum_{k=0}^{R_1} \{(s+1-k)[(s-k)A_{nq}^{(k+1)} + \tilde{B}_{nq}^{(k)}]\tilde{U}_q^{l(s+1-k)} + \tilde{C}_{nq}^{(k)}\tilde{U}_q^{l(s-k)}\}$$

$$(s = 0, 1, \dots);$$

$$\tilde{B}_{11}^{(k)} = \tilde{B}_{22}^{(k)} = (k+1)\mu^{(k+1)}; \quad \tilde{B}_{12}^{(k)} = \tilde{B}_{21}^{(k)} = 0; \quad \tilde{B}_{13}^{(k)} = \tilde{B}_{31}^{(k)} = i\xi(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)});$$

$$\tilde{B}_{23}^{(k)} = \tilde{B}_{32}^{(k)} = i\varsigma(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}); \quad \tilde{B}_{33}^{(k)} = (k+1)(\lambda^{(k+1)} + 2\mu^{(k+1)});$$

$$\tilde{C}_{11}^{(k)} = -\xi^2(\lambda + 2\mu) - \varsigma^2\mu + \omega^2\rho; \quad \tilde{C}_{12}^{(k)} = \tilde{C}_{21}^{(k)} = -\xi\varsigma(\lambda + \mu);$$

$$\tilde{C}_{13}^{(k)} = i\xi(k+1)\mu^{(k+1)}; \quad \tilde{C}_{22}^{(k)} = -\xi^2\mu - \varsigma^2(\lambda + 2\mu) + \omega^2\rho;$$

$$\tilde{C}_{23}^{(k)} = i\varsigma(k+1)\mu^{(k+1)}; \quad \tilde{C}_{31}^{(k)} = i\xi(k+1)\lambda^{(k+1)};$$

$$\tilde{C}_{32}^{(k)} = i\varsigma(k+1)\lambda^{(k+1)}; \quad \tilde{C}_{33}^{(k)} = -(\xi^2 + \varsigma^2)\mu^{(k)} + \omega^2\rho^{(k)}.$$

Коэффициенты $\tilde{T}_l$ $(l = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{l=1}^{6} \tilde{T}_l \left(\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{U}}^{l'} + \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{U}}^{l}\right)_{z=-h} = \tilde{\mathbf{G}},$$

$$\sum_{l=1}^{6} \tilde{T}_l \left(\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{U}}_n^{l'} + \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{U}}^{l}\right)_{z=0} = 0,$$

где $\tilde{\mathbf{U}}^l(z, \xi, \varsigma) = (\tilde{U}_1^l, \tilde{U}_2^l, \tilde{U}_3^l)^T$.
Штрихи означают дифференцирование по z.

Чтобы обеспечить ограниченность $\tilde{\psi}_1$ при $z \to -\infty$ выбор знака корня $\chi_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2 - \varsigma^2}$ осуществим из условия $\mathrm{Im}\chi_1 \geqslant 0$, а для ограниченности $\tilde{\psi}_2$ при $z \to \infty$ потребуем выполнения условия $\mathrm{Im}\chi_2 \geqslant 0$, то есть

$\chi_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2 - \varsigma^2}$ при $\xi^2 + \varsigma^2 < k_1^2$, $\quad \chi_1 = i\sqrt{(\xi^2 + \varsigma^2) - k_1^2}$ при $\xi^2 + \varsigma^2 > k_1^2$;
$\chi_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2 - \varsigma^2}$ при $\xi^2 + \varsigma^2 < k_2^2$, $\quad \chi_2 = i\sqrt{(\xi^2 + \varsigma^2) - k_2^2}$ при $\xi^2 + \varsigma^2 > k_2^2$.

Величины $\chi_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \varsigma^2}$, $\quad \chi_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2 - \varsigma^2}$ определяются по формулам

$\chi_l = \sqrt{k_l^2 - \xi^2 - \varsigma^2}$ при $\xi^2 + \varsigma^2 < k_l^2$, $\quad \chi_l = i\sqrt{(\xi^2 + \varsigma^2) - k_\tau^2}$ при $\xi^2 + \varsigma^2 > k_l^2$;
$\chi_\tau = \sqrt{k_\tau^2 - \xi^2 - \varsigma^2}$ при $\xi^2 + \varsigma^2 < k_\tau^2$, $\quad \chi_\tau = i\sqrt{(\xi^2 + \varsigma^2) - k_\tau^2}$ при $\xi^2 + \varsigma^2 > k_\tau^2$.

При рассеянии сферической волны пластиной с покрытием искомые потенциалы ψ_j $(j = 1, 2)$, Ψ, Φ_x, Φ_y, Φ_z и компоненты вектора смещения u_x, u_y, u_z в неоднородном покрытии находятся путем интегрирования по ξ и ς в бесконечных пределах величин $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}_x$, $\tilde{\Phi}_y$ $\tilde{\Phi}_z$, $\tilde{u}_x$, $\tilde{u}_y$, $\tilde{u}_z$ соответственно.

Так для потенциалов скоростей отраженной и прошедшей волн ψ_j $(j = 1, 2)$ будем иметь

$$\psi_j(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_j(\xi, \varsigma)\, d\xi\, d\varsigma \quad (j = 1, 2). \tag{23}$$

Таким образом, получили аналитическое решение поставленной задачи.

5. Численные исследования

На основе полученного аналитического решения задачи были проведены численные расчеты зависимостей $\left|\frac{\psi_1}{A}\right|$ и $\left|\frac{\psi_2}{A}\right|$ от волнового размера пластины k_1H при расположении источника в точке M_0 с координатами $(x = 0, y = 0, z = -z_0)$. Точки наблюдения M_1 и M_2 в отраженном и прошедшем акустических полях имели координаты $(x = 0, y = 0, z = -2H)$ и $(x = 0, y = 0, z = 2H)$ соответственно. При этом исследовался случай, когда жидкости по обе стороны тела являются одинаковыми $(k_1 = k_2, \quad \rho_1 = \rho_2)$. Полагалось, что амплитуда падающей волны $A = 1$, а отношение толщины покрытия h к толщине однородной пластины H равно 0,2. Рассматривалась алюминиевая пластина толщиной $H = 0,1$ м ($\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\quad \mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м^2) с покрытием на основе поливинилбутираля, находящаяся в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м^3, $\quad c_1 = c_2 = 1485$ м/с). Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью $\tilde{\rho} = 1,07 \cdot 10^3$ кг/м^3 и модулями упругости $\tilde{\lambda} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\quad \tilde{\mu} = 9,8 \cdot 10^8$ Н/м^2, так и для неоднородных покрытий, механические характеристики которых менялись по толщине слоя по закону

$$\rho = \tilde{\rho}\, f(z), \quad \lambda = \tilde{\lambda}\, f(z), \quad \mu = \tilde{\mu}\, f(z).$$

Рассматривались следующие линейные и квадратичные законы неоднородности:

$$f_1(z) = a_1 \left(-\frac{z}{h} + 0,5\right) \quad (a_1 = 1), \qquad f_2(z) = a_2 \left[\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 2\frac{z}{h} + 0,5\right] \quad (a_2 = 6/11).$$

Множитель a_j $(j = 1, 2)$ выбран так, чтобы среднее значение функции $f_j(z)$ по толщине слоя было равно единице.

На рис. 2 и рис. 3 приведены зависимости $\left|\frac{\psi_1}{A}\right|$ и $\left|\frac{\psi_2}{A}\right|$ от волнового размера пластины k_1H при $z_0 = 10H$. Сплошной и штриховой линиями обозначены зависимости для линейного и квадратичного законов неоднородности соответственно. Пунктирной линией обозначена зависимость для однородного покрытия.

Расчеты показывают существенное отличие частотных характеристик для разных законов неоднородности материала покрытия.

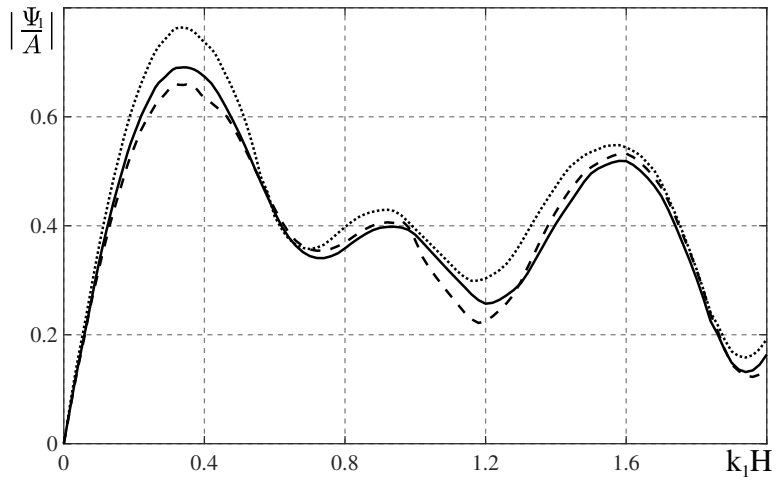


Рис. 2: Зависимость $\left|\frac{\psi_1}{A}\right|$ от волнового размера пластины k_1H при $z_0 = 10H$

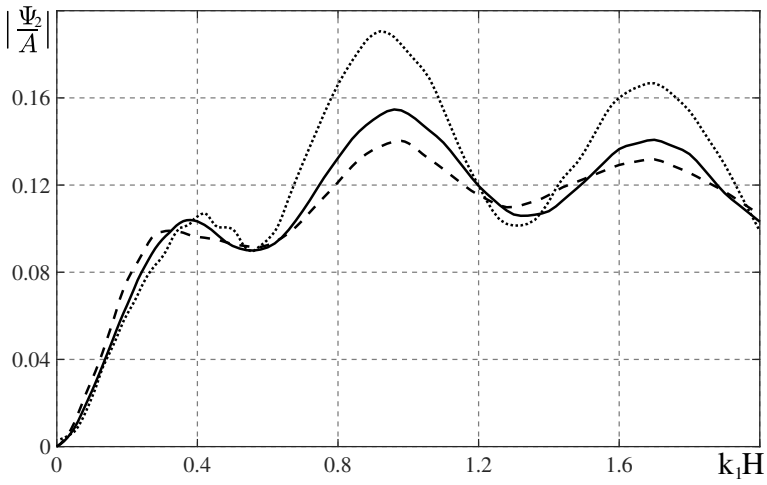


Рис. 3: Зависимость $\left|\frac{\psi_2}{A}\right|$ от волнового размера пластины k_1H при $z_0 = 10H$

На рис. 4 и рис. 5 приведены частотные характеристики $\left|\frac{\psi_1}{A}\right|$ для линейного закона неоднородности при разном удалении источника от пластины. Кривые $1, 2, 3$ соответствуют случаям, когда $z_0 = 5H;\ 10H;\ 100H$.

При изменении расстояния от источника до пластины наблюдается сильное изменение частотной зависимости, что проявляется в изменении уровней и сдвиге резонансных частот. По мере удаления точечного источника от пластины происходит увеличение осцилляции частотных зависимостей.

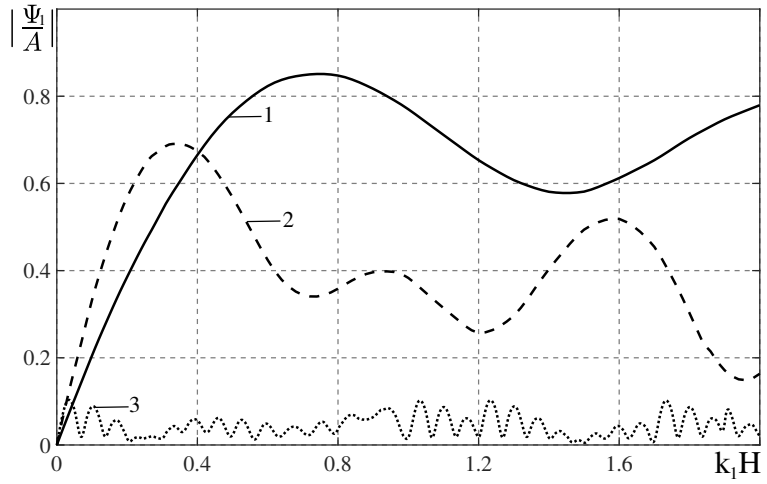


Рис. 4: Зависимость $\left|\frac{\psi_1}{A}\right|$ от волнового размера пластины k_1H для линейного закона неоднородности при $z_0 = 5H; 10H; 100H$

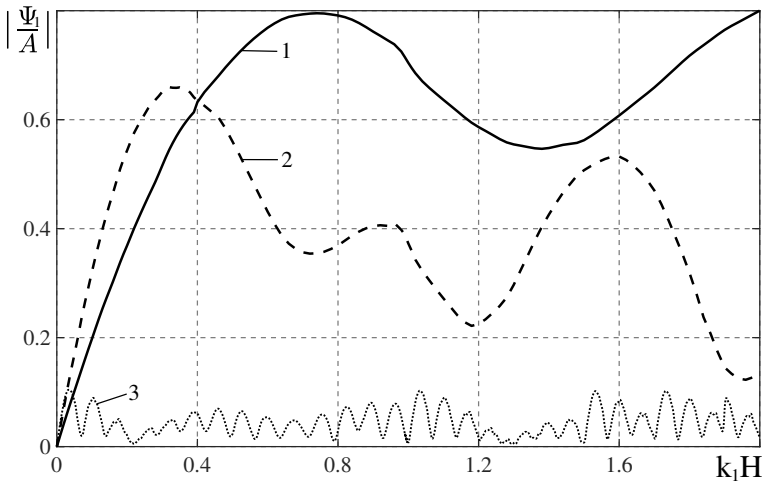


Рис. 5: Зависимость $\left|\frac{\psi_1}{A}\right|$ от волнового размера пластины k_1H для квадратичного закона неоднородности при $z_0 = 5H; 10H; 100H$

6. Заключение

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи об отражении и прохождении звуковой волны, излучаемой точечным источником, через однородную упругую пластину с покрытием, выполненным из функционально-градиентного материала.

В случае, когда геометрия фронта падающей волны не совпадает с геометрией тела, непосредственное решение дифракционной задачи оказывается весьма затруднительным. Приведенный выше подход к решению задачи позволил избежать необходимости решения соответствующих дифференциальных уравнений с граничными условиями.

С помощью непрерывно-неоднородных упругих покрытий можно изменять характер отражения и прохождения звука путем выбора законов неоднородности для механических параметров покрытия пластины. Используя полученное решение прямой задачи можно найти решение обратной задачи об определении параметров неоднородности материала покрытия, позволяющих получить требуемые звукоотражающие свойства пластины.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толоконников Л. А., Юдачев В. В. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 219 – 226.

2. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 480 – 488.

3. Ларин Н. В. Определение законов неоднородности покрытия термоупругой пластины, обеспечивающих наименьшее звукоотражение // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 11. Ч. 2. С. 216 – 234.

4. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. О влиянии неоднородного покрытия упругой пластины на отражение и прохождение звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 6. С. 362 – 372.

5. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 2. С. 289 – 302.

6. Нгуен Т. Ш. Об отражении и прохождении плоской звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2021. Вып. 5. С. 404 – 414.

7. Скобельцын С. А. Оценка свойств покрытия конечной упругой пластины с полостью, обеспечивающих заданные параметры отражения звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2017. Вып. 7. С. 83 – 92.

8. Толоконников Л. А., Толоконников С. Л. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругой пластиной с неоднородным анизотропным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 423 – 437.

9. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. Отражение и прохождение цилиндрической звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 1. С. 312 – 327.

10. Piquette J. C. Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent, with some implications for panel measurements // J. Acoust. Soc. Am. 1988. Vol. 83. No. 4. P. 1284 – 1294.

11. Шушкевич Г. Ч., Киселева Н. Н. Экранирование звукового поля плоским упругим слоем и тонкой незамкнутой сферической оболочкой // Информатика, 2014. № 2. С. 36 – 47.

12. Шендеров Е. А. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.

13. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

14. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.

15. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. Определение поля смещений неоднородного покрытия упругой пластины при прохождении через нее плоской звуковой волны // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 1. С. 310 – 321.

REFERENCES

1. Tolokonnikov, L. A. & Yudachev, V. V. 2015, “Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an elastic planar layer with a non-uniform covering”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 219 – 226, [in Russian].

2. Larin, N. V., Skobel’tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2016, “Modeling the inhomogeneous coating of an elastic plate with optimum sound-reflecting properties”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 80, no. 4, pp. 339 – 344.

3. Larin, N. V. 2016, “Determination of the inhomogeneity laws for coating of the thermoelastic plate to obtain minimum sound reflection”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 11-2, pp. 216 – 234, [in Russian].

4. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2018, “About the influence of an non-uniform covering of the elastic plate on sound reflection and transmission”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 6, pp. 362 – 372, [in Russian].

5. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2019, "The transmission of sound through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 311 -– 324, [in Russian].

6. Nguyen, T. S. 2021, “About reflection and transmission of a plane sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 5, pp. 404 – 414, [in Russian].

7. Skobel’tsyn, S. A. 2017, “Tstimation of the coating properties of a finite plate with a cavity providing the given parameters of the sound reflection”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 7, pp. 83 – 92, [in Russian].

8. Tolokonnikov, L. A. & Tolokonnikov, L. A. 2021, "Reflection and reflaction of a plane sound wave in an elastic plate with an inhomogeneous anisotropic coating *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 423 – 437, [in Russian].

9. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2022, "Reflection and transmission of cylindrical sound wave through an elastic plate with an inhomogeneous coating *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 312 -– 327, [in Russian].

10. Piquette J. C. 1988, "Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent, with some implications for panel measurements *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83, No. 4, pp. 1284 – 1294.

11. Shushkevich G. Ch. & Kiselyova N. N. 2014, "Sound field shielding by flat elastic layer and thin unclosed spherical shell”, *Informatika*, no. 2, pp. 36 – 47, [in Russian].

12. Shenderov, E. L. 1972, *“Wave problems of underwater acoustics”*, Sudostroenie, Leningrad, 352 p., [in Russian].

13. Nowacki, W.1973, *“Teoria sprezystosci”*, PWN, Warszawa.

14. Brekhovskikh, L. M. 1973, *“Waves in Layered Media”*, Nauka, Moscow, 344 p., [in Russian].

15. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2020, "Determination of the displacement field in an inhomogeneous coating of an elastic plate when passing through her plane sound wave *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 310 -– 321, [in Russian].

Получено: 14.10.2022
Принято в печать: 22.12.2022