А. В. Булинский, М. А. Вронский, Статистический вариант центральной предельной теоремы для ассоциированных случайных полей, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1996, том 2, выпуск 4, 999–1018

Статистический вариант центральной предельной теоремы для ассоциированных случайных полей*

А. В. БУЛИНСКИЙ, М. А. ВРОНСКИЙ
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*
e-mail: bulinski@nw.math.msu.su

Памяти Бориса Владимировича Гнеденко

УДК 519.21

Ключевые слова: ассоциированность, случайные поля, центральная предельная теорема, статистические оценки дисперсий сумм, рост множеств по Ван Хову.

Аннотация

Для строго стационарного ассоциированного случайного поля $\{X_j,\ j\in\mathbf{Z}^d\}$, $d\geqslant 1$, исследована асимптотическая нормальность сумм, берущихся по регулярно растущим подмножествам $\mathbf{Z}^d$. При этом введены семейства случайных нормировок, позволяющие строить приближенные доверительные интервалы для неизвестного среднего значения поля. Упомянутые нормировки включают в себя две статистики, предложенные в недавней работе М. Пелиград и Ки-Ман Шао.

Abstract

A. V. Bulinski, M. A. Vronski, Statistical variant of the CLT for associated random fields, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **2**(1996), 999–1018.

The asymptotic normality of sums taken over the «regulary» growing subsets of $\mathbf{Z}^d$ is studied for a strictly stationary associated random field $\{X_j,\ j\in\mathbf{Z}^d\}$, $d\geqslant 1$. In this connection families of random normalizations are introduced which permits us to construct approximate confidence intervals for the unknown mean of the field. These normalizations include the two statistics proposed for processes (i.e. $d=1$) in a recent paper by M. Peligrad and Q.-M. Shao.

1 Введение

Цель этой работы — доказать для стационарных случайных полей на $\mathbf{Z}^d$ центральную предельную теорему в общей постановке, когда суммирование ведется по множествам, стремящимся к бесконечности по Ван Хову, и, кроме

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, гранты 96–01–01092, 96–01–00672.

Фундаментальная и прикладная математика 1996, **2**, № 4, 999–1018.

того, используются случайные нормировки, позволяющие строить приближенные доверительные интервалы для неизвестного среднего значения.

Пусть $\mathbf{X} = \{X_t,\, t \in T\}$ — семейство действительных случайных величин, заданных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и параметрическом множестве T. Это семейство называется ассоциированным или положительно зависимым (см., например, [10]), если для любых конечных множеств $I, J \subset T$

$$\operatorname{cov}(f(X_t,\, t \in I), g(X_t,\, t \in J)) \geqslant 0 \tag{1}$$

для всех покоординатно неубывающих функций $f\colon \mathbf{R}^{|I|} \to \mathbf{R}$, $g\colon \mathbf{R}^{|J|} \to \mathbf{R}$, для которых ковариация определена (здесь и далее $|I|$ обозначает число элементов конечного множества I). Имеется ряд модификаций данного определения. Например, слабая ассоциированность (см., например, [9, 12]) означает выполнение (1) при дополнительном условии, что $I \cap J = \varnothing$, а отрицательная зависимость (см. [11]) предполагает замену знака неравенства в (1) на противоположный для непересекающихся множеств $I, J \subset T$ (по-прежнему рассматриваются покоординатно неубывающие функции f и g).

Начиная с замечательной работы Ньюмена [13], для случайных процессов и полей, обладающих свойством ассоциированности или его модификациями, был получен целый ряд результатов, относящихся к центральной предельной теореме, усиленному закону больших чисел, принципу инвариантности, закону повторного логарифма и др. (см., например, [3, 7, 8, 12] и там же библиографию).

Пусть $\{X_j, j \in \mathbf{Z}^d\}$, $d \geqslant 1$, — ассоциированное случайное поле, принимающее действительные значения, причем $\mathbf{E}\, X_j^2 < \infty$ при всех $j \in \mathbf{Z}^d$. Положим для $U \subset \mathbf{Z}^d$ с $|U| < \infty$

$$S(U) = \sum_{j \in U} X_j \quad \text{и} \quad \sigma(U)^2 = \mathbf{D}\, S(U).$$

Центральная предельная теорема означает, что при выполнении определенных условий для семейства «растущих» множеств $U_k \subset \mathbf{Z}^d$ выполняется соотношение

$$(S(U_k) - \mathbf{E}\, S(U_k))/\sigma(U_k) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1) \text{ при } k \to \infty. \tag{2}$$

Тривиальный случай $\sigma(U_k) = 0$, означающий, что все X_j, $j \in U_k$, являются вырожденными величинами, мы исключаем из рассмотрения.

Если $\mathbf{E}\, X_j = m$, $j \in \mathbf{Z}^d$ и если существует последовательность статистических оценок $\widehat{\sigma}(U_k) = \widehat{\sigma}(X_j, j \in U_k)$, таких что $\widehat{\sigma}(U_k) \neq 0$ п.н. при всех достаточно больших k, а

$$\widehat{\sigma}(U_k)/\sigma(U_k) \xrightarrow{P} 1 \text{ при } k \to \infty, \tag{3}$$

то вместо (2) можно записать, что

$$(S(U_k) - m|U_k|)/\widehat{\sigma}(U_k) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1) \text{ при } k \to \infty, \tag{4}$$

что позволяет строить приближенные доверительные интервалы для величины m.

В связи с (4) для семейства независимых слагаемых можно напомнить хорошо известную процедуру стьюдентизации. Для полей с перемешиванием случайные нормировки при оценках сумм случайных величин по известной части слагаемых рассматривались, например, в [4], § 11. Для строго стационарных последовательностей ($d = 1$), обладающих перемешиванием или ассоциированностью, при $U_k = \{1, \ldots, k\}$ в статье [14] предложены две оценки дисперсии, обеспечивающие выполнение (4). В нашей статье при $d \geqslant 1$ и для регулярно растущих множеств $U_k \subset \mathbf{Z}^d$ вводятся более общие семейства оценок $\widehat{\sigma}(U_k)$, использование которых приводит для ассоциированных полей к соотношению (4).

2 Центральная предельная теорема

Мы будем доказывать центральную предельную теорему, когда суммирование ведется по множествам, стремящимся к бесконечности в смысле Ван Хова. Напомним это понятие (см. [5]). Для $a \in \mathbf{R}_+^d$, $V \subset \mathbf{R}^d$, $j \in \mathbf{Z}^d$ введем обозначения:

$$\Lambda_0(a) = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \colon 0 < x_n \leqslant a_n, \, n = 1, \ldots, d\}, \tag{5}$$

$$\Lambda_j(a) = \Lambda_0(a) + (j_1 a_1, \ldots, j_n a_n), \tag{6}$$

$$J_a^+(V) = \{j \colon \Lambda_j(a) \cap V \neq \varnothing\}, \quad N_a^+(V) = \left|J_a^+(V)\right|,$$

$$J_a^-(V) = \{j \colon \Lambda_j(a) \subset V\}, \quad N_a^-(V) = \left|J_a^-(V)\right|.$$

Говорят, что $V_k \to \infty$ по Ван Хову при $k \to \infty$, если для каждого $a \in \mathbf{R}_+^d$

$$N_a^-(V_k) \to \infty, \ \frac{N_a^-(V_k)}{N_a^+(V_k)} \to 1 \text{ при } k \to \infty.$$

Поскольку последние соотношения выполняются при любом фиксированном a, мы можем выбрать $r_k \nearrow \infty$, $r_k \in \mathbf{N}$ так, чтобы при $a^{(k)} = r_k(1, \ldots, 1)$ выполнялись условия

$$N_{a^{(k)}}^-(U_k) \to \infty, \ \frac{N_{a^{(k)}}^-(U_k)}{N_{a^{(k)}}^+(U_k)} \to 1 \text{ при } k \to \infty. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть $\{X_j, \, j \in \mathbf{Z}^d\}$ — слабо ассоциированное, строго стационарное случайное поле, такое что $\mathbf{E}\, X_0^2 < \infty$ и*

$$\sigma^2 = \sum_{j \in \mathbf{Z}^d} \operatorname{cov}(X_j, X_0) < \infty. \tag{8}$$

Тогда для любой последовательности множеств $V_k \to \infty$ по Ван Хову и $U_k = V_k \cap \mathbf{Z}^d$ имеем

$$\frac{S(U_k) - m|U_k|}{|U_k|^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ при } k \to \infty. \tag{9}$$

Доказательство. Мы лишь наметим доказательство, так как оно основано на известных методах (см. [9, 13]). Для $U \subset \mathbf{Z}^d$ обозначим $\partial U = \{j \in U\colon \inf_{q \in \mathbf{Z}^d \setminus U} \|q - j\| = 1\}$, где $\|x\| = \max_{1 \leqslant l \leqslant d} |x_l|$, $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d$. Нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть $\{X_j,\, j \in \mathbf{Z}^d\}$ — стационарное в широком смысле случайное поле, такое что*

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}^d} |\operatorname{cov}(X_j,\, X_0)| < \infty. \tag{10}$$

Пусть $\{U_k, k \in \mathbf{N}\}$ — последовательность конечных подмножеств $\mathbf{Z}^d$, таких что

$$\frac{|\partial U_k|}{|U_k|} \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{11}$$

Тогда

$$\frac{\sigma(U_k)^2}{|U_k|} \to \sigma^2 = \sum_{j \in \mathbf{Z}^d} \operatorname{cov}(X_0,\, X_j) \text{ при } k \to \infty. \tag{12}$$

Для стационарных в узком смысле полей этот факт отмечен в [6], для интегралов, берущихся от стационарного в широком смысле поля по множествам, растущим в смысле Ван Хова, аналогичное утверждение доказано в [2].

Лемма 2. ([9].) *Пусть $\{X_1, \ldots, X_n\}$ — слабо ассоциированное семейство случайных величин. Тогда для любого $t \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство*

$$\left| \mathbf{E} \exp(it(X_1 + \ldots + X_n)) - \prod_{l=1}^{n} \mathbf{E} \exp(itX_l) \right| \leqslant \frac{t^2}{2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{n} \operatorname{cov}(X_k, X_l).$$

Теперь докажем теорему 1. Выберем $r_k \in \mathbf{N}$, $r_k \nearrow \infty$ $(k \to \infty)$ настолько медленно, чтобы для множеств U_k мы имели

$$\frac{|\partial_{(2r_k)} U_k \cup \partial^{(2r_k)} U_k|}{|U_k|} \to 0 \text{ при } k \to \infty, \tag{13}$$

где $\partial_{(r)} U = \{j \in U\colon \inf_{q \in \mathbf{Z}^d \setminus U} \|j - q\| \leqslant r\}$, $\partial^{(r)} U = \{j \in \mathbf{Z}^d \setminus U\colon \inf_{q \in U} \|j - q\| \leqslant r\}$. Возьмем $a^{(k)} = r_k(1, \ldots, 1)$ и разобьем U_k на множества

$$U_k^{(1)} = \bigcup_{j \in J^-_{a^{(k)}}} \Lambda_j(a^{(k)}), \quad U_k^{(2)} = U_k \setminus U_k^{(1)}.$$

Без ограничения общности далее считаем, что $\mathbf{E}\,X_0 = 0$. Пользуясь тем, что

$$\sigma(U)^2 \leqslant |U|\sigma^2 \text{ для } U \subset \mathbf{Z}^d, \tag{14}$$

а также леммой 1 и соотношением (13), получаем, что осталось показать следующее:

$$\frac{S(U_k^{(1)})}{\sigma(U_k^{(1)})} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1) \text{ при } k \to \infty. \tag{15}$$

Замечая, что

$$S(U_k^{(1)}) = \sum_{j \in J^-_{a^{(k)}}} Y_j^{(k)},$$

где $Y_j^{(k)} = S(\Lambda_j(a^{(k)}))$, получаем, что (15) в силу леммы 2 сведется к центральной предельной теореме для независимых одинаково распределенных слагаемых, если показать, что

$$|U_k|^{-1} \sum_{\substack{q,j \in J^-_{a^{(k)}}(U_k) \\ q \neq j}} \operatorname{cov}(Y_j^{(k)},\, Y_q^{(k)}) \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{16}$$

Но допредельное выражение в (16) не превосходит величины

$$|\Lambda_0(a^{(k)})|^{-1} \sum_{j \neq 0} \operatorname{cov}(Y_j^{(k)},\, Y_q^{(k)}). \tag{17}$$

Выберем последовательность $\varepsilon_k \to 0$ так, чтобы $r_k \varepsilon_k \to \infty$. Вводя в рассмотрение множество

$$\Lambda_0^\varepsilon(a) = \{j \in \mathbf{Z}^d\colon\ \varepsilon a_l < j_l \leqslant (1-\varepsilon)a_l,\ l = 1, \ldots, d\},$$

получаем следующую верхнюю оценку для (17):

$$\sum_{\|j\| \geqslant \varepsilon_k r_k} \operatorname{cov}(X_j,\, X_0) + \left(1 - \frac{|\Lambda_0^{\varepsilon_k}(a^{(k)}))|}{|\Lambda_0(a^{(k)})|}\right) \sum_{j \in \mathbf{Z}^d} \operatorname{cov}(X_j,\, X_0),$$

а это выражение стремится к 0 при $k \to \infty$ согласно (8) и в силу выбора ε_k и r_k. Теорема доказана.

Из теоремы 1, в частности, вытекает, что (9) справедливо для семейств растущих параллелепипедов, точнее говоря, для $U_k = V_k \cap \mathbf{Z}^d$, где

$$V_k = (a^{(k)}, b^{(k)}] \to \infty \text{ при } k \to \infty, \tag{18}$$

т. е. $V_k = \{x \in \mathbf{R}^d\colon\ a_l^{(k)} < x_l \leqslant b_l^{(k)},\ l = 1, \ldots, d\}$ и $\min\limits_{l=1,\ldots,d}(b_l^{(k)} - a_l^{(k)}) \to \infty$ при $k \to \infty$.

Учитывая (12) и (9), видим, что упомянутая задача приближенного доверительного оценивания среднего m сводится к нахождению подходящей статистической оценки величины σ.

3 Оценка σ по значениям поля на растущих параллелепипедах

Для конечного множества $U \subset \mathbf{Z}^d$ введем статистику

$$B(U) = \sum_{j\in U} f_j^{(U)}\left(\frac{S(Q_j)}{|Q_j|} - \frac{S(U)}{|U|}\right), \tag{19}$$

здесь $f_j^{(U)}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, $Q_j = Q_j(U) \subset U$, $Q_j \neq \varnothing$ при $j \in U$.

Мы начнем с рассмотрения множества $U = V \cap \mathbf{Z}^d$, где $V = (a, b] \subset \mathbf{R}^d$, причем $a, b \in \mathbf{Z}^d$ и $a \leqslant b$, что означает для компонент векторов выполнение неравенств $a_n \leqslant b_n$, $n = 1, \ldots, d$. Пусть $L_n(U) = b_n - a_n > 1$, $n = 1, \ldots, d$, и $R_j = \{q \in \mathbf{Z}^d;\ q \leqslant j\}$. Положим для $j \in U$ и $1 \leqslant s \leqslant 2$

$$Q_j(U) = U \cap R_j,\ f_j^{(U)}(x) = G_d(U)|Q_j|^{s/2-1}|x|^s, \tag{20}$$

где

$$G_d(U) = \left(\prod_{n=1}^{d} \log L_n(U)\right)^{-1}. \tag{21}$$

Теорема 2. *Пусть $\{X_j, j \in \mathbf{Z}^d\}$ — ассоциированное, строго стационарное случайное поле, для которого выполнено условие (8). Тогда для семейства параллелепипедов $V_k \to \infty$ и $U_k = V_k \cap \mathbf{Z}^d$, $k \in \mathbf{N}$, при каждом $s \in [1, 2]$ имеем*

$$B(U_k) \stackrel{L^{2/s}}{\to} \sigma^s\, \mathbf{E}\,|Y|^s \ \text{при } k \to \infty, \tag{22}$$

где $B(U_k)$ определяются согласно (19), (20), (21), знак $\stackrel{L^{2/s}}{\to}$ обозначает сходимость в пространстве $L^{2/s}(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, а случайная величина Y имеет стандартное нормальное распределение. Следовательно,

$$\frac{S(U_k) - m|U_k|}{(M_s^{-1}B(U_k))^{1/s}|U_k|^{1/2}} \stackrel{D}{\to} \mathcal{N}(0, 1) \ \text{при } k \to \infty, \tag{23}$$

здесь

$$M_s = \pi^{-1/2}2^{s/2}\Gamma((s + 1)/2), \tag{24}$$

в частности, $M_1 = \sqrt{2/\pi}$, $M_2 = 1$.

Замечание 1. При $d = 1$, $U_k = \{1, \ldots, k\}$ и $s = 1$, $s = 2$ теорема 2 содержит теорему 1.3 из [14].

Доказательство. Без ограничения общности будем далее считать $m = 0$. Соотношение (22) означает, что при $k \to \infty$

$$\left\| G_d(U_k) \sum_{j\in U_k} |Q_j|^{s/2-1} \left|\frac{S(Q_j)}{|Q_j|} - \frac{S(U_k)}{|U_k|}\right|^s - \sigma^s\, \mathbf{E}\,|Y|^s \right\|_{2/s} \to 0.$$

Поэтому достаточно установить при $k \to \infty$ справедливость следующих трех утверждений:

$$G_d(U_k)\left\| \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{s/2-1} \left(\left| \frac{S(Q_j)}{|Q_j|} - \frac{S(U_k)}{|U_k|} \right|^s - \left| \frac{S(Q_j)}{|Q_j|} \right|^s \right) \right\|_{2/s} \to 0, \tag{25}$$

$$G_d(U_k)\left\| \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{s/2-1} \left(\frac{|S(Q_j)|^s}{|Q_j|^s} - \frac{\mathbf{E}\,|S(Q_j)|^s}{|Q_j|^s} \right) \right\|_{2/s} \to 0, \tag{26}$$

$$G_d(U_k) \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1} \frac{\mathbf{E}\,|S(Q_j)|^s}{|Q_j|^{s/2}} - \sigma^s\, \mathbf{E}\,|Y|^s \to 0. \tag{27}$$

В силу стационарности, здесь можно считать, что $U_k = V_k \cap \mathbf{Z}^d$, где $V_k = (0, L^{(k)}]$, при этом $Q_j = \{0 < q_i \leqslant j_i,\ i = 1, \dots, d\}$.

Нам понадобится следующая простая лемма, являющаяся многомерным аналогом леммы Теплица.

Лемма 3. *Пусть имеются два числовых массива* $\{\alpha_j \geqslant 0,\ j \in \mathbf{N}^d\}$ *и* $\{\beta_j,\ j \in \mathbf{N}^d\}$ *и последовательность параллелепипедов* $V_k = (0, L^{(k)}] \to \infty$ *при* $k \to \infty$, $U_k = V_k \cap \mathbf{Z}^d$. *Предположим, что*

$$\beta_j \to \beta \text{ при } j \to \infty \ (\text{т. е. при } \min_{l=1,\dots,d} j_l \to \infty)$$

и $|\beta_j| \leqslant c_0 < \infty$ *для всех* $j \in \mathbf{N}^d$. *Пусть также при любом* $q \in \mathbf{N}^d$

$$\left(\sum_{j \in U_k} \alpha_j \right)^{-1} \left(\sum_{\substack{j \in U_k \\ j \geqslant q}} \alpha_j \right) \to 1 \text{ при } k \to \infty.$$

Тогда

$$\left(\sum_{j \in U_k} \alpha_j \right)^{-1} \sum_{j \in U_k} \alpha_j \beta_j \to \beta \text{ при } k \to \infty.$$

Для доказательства (27) следует учесть, что если $s \in [1, 2]$, то для любого $Q \subset \mathbf{Z}^d$ с $|Q| < \infty$

$$\mathbf{E}\,|S(Q)|^s \leqslant \left(\mathbf{E}\,|S(Q)|^2\right)^{s/2} \leqslant \sigma^s |Q|^{s/2}. \tag{28}$$

В силу теоремы 1, если $j = (j_1, \dots, j_d) \to \infty$, то

$$\frac{S(Q_j)}{\sqrt{|Q_j|}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Кроме того, при $j \to \infty$

$$|Q_j|^{-s/2}\, \mathbf{E}\,|S(Q_j)|^s \to \sigma^s\, \mathbf{E}\,|Y|^s = \sigma^s M_s.$$

При $s = 2$ это вытекает из (12), а при $s < 2$ учитываем, что семейство $\left\{|Q_j|^{-s/2}|S(Q_j)|^s,\ j \in \mathbf{N}^d\right\}$ является равномерно интегрируемым в силу (14).

Следует также принять во внимание, что для любого $q \in \mathbf{N}^d$ и $U_k = (q, L^{(k)}] \cap \mathbf{Z}^d$

$$G_d(U_k) \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1} \to 1 \text{ при } k \to \infty, \tag{29}$$

и воспользоваться леммой 3.

Докажем теперь (26). Пусть для $c \geqslant 0$

$$h(x) = \min(|x|, c)^s, \quad \widetilde{h}(x) = |x|^s - h(x). \tag{30}$$

Тогда $|\widetilde{h}(x)| \leqslant |x|^s I(|x| \geqslant c)$, где $I(A)$ — индикатор множества A. Далее

$$\begin{aligned} G_d(U_k) &\left\| \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1} \left(\frac{|S(Q_j)|^s}{|Q_j|^{s/2}} - \frac{\mathbf{E}\,|S(Q_j)|^s}{|Q_j|^{s/2}} \right) \right\|_{2/s} \leqslant \\ &\leqslant G_d(U_k) \left\| \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1} \left(h\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}}\right) - \mathbf{E}\, h\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}}\right) \right) \right\|_{2/s} + \\ &+ G_d(U_k) \left\| \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1} \left(\widetilde{h}\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}}\right) - \mathbf{E}\, \widetilde{h}\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}}\right) \right) \right\|_{2/s} = I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{31}$$

Оценим сверху каждое слагаемое в правой части (31). Применив неравенство Ляпунова, получим

$$\begin{aligned} I_1^2 &\leqslant G_d(U_k)^2\, \mathbf{E} \Bigg(\sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1} \left(h\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}}\right) - \mathbf{E}\, h\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}}\right) \right) \Bigg)^2 = \\ &= G_d(U_k)^2 \sum_{j \in U_k} \sum_{q \in U_k} |Q_j|^{-1} |Q_q|^{-1} \operatorname{cov}\left(h\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}}\right),\ h\left(\frac{|S(Q_q)|}{\sqrt{|Q_q|}}\right) \right). \end{aligned}$$

Сформулируем необходимый нам далее результат. Обозначим $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ класс непрерывных функций $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, имеющих односторонние частные производные по любой переменной в любой точке:

$$\exists\, \frac{\partial^+ f}{\partial x_k},\ \frac{\partial^- f}{\partial x_k} \text{ при } x \in \mathbf{R}^n,\ k = 1, \ldots, n,$$

а, кроме того, число точек x, где $\dfrac{\partial^+ f}{\partial x_k} \neq \dfrac{\partial^- f}{\partial x_k}$ при некотором k конечно в каждом ограниченном объеме $\mathbf{R}^n$.

Для $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ обозначим

$$L_k(f) = \max\left\{ \sup_x \left| \frac{\partial^+ f}{\partial x_k} \right|, \sup_x \left| \frac{\partial^- f}{\partial x_k} \right| \right\}.$$

Лемма 4. ([8].) *Пусть* $\{X_t,\ t\in T\}$ *— слабо ассоциированное или отрицательно зависимое семейство случайных величин, а* I, J *— конечные непересекающиеся подмножества* T. *Тогда для всех* $f\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^{|I|})$, $g\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^{|J|})$ *выполняется неравенство*

$$|\operatorname{cov}(f(X_q,\ q\in I),\, g(X_j,\ j\in J))|\leqslant\sum_{q\in I}\sum_{j\in J}L_q(f)L_j(g)|\operatorname{cov}(X_q,\, X_j)|.$$

Воспользуемся леммой 4 (если $\{X_t,\ t\in T\}$ ассоциированны, а не только слабо ассоциированны, в ней можно заменить непересекающиеся множества I и J на любые конечные подмножества T). В результате получим

$$\begin{aligned}I_1^2&\leqslant s^2c^{2(s-1)}G_d(U_k)^2\sum_{j\in U_k}\sum_{q\in U_k}|Q_j|^{-3/2}|Q_q|^{-3/2}\operatorname{cov}(S(Q_j),\, S(Q_q)))=\\&=s^2c^{2(s-1)}G_d(U_k)^2\sum_{j\in U_k}\sum_{q\in U_k}|Q_j|^{-3/2}|Q_q|^{-3/2}\sum_{0<t\leqslant j}\sum_{0<p\leqslant q}\operatorname{cov}(X_t,\, X_p)=\\&=s^2c^{2(s-1)}G_d(U_k)^2\sum_{t\in U_k}\sum_{p\in U_k}\operatorname{cov}(X_t,\, X_p)\sum_{t\leqslant j\leqslant L^{(k)}}\sum_{p\leqslant q\leqslant L^{(k)}}|Q_j|^{-3/2}|Q_q|^{-3/2}.\end{aligned}$$

Теперь заметим, что $|Q_j|=j_1\cdot\ldots\cdot j_d$ и что для $m,n\in\mathbf{N}$

$$\sum_{k=m}^{m+n}k^{-3/2}\leqslant\frac{3}{\sqrt{m}}.$$

Следовательно,

$$I_1^2\leqslant 3^{2d}s^2c^{2(s-1)}G_d(U_k)^2\sum_{t\in U_k}\sum_{p\in U_k}\operatorname{cov}(X_t,\, X_p)(t_1\cdot\ldots\cdot t_d)^{-1/2}(p_1\cdot\ldots\cdot p_d)^{-1/2}. \tag{32}$$

Воспользуемся тем, что

$$\{t,p\in U_k\}=\{t,p\in U_k\colon\ t_1\ldots t_d\leqslant p_1\ldots p_d\}\cup\{t,p\in U_k\colon\ t_1\ldots t_d>p_1\ldots p_d\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\sum_{t\in U_k}\sum_{p\in U_k}\operatorname{cov}(X_t,\, X_p)(t_1\cdot\ldots\cdot t_d)^{-1/2}(p_1\cdot\ldots\cdot p_d)^{-1/2}\leqslant\\&\quad\leqslant 2\sum_{\substack{t,p\in U_k\\ t_1\ldots t_d\leqslant p_1\ldots p_d}}\operatorname{cov}(X_t,\, X_p)(t_1\cdot\ldots\cdot t_d)^{-1/2}(p_1\cdot\ldots\cdot p_d)^{-1/2}\leqslant\\&\quad\leqslant 2\sum_{t,p\in U_k}\operatorname{cov}(X_t,\, X_p)(t_1\cdot\ldots\cdot t_d)^{-1}\leqslant 2\sigma^2\sum_{t\in U_k}(t_1\cdot\ldots\cdot t_d)^{-1}.\end{aligned} \tag{33}$$

Из (29), (32) и (33) вытекает, что $I_1\to 0$ при $k\to\infty$.

Теперь оценим второе слагаемое в правой части неравенства (31). Поскольку $\|\widetilde{h} - \mathbf{E}\,\widetilde{h}\|_{2/s} \leqslant 2\|\widetilde{h}\|_{2/s}$, видим, что

$$I_2 \leqslant 2G_d(U_k) \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1} \left\| \widetilde{h}\left(\frac{S(Q_j)}{\sqrt{|Q_j|}}\right) \right\|_{2/s}.$$

Из соотношения

$$\left\| \widetilde{h}\left(\frac{S(Q_j)}{\sqrt{|Q_j|}}\right) \right\|_{2/s} \leqslant \left(\left(\mathbf{E}\left(\frac{|S(Q_j)|^s}{|Q_j|^{s/2}} \cdot I\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}} \geqslant c \right) \right) \right)^{2/s} \right)^{s/2} = \\ = \left(\mathbf{E}\,\frac{S(Q_j)^2}{|Q_j|} \cdot I\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}} \geqslant c \right) \right)^{s/2}$$

следует, что

$$I_2 \leqslant 2G_d(U_k) \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1} \left(\mathbf{E}\,\frac{S(Q_j)^2}{|Q_j|} \cdot I\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}} \geqslant c \right) \right)^{s/2}. \tag{34}$$

Теперь разделим U_k на две части:

$$U_k^{(1)} = (r_k\mathbf{1}, L^{(k)}] \cap \mathbf{Z}^d,\ U_k^{(2)} = U_k \setminus U_k^{(1)}, \text{ где } r_k = \log\Bigl(\min_{n=1,\dots,d} L_n^{(k)}\Bigr).$$

Введем в рассмотрение множество $W = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k^{(1)}$. Соответствующая система случайных величин $\bigl\{|Q_j|^{-1}S(Q_j)^2,\ j \in W\bigr\}$ равномерно интегрируема. Действительно, множество W можно перенумеровать так, что $W = \{j^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$, причем $\min_{n=1,\dots,d} j_n^{(l)} \to \infty$ при $l \to \infty$. По теореме Ньюмена (или см. теорему 1) мы будем иметь

$$\frac{S(Q_{j^{(l)}})}{\sqrt{|Q_{j^{(l)}}|}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ при } l \to \infty,$$

а, кроме того, по лемме 3

$$\frac{\mathbf{D}\,S(Q_{j^{(l)}})}{|Q_{j^{(l)}}|} \to \sigma^2 \text{ при } l \to \infty.$$

Теперь равномерная интегрируемость следует из теоремы 5.4 в [1].

Продолжим оценивание I_2 следующим образом:

$$I_2 \leqslant 2G_d(U_k) \sum_{j \in U_k^{(1)}} |Q_j|^{-1} \left(\mathbf{E}\,\frac{S(Q_j)^2}{|Q_j|} \cdot I\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}} \geqslant c \right) \right)^{s/2} + \\ + 2G_d(U_k) \sum_{j \in U_k^{(2)}} |Q_j|^{-1} \left(\mathbf{E}\,\frac{S(Q_j)^2}{|Q_j|} \right)^{s/2}.$$

Используя (28), при всех достаточно больших k получим

$$I_2 \leqslant 3 \max_{j \in U_k^{(1)}} \left(\mathbf{E}\, \frac{S(Q_j)^2}{|Q_j|} \cdot I\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}} \geqslant c \right) \right)^{s/2} + 2G_d(U_k)\sigma^s \cdot \sum_{j \in U_k^{(2)}} |Q_j|^{-1}. \quad (35)$$

Первое слагаемое в правой части (35) оценивается сверху величиной

$$3 \max_{j \in W} \left(\mathbf{E}\, \frac{S(Q_j)^2}{|Q_j|} \cdot I\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}} \geqslant c \right) \right)^{s/2}$$

и, следовательно, стремится к нулю с увеличением c.

Замечая, что при всех достаточно больших k

$$G_d(U_k) \sum_{j \in U_k^{(2)}} |Q_j|^{-1} \leqslant 2d \cdot \frac{\log\log r_k}{\log r_k},$$

получаем, что $I_2 \to 0$ при $k \to \infty$, а тем самым справедливо и (26).

Докажем (25). Положим

$$I_3 = \left\| \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{s/2-1} \left(\left| \frac{S(Q_j)}{|Q_j|} - \frac{S(U_k)}{|U_k|} \right|^s - \left| \frac{S(Q_j)}{|Q_j|} \right|^s \right) \right\|_{2/s}.$$

Если $s = 1$, то, очевидно,

$$I_3 \leqslant |U_k|^{-1} \cdot \mathbf{E}\,|S(U_k)| \cdot \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1/2} \leqslant \sigma \cdot |U_k|^{-1/2} \cdot \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1/2},$$

поэтому $I_3 \leqslant 3\sigma$ при всех достаточно больших k.

Если $s \in (1, 2]$, то воспользуемся неравенством

$$||x+y|^s - |x|^s| \leqslant s(|x|^{s-1} + |y|^{s-1})|y|, \quad (36)$$

справедливым для всех $x, y \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} I_3 &\leqslant s \left\| \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{s/2-1} \left(\frac{|S(U_k)|}{|U_k|} \frac{|S(Q_j)|^{s-1}}{|Q_j|^{s-1}} + \frac{|S(U_k)|^s}{|U_k|^s} \right) \right\|_{2/s} \leqslant \\ &\leqslant s \left\| \frac{|S(U_k)|}{|U_k|} \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1/2} \frac{|S(Q_j)|^{s-1}}{\sqrt{|Q_j|^{s-1}}} \right\|_{2/s} + \\ &+ s \frac{\left(\mathbf{E}\, S(U_k)^2\right)^{s/2}}{|U_k|^s} \cdot \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{\frac{s}{2}-1}. \end{aligned} \quad (37)$$

По неравенству Гельдера для сумм получаем

$$\sum_{j\in U_k}|Q_j|^{-1/2}\frac{|S(Q_j)|^{s-1}}{\sqrt{|Q_j|^{s-1}}}\leqslant\Bigl(\sum_{j\in U_k}|Q_j|^{-\frac{1}{3-s}}\Bigr)^{\frac{3-s}{2}}\cdot\Bigl(\sum_{j\in U_k}\frac{S(Q_j)^2}{|Q_j|}\Bigr)^{\frac{s-1}{2}}. \tag{38}$$

Теперь по неравенству Гельдера для интегралов имеем

$$\Bigl(\mathbf{E}\,\frac{|S(U_k)|^{2/s}}{|U_k|^{2/s}}\cdot\Bigl(\sum_{j\in U_k}\frac{S(Q_j)^2}{|Q_j|}\Bigr)^{\frac{s-1}{s}}\Bigr)^{\frac{s}{2}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\bigl(\mathbf{E}\,S(U_k)^2\bigr)^{1/2}}{|Uk|}\cdot\Bigl(\mathbf{E}\sum_{j\in U_k}\frac{S(Q_j)^2}{|Q_j|}\Bigr)^{\frac{s-1}{2}}\leqslant\sigma^s|U_k|^{\frac{s-2}{2}}. \tag{39}$$

Заметим, что

$$\sum_{j\in U_k}|Q_j|^{-\frac{1}{3-s}}\leqslant\begin{cases}A_d^{(s)}|U_k|^{\frac{2-s}{3-s}}, & \text{если } s\in(1,2),\\ A_d^{(s)}\log L_1^{(k)}\cdot\ldots\cdot\log L_d^{(k)}, & \text{если } s=2,\end{cases} \tag{40}$$

где множители $A_d^{(s)}$ зависят только от s и d.

Согласно (38), (39),(40) первое слагаемое в правой части (37) допускает оценку $s\sigma^s A_d^{(s)}$ и $2\sigma^2A_d^{(2)}(\log L_1^{(k)}\ldots\log L_d^{(k)})^{1/2}$ соответственно для $s\in(1,2)$ и $s=2$. Второе слагаемое в правой части (37) при всех достаточно больших k оценивается сверху величиной $\sigma^sB_d^{(s)}$, где $B_d^{(s)}$ зависит лишь от d и s.

Таким образом, $G_d(U_k)\cdot I_3\to 0$ при $k\to\infty$ для $s\in[1,2]$, что означает выполнение (25). Теорема 2 доказана.

Замечание 2. При $d=1$ можно ослабить условия теоремы, потребовав лишь слабую ассоциированность. Для этого следует воспользоваться рассуждениями, применявшимися в [14] для процессов с перемешиванием.

4 Сходимость $B(U_k)$ почти наверное

Для получения соотношений типа (4) или (9) не требуется доказывать более сильный тип сходимости к пределу оценок $B(U_k)$. Тем не менее мы приведем один результат, показывающий, что при наложении определенных дополнительных условий удается получить сходимость $B(U_k)$ к σ^sM_s с вероятностью 1 при $k\to\infty$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и, кроме того,* $U_k\subset U_{k+1}$, $k\in\mathbf{N}$, *и*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\log L_n^{(k)}}{\log L_n^{(k+1)}}=1 \text{ при } n=1,\ldots,d. \tag{41}$$

Пусть, далее, для некоторого $s \in [1, 2)$

$$G_d^{1/s}(U_k)|U_k|^{-1/2} S(U_k) \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{42}$$

Тогда для этой последовательности множеств U_k *и данного* s *имеем*

$$B(U_k) \xrightarrow{\text{п.н.}} \sigma^s M_s \text{ при } k \to \infty,$$

где σ^2 *и* M_s *определяются соответственно в* (8) *и* (24).

Замечание 3. В случае $s = 1$, $d = 1$, $U_k = \{1, \ldots, k\}$ сходимость $B(U_k)$ почти наверное доказана в [14].

Доказательство. В силу (27)

$$m_k = G_d(U_k) \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1-\frac{s}{2}} \, \mathbf{E} \, |S(Q_j)|^s \to \sigma^s M_s \text{ при } k \to \infty.$$

Поэтому достаточно доказать, что $B(U_k) - m_k \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ при $k \to \infty$. Представим разность в виде

$$B(U_k) - m_k = (B(U_k) - \widetilde{B}(U_k)) + (\widetilde{B}(U_k) - m_k) = T_1(k) + T_2(k), \tag{43}$$

где $\widetilde{B}(U_k) = G_d(U_k) \sum\limits_{j \in U_k} |Q_j|^{-1-\frac{s}{2}} |S(Q_j)|^s$, и докажем, что $T_1(k)$ и $T_2(k)$ стремятся к нулю почти наверное.

Сначала рассмотрим слагаемое $T_2(k)$. Оценим $\|T_2(k)\|_1$ способом, аналогичным использованному в доказательстве теоремы 2. Имеем

$$\begin{aligned}
\|T_2(k)\|_1 \leqslant G_d(U_k) & \left\| \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1} \left(h\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}} \right) - \mathbf{E}\, h\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}} \right) \right) \right\|_1 + \\
& + G_d(U_k) \left\| \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1} \left(\widetilde{h}\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}} \right) - \mathbf{E}\, \widetilde{h}\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}} \right) \right) \right\|_1 \leqslant \\
& \leqslant G_d(U_k) \left\| \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1} \left(h\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}} \right) - \mathbf{E}\, h\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}} \right) \right) \right\|_2 + \\
& + 2 G_d(U_k) \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-1} \left\| \widetilde{h}\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}} \right) \right\|_1 .
\end{aligned} \tag{44}$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (44) при всех достаточно больших k было оценено в доказательстве теоремы 2 величиной

$$2\sigma s 3^d c^{s-1} (\log L_1^{(k)} \ldots \log L_d^{(k)})^{-1/2}.$$

Второе слагаемое в (44) оценим, заметив, что

$$\left\|\widetilde{h}\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}}\right)\right\|_1 \leqslant \mathbf{E}\,\frac{|S(Q_j)|^s}{\sqrt{|Q_j|^s}}\cdot I\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}}\geqslant c\right) \leqslant c^{s-2}\cdot \mathbf{E}\,\frac{S(Q_j)^2}{|Q_j|} \leqslant \sigma^2 c^{s-2},$$

или, при достаточно больших k,

$$2G_d(U_k)\sum_{j\in U_k}|Q_j|^{-1}\left\|\widetilde{h}\left(\frac{|S(Q_j)|}{\sqrt{|Q_j|}}\right)\right\|_1 \leqslant 3\sigma^2 c^{s-2}.$$

Итак, если k достаточно велики, то

$$\|T_2\|_1 \leqslant A_d\sigma c^{s-1}(\log L_1^{(k)}\ldots\log L_d^{(k)})^{-1/2} + B_d c^{s-2}\sigma^2, \tag{45}$$

где A_d, B_d — множители, зависящие только от d.

Выберем подпоследовательность $\{k_n\}\subset\mathbf{N}$ следующим способом:

$$k_1 = 1,\ \ k_{n+1} = \min\left\{k\colon \max_{l=1,\ldots,d}\frac{\log L_l^{(k)}}{\log L_l^{(k_n)}} \geqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{4}{2-s}}\right\}.$$

Тогда

$$\prod_{l=1}^{d}\frac{\log L_l^{(k_{n+1})}}{\log L_l^{(k_n)}} \geqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{4}{2-s}}, \tag{46}$$

а при $k_n\leqslant k<k_{n+1}$ будут выполнены следующие неравенства:

$$\prod_{l=1}^{d}\frac{\log L_l^{(k)}}{\log L_l^{(k_n)}} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{4d}{2-s}}. \tag{47}$$

Мы использовали неубывание последовательности U_k. Из неравенств (46), (47) следует, что

$$\left(\prod_{l=1}^{d}\log L_l^{(k_n)}\right)^{-1} \leqslant H\cdot n^{-\frac{4}{2-s}}, \tag{48}$$

где H — некоторая константа, а, кроме того, учитывая (41), получаем

$$\prod_{l=1}^{d}\frac{\log L_l^{(k_{n+1})}}{\log L_l^{(k_n)}} \to 1 \text{ при } n\to\infty. \tag{49}$$

Определим

$$c_k = n^{\frac{2}{2-s}},\ \ \text{если}\ \ k_n\leqslant k<k_{n+1}.$$

Перепишем (45) для подпоследовательности k_n (при рассмотрении $\widetilde{B}(U_k)$ положим c в определении h и $\widetilde{h}$ равным c_k):

$$\|T_2(k_n)\|_1 \leqslant A\cdot n^{-2}, \tag{50}$$

где множитель A зависит лишь от s и σ.

Далее,

$$\lim_{m\to\infty}\mathbf{P}\biggl(\bigcup_{n\geqslant m}\{|T_2(k_n)|\geqslant\varepsilon\}\biggr)\leqslant\lim_{m\to\infty}\sum_{n\geqslant m}\mathbf{P}\left(|T_2(k_n)|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant \leqslant\lim_{m\to\infty}\sum_{n\geqslant m}\|T_2(k_n)\|_1\cdot\varepsilon^{-1}=0,$$

то есть

$$T_2(k_n)\xrightarrow{\text{п.н.}}0 \ \text{ или } \ \widetilde{B}(U(k_n))\xrightarrow{\text{п.н.}}\sigma^s M_s \text{ при } n\to\infty.$$

Замечая, что при $k_n\leqslant k<k_{n+1}$ выполняется двойное неравенство

$$\prod_{l=1}^{d}\frac{\log L_l^{(k_n)}}{\log L_l^{(k)}}\cdot\widetilde{B}(U_{k_n})\leqslant\widetilde{B}(U_k)\leqslant\prod_{l=1}^{d}\frac{\log L_l^{(k_{n+1})}}{\log L_l^{(k)}}\cdot\widetilde{B}(U_{k_{n+1}}),$$

а также то, что при этих k

$$\prod_{l=1}^{d}\log L_l^{(k_n)}\leqslant\prod_{l=1}^{d}\log L_l^{(k)}\leqslant\prod_{l=1}^{d}\log L_l^{(k_{n+1})}$$

с учетом (49) получаем, что при $k\to\infty$

$$\widetilde{B}(U(k))\xrightarrow{\text{п.н.}}\sigma^s M_s.$$

Докажем, что $T_1(k)\xrightarrow{\text{п.н.}}0$ при $n\to\infty$. Воспользовавшись неравенством (36), получим

$$\begin{aligned}|T_1(k)|&=G_d(U_k)\cdot\Bigl|\sum_{j\in U_k}|Q_j|^{-1+\frac{s}{2}}\left(\left|\frac{S(Q_j)}{|Q_j|}-\frac{S(U_k)}{|U_k|}\right|^s-\frac{|S(Q_j)|^s}{|Q_j|^s}\right)\Bigr|\leqslant\\&\leqslant sG_d(U_k)\frac{|S(U_k)|^s}{|U_k|^s}\sum_{j\in U_k}|Q_j|^{-1+\frac{s}{2}}+\\&+sG_d(U_k)\frac{S(U_k)}{|U_k|}\cdot\sum_{j\in U_k}|Q_j|^{-s/2}\cdot|S(Q_j)|^{s-1}.\end{aligned}\tag{51}$$

Первое слагаемое в правой части (51) стремится к 0 п.н. в силу (42). Второе слагаемое оценим, применяя неравенство Гельдера:

$$\sum_{j\in U_k}|Q_j|^{-s/2}\cdot|S(Q_j)|^{s-1}=\sum_{j\in U_k}|Q_j|^{\frac12-\frac1s}\left(\frac{|S(Q_j)|^s}{\sqrt{|Q_j|^s}}\frac{1}{|Q_j|}\right)^{\frac{s-1}{s}}\leqslant \leqslant\biggl(\sum_{j\in U_k}\left(|Q_j|^{\frac12-\frac1s}\right)^s\biggr)^{\frac1s}\cdot\biggl(\sum_{j\in U_k}\frac{|S(Q_j)|^s}{\sqrt{|Q_j|^s}}\frac{1}{|Q_j|}\biggr)^{\frac{s-1}{s}}.$$

В результате получаем

$$G_d(U_k)\frac{S(U_k)}{|U_k|}\cdot\sum_{j\in U_k}|Q_j|^{-s/2}\cdot|S(Q_j)|^{s-1}\leqslant$$
$$\leqslant\left(G_d^{\frac{1}{s}}(U_k)\frac{S(U_k)}{\sqrt{|U_k|}}\right)\left(\widetilde{B}(U_k)\right)^{\frac{s-1}{s}}\left(|U_k|^{-1/2}\Big(\sum_{j\in U_k}|Q_j|^{\frac{s}{2}-1}\Big)^{\frac{1}{s}}\right). \quad (52)$$

Первый сомножитель стремится к 0 п.н. по условию (42), второй — к константе по уже доказанному, а третий сомножитель ограничен. Значит, и $T_1(k)\xrightarrow{\text{п.н.}}0$. Теорема доказана.

Замечание 4. Если множества растут достаточно медленно, то условие (42) можно получить из максимального неравенства Ньюмена–Райта для последовательности сумм ассоциированных случайных величин с нулевым средним

$$\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}(S(U_k))^2\leqslant\mathbf{D}\,S(U_n)$$

аналогично тому, как это было проделано в [14].

Замечание 5. При $s=2$ сходимость $B(U_k)$ почти наверное можно аналогично доказать, если потребовать дополнительно, чтобы

$$|U_k|^{-1-\frac{\delta}{2}}\cdot\mathbf{E}\,|S(U_k)|^{2+\delta}\leqslant M$$

при некоторых $\delta>0$, $M\in\mathbf{R}_+$ и всех $k\in\mathbf{N}$.

5 Оценка σ по значениям поля на множествах, растущих в смысле Ван Хова

Рассматривая, вообще говоря, более общий класс множеств, чем параллелепипеды, мы выберем иначе функции $f_j^{(U)}$ в определении статистики $B(U)$, задаваемой формулой (19).

Для $j\in\mathbf{Z}^d$ и $r>0$ обозначим

$$K_j(r)=\{q\in\mathbf{Z}^d\colon\ \|q-j\|\leqslant r\},$$

где $\|x\|=\max\limits_{1\leqslant l\leqslant d}|x_l|$, $x=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbf{R}^d$. Далее, если $j\in U\subset\mathbf{Z}^d$, где $|U|<\infty$, $s\in[1,2]$, $r=r(U)>0$, то положим

$$Q_j(U)=U\cap K_j(r),\quad f_j^{(U)}(x)=|U|^{-1}|Q_j|^{s/2}|x|^s. \quad (53)$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при каждом $s\in[1,2]$ для последовательности множеств $V_k\to\infty$ по Ван Хову справедливы соотношения (22) и (23), в которых $B(U_k)$ для $U_k=V_k\cap\mathbf{Z}^d$ определяются согласно (19), (53), причем $r_k=r(U_k)\to\infty$ выбираются так, что* *удовлетворяется условие* (7) *и*

$$r_k^{2d} \cdot |U_k|^{-1} \leqslant M \tag{54}$$

при некотором $0 < M < \infty$ *и всех* $k \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Заметим, что

$$\|B(U_k) - \sigma^s M_s\|_{2/s} \leqslant J_1 + J_2 + J_3,$$

где

$$J_1 = |U_k|^{-1} \Bigg\| \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{s/2} \left(\left| \frac{S(Q_j)}{|Q_j|} - \frac{S(U_k)}{|U_k|} \right|^s - \left| \frac{S(Q_j)}{|Q_j|} \right|^s \right) \Bigg\|_{2/s},$$

$$J_2 = |U_k|^{-1} \Bigg\| \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-s/2} \left(|S(Q_j)|^s - \mathbf{E}\,|S(Q_j)|^s \right) \Bigg\|_{2/s},$$

$$J_3 = \Bigg| |U_k|^{-1} \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-s/2}\, \mathbf{E}\,|S(Q_j)|^s - \sigma^s M_s \Bigg|,$$

здесь и далее $Q_j = Q_j(U_k)$. Используя неравенство (36), а также учитывая (28), получаем, что

$$J_1 \leqslant s|U_k|^{-2} \Bigg\| |S(U_k)| \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{1-\frac{s}{2}} |S(Q_j)|^{s-1} \Bigg\|_{2/s} + s\sigma^s |U_k|^{-1-\frac{s}{2}} \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{\frac{s}{2}}. \tag{55}$$

Далее,

$$\Bigg\| |S(U_k)| \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{1-\frac{s}{2}} |S(Q_j)|^{s-1} \Bigg\|_{2/s} \leqslant$$
$$\leqslant |U_k| |K_0(r_k)|^{1-\frac{s}{2}} \max_{j \in U_k} \big\| |S(U_k)| |S(Q_j)|^{s-1} \big\|_{2/s}.$$

Для $j \in U_k$, применив неравенство Гельдера, имеем

$$\big\| |S(U_k)| \cdot |S(Q_j)|^{s-1} \big\|_{2/s} \leqslant \left(\mathbf{E}\, S(U_k)^2 \right)^{1/2} \left(\mathbf{E}\, S(Q_j)^2 \right)^{\frac{s-1}{2}} \leqslant \sigma^s |U_k|^{1/2} |K_0(r_k)|^{\frac{s-1}{2}}.$$

Таким образом, первое слагаемое в правой части неравенства (55) допускает верхнюю оценку

$$s\sigma^s |U_k|^{-1/2} |K_0(r_k)|^{1/2} = \left(\frac{|K_0(r_k)|^2}{|U_k|} \right)^{1/2} \cdot |K_0(r_k)|^{-1/2} \to 0$$

в силу (54) и так как $r_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Второе слагаемое в правой части формулы (55) оценивается так:

$$\frac{\sum\limits_{j\in U_k}|Q_j|^{\frac{s}{2}}}{|U_k|^{1+\frac{s}{2}}}\leqslant\frac{|K_0(r_k)|^{\frac{s}{2}}}{|U_k|^{\frac{s}{2}}}=\left(\frac{|K_0(r_k)|^2}{|U_k|}\right)^{\frac{s}{2}}\frac{1}{|K_0(r_k)|^{\frac{s}{2}}}\to 0\quad(k\to\infty).$$

Следовательно, $J_1\to 0$ при $k\to\infty$.

Пусть h и $\widetilde{h}$ обозначают функции, определенные формулами (30). Тогда

$$J_2\leqslant|U_k|^{-1}\left\|\sum_{j\in U_k}\left(h\left(\frac{S(Q_j)}{\sqrt{|Q_j|}}\right)-\mathbf{E}\,h\left(\frac{S(Q_j)}{\sqrt{|Q_j|}}\right)\right)\right\|_{2/s}+$$
$$+|U_k|^{-1}\left\|\sum_{j\in U_k}\left(\widetilde{h}\left(\frac{S(Q_j)}{\sqrt{|Q_j|}}\right)-\mathbf{E}\,\widetilde{h}\left(\frac{S(Q_j)}{\sqrt{|Q_j|}}\right)\right)\right\|_{2/s}=J_2^{(1)}+J_2^{(2)}.$$

Пользуясь неравенством Ляпунова и рассуждениями, проведенными при доказательстве теоремы 2, получаем

$$\left(J_2^{(1)}\right)^2\leqslant(sc^{s-1})^2|U_k|^{-2}\sum_{j,q\in U_k}|Q_j|^{-s/2}|Q_q|^{-s/2}\operatorname{cov}(S(Q_j),\,S(Q_q))=$$
$$=(sc^{s-1})^2|U_k|^{-2}\sum_{t,p\in U_k}\operatorname{cov}(X_t,\,X_p)\Bigg(\sum_{\substack{j\in U_k\\ Q_j\ni t}}|Q_j|^{-s/2}\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{q\in U_k\\ Q_q\ni p}}|Q_q|^{-s/2}\Bigg)\leqslant$$
$$\leqslant 2(sc^{s-1})^2\sigma^2|U_k|^{-2}\sum_{t\in U_k}\Bigg(\sum_{\substack{j\in U_k\\ Q_j\ni t}}|Q_j|^{-s/2}\Bigg)^2.$$

Для $U\subset\mathbf{Z}^d$ и $r\in\mathbf{R}_+$ обозначим $U^{(r)}=\{j\in U\colon\ \inf\limits_{q\in\partial U}\|q-j\|\geqslant r\}$.

Теперь заметим, что если $t\in U^{(2r_k)}$ и $Q_j\ni t$, то $|Q_j|=|K_0(r_k)|$. Кроме того, $|Q_j|\geqslant 1$ для всех $j\in U_k$. Поэтому

$$\left(J_2^{(1)}\right)^2\leqslant 2(sc^{s-1})^2\sigma^2|U_k|^{-1}|K_0(r_k)|^2\left(|K_0(r_k)|^{-s}+|U_k|^{-1}|U_k\setminus U_k^{(2r_k)}|\right).$$

Учитывая выбор последовательности r_k, удовлетворяющей условиям (7) и (54), получаем, что $J_2^{(1)}\to 0$ при $k\to\infty$.

Далее, легко видеть, что

$$J_2^{(2)}\leqslant 2|U_k|^{-1}\sum_{j\in U_k}\left\|\widetilde{h}\left(\frac{S(Q_j)}{\sqrt{|Q_j|}}\right)\right\|_{2/s}\leqslant$$
$$\leqslant 2|U_k|^{-1}\sum_{j\in U_k^{(2r_k)}}\left\|\widetilde{h}\left(\frac{S(Q_j)}{\sqrt{|Q_j|}}\right)\right\|_{2/s}+2|U_k|^{-1}\sum_{j\in U_k\setminus U_k^{(2r_k)}}\left(\mathbf{E}\left(\frac{S(Q_j)}{\sqrt{|Q_j|}}\right)^2\right)^{s/2}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\mathbf{E}\,\frac{S(K_0(r_k))^2}{|K_0(r_k)|}I\left(\frac{|S(K_0(r_k))|}{\sqrt{|K_0(r_k)|}}\geqslant c\right)\right)^{s/2}+\sigma^s\frac{|U_k\setminus U_k^{(2r_k)}|}{|U_k|}.$$

Остается учесть равномерную интегрируемость семейства величин

$$\left\{\frac{S(K_0(r_k))^2}{|K_0(r_k)|},\ k \in \mathbf{N}\right\},$$

а также использованное выше соотношение $\dfrac{|U_k \setminus U_k^{(2r_k)}|}{|U_k|} \to 0$ при $k \to \infty$.

Таким образом, $J_2 \to 0$ при $k \to \infty$.

Обратившись к оценке J_3, имеем

$$|U_k|^{-1} \sum_{j \in U_k} |Q_j|^{-s/2}\, \mathbf{E}\, |S(Q_j)|^s =$$

$$= |U_k|^{-1} |U_k^{(2r_k)}| \cdot \frac{\mathbf{E}\, |S(K_0(r_k))|^s}{\sqrt{|K_0(r_k)|^s}} + |U_k|^{-1} \sum_{j \in U_k \setminus U_k^{(2r_k)}} \frac{\mathbf{E}\, |S(Q_j)|^s}{\sqrt{|Q_j|^s}}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\mathbf{E}\, |S(K_0(r_k))|^s}{\sqrt{|K_0(r_k)|^s}} \to \sigma^s M_s$$

и

$$\frac{|U_k^{(2r_k)}|}{|U_k|} \to 1$$

при $k \to \infty$, а также (28), приходим к тому, что $J_3 \to 0$ при $k \to \infty$. Теорема доказана.

Замечание 6. Вообще говоря, все теоремы этой статьи, формулирующиеся для последовательностей множеств, растущих по Ван Хову, справедливы для таких последовательностей $U_k \subset \mathbf{Z}^d$, что $|\partial U_k|/|U_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Это условие является простым следствием того, что множества растут по Ван Хову.

В заключение заметим, что вопрос о скорости сходимости к нормальному закону случайным образом нормированных сумм, фигурирующих в (4), а также соображения в пользу выбора определенного s из промежутка $[1, 2]$ при построении статистики $B(U)$ будут рассмотрены в следующей публикации.

Литература

[1] П. Биллингсли. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977.

[2] А. В. Булинский. Центральная предельная теорема для полей дробового шума // Проблемы теории вероятн. распределений. XI / Ред. В. Н. Судаков. Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 177. — Л.: Наука, 1989. — С. 28–36.

[3] А. В. Булинский. Функциональный закон повторного логарифма для ассоциированных случайных полей // Фундамент. и прикл. матем. — 1995. — Т. 1, № 3. — С. 623–639.

[4] А. В. Булинский. Предельные теоремы в условиях слабой зависимости. — М.: МГУ, 1989.

[5] Д. Рюэль. Статистическая механика. Строгие результаты. — М.: Мир, 1971.

[6] E. Bolthausen. On the central limit theorem for the stationary mixing random fields // Ann. Probab. — 1982. — V. 10. — P. 1047–1050.

[7] A. V. Bulinski. On Berry – Esseen estimate analogues for associated random fields // Stability Problems for Stoch. Models (V. M. Zolotarev et al eds.). New Trends in Probab. and Statist. — Moscow: TVP, 1994. — P. 9–20.

[8] A. V. Bulinski. On the convergence rates in the CLT for positively and negatively dependent random fields. Proc. Kolmogorov Semester (March 1993), Int. Euler Math. Inst. — St. Petersburg: Gordon and Breach, 1996. — P. 1–12.

[9] A. R. Dabrovski and H. Dehling. A Berry – Esseen theorem and a functional law of iterated logarithm for weakly associated random vectors // Stoch. Proc. Appl. — 1988. — V. 30. — P. 277–289.

[10] J. Esary, F. Proschan, D. Walkup. Association of random variables with applications // Ann. Math. Statist. — 1967. — V. 38. — P. 1466–1474.

[11] K. Joag-Dev and F. Proschan. Negative association of random variables with applications // Ann. Math. Statist. — 1983. — V. 11. — P. 286–295.

[12] C. M. Newman. Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables // Inequalities in Statist. and Probab. / Y.L.Tong, ed. — Hayward, 1984. — P. 127–140.

[13] C. M. Newman. Normal fluctuations and FKG inequalities // Commun. Math. Phys. — 1980. — V. 74. — P. 119–128.

[14] M. Peligrad and Q. M. Shao. Self-normalised central limit theorem for sums of weakly dependent random variables // J. Theor. Probab. — 1994. — V. 7. — P. 309–338.

Статья поступила в редакцию в феврале 1996 г.