МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Т. 3, № 6 (1968), 707—714.

УДК 517.9

О ЧИСЛЕ ЯЧЕЕК ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А. Д. Мышкис, Л. Э. Рейзинь

В динамической системе, имеющей конечное число элементарных точек покоя, предельными множествами траекторий которой служат только эти точки покоя, ячейкой называется компонента связности множества точек траекторий с общим положительным и общим отрицательным предельным множеством. Строится пример, показывающий, что динамическая система может иметь как угодно большое конечное число ячеек, хотя число точек покоя фиксировано. Библ. 2 назв.

1. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = P(x), \tag{1}$$

где x и P суть n-векторы, P определено и непрерывно вместе с первыми частными производными на некоторой области G n-мерного евклидова пространства. Тогда, как известно, через каждую точку области G проходит одна и только одна траектория уравнения (1), которая, в частности, может быть и точкой покоя. Точки траекторий, имеющих некоторую точку покоя своим положительным (отрицательным) предельным множеством, образуют устойчивое (неустойчивое) многообразие этой точки покоя. Если матрица Якоби $\partial P/\partial x$ в этой точке не имеет собственных значений с нулевой действительной частью, устойчивые и неустойчивые многообразия имеют тот же класс гладкости, что и P. Для краткости будем говорить, что траектория *входит в точку покоя* (*выходит из нее*), если она имеет эту точку покоя в качестве положительного (отрицательного) предельного множества. Два многообразия M_m и M_p размерностей m и p имеют нормальное пересечение, если размерность пересечения касательных пространств к M_m и M_p в любой точке $M_m \cap M_p$ равна $m + p - n$.

Пусть некоторый топологический шар B содержится в G и P удовлетворяет следующим условиям:

1) Через границу шара B все траектории уравнения (1) выходят из шара B.

2) Уравнение (1) имеет в B конечное число точек покоя x_i и матрицы $\partial P/\partial x|_{x=x_i}$ не имеют собственных значений с нулевой действительной частью.

3) Все предельные множества траекторий уравнения (1) содержатся в точках покоя, описанных в 2), если эти траектории не выходят из B.

4) Все устойчивые и неустойчивые многообразия разных точек покоя имеют нормальные пересечения.

Перечисленные условия похожи на условия Смейла [1]; только здесь дополнительно предполагается отсутствие замкнутых траекторий.

Назовем точку покоя x_0 в шаре B *источником* (*стоком*), если все собственные значения матрицы $\partial P/\partial x|_{x=x_i}$ имеют положительные (отрицательные) действительные части. Границу шара B также будем считать стоком. Компоненту связности множества точек траекторий, выходящих из одного и того же источника и входящих в один и тот же сток, назовем *n-мерной ячейкой* динамической системы, определенной уравнением (1).

Уравнение (1) определяет и динамические системы на устойчивых и неустойчивых многообразиях. На них также можно ввести понятие ячеек, имеющих размерности p, $1 \leqslant p < n$. Точки покоя можно считать нульмерными ячейками. Однако в настоящей статье мы не будем пользоваться понятием ячеек размерностей, меньших n, поэтому n-мерные ячейки будем называть просто *ячейками*.

Число ячеек у динамической системы, определенной уравнением (1), когда P удовлетворяет перечисленным выше условиям, по-видимому, конечно, однако можно поставить вопрос, существует ли оценка сверху для числа ячеек в зависимости от числа точек покоя в шаре B.

В статье построен пример, показывающий, что уже при $n = 3$ система может при фиксированном числе точек покоя (равном пяти) иметь сколь угодно большое конечное число ячеек. При этом правые части системы имеют непрерывные производные всех порядков. Можно было бы построить аналогичный пример и для случая аналитических правых частей. Было бы интересно получить оценку числа ячеек для правых частей более специальной структуры, например представляющих собой многочлены степени не выше заданной.

2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -x\,(2y+1-2z^2), \\ \dot{y} &= (x^2+y^2+z^2-y)\,(y+1-z^2), \\ \dot{z} &= z\,(z^2-1) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

в области (рис. 1)

$$V \leqslant 17, \quad V = x^2 + 3(y+1-z^2)^2 + 4(1-z^2)^2. \qquad (3)$$

Границу области (3) все траектории пересекают изнутри наружу. Действительно, производная функции V

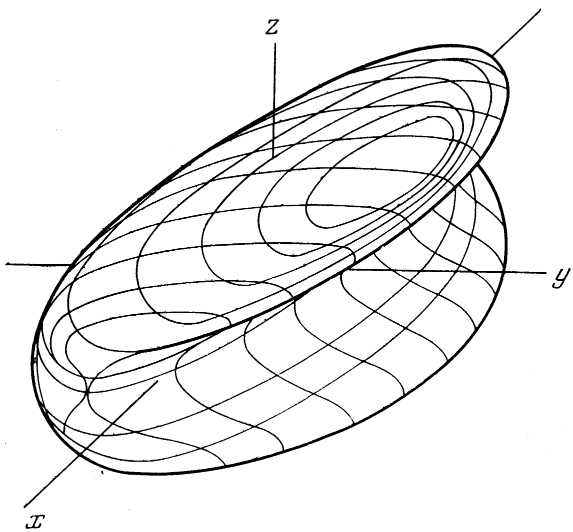

Рис. 1.

в силу системы (2)

$$\dot{V} = 2x^2 - 4x^2\,(y+1-z^2) + 6\,(x^2+y^2+z^2-y)\,\times$$
$$\times(1+y-z^2)^2 + 12z^2\,(1-z^2)\,(y+1-z^2) + 16z^2\,(1-z^2)^2 \qquad (4)$$

положительна в точках поверхности

$$V = 17. \qquad (5)$$

Это можно получить, преобразовав правую часть (4) тождественно в выражение

$$2x^2(y-z^2)^2+\frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{3/8}+\frac{(y-1/2)^2}{1/4}+\frac{z^2}{2/5}-1\right](1+y-z^2)^2+$$
$$+\frac{1}{4}z^2(11+3y-11z^2)^2.$$

Значит, при $\dot{V}\leqslant 0$ мы получаем, что либо выписанная квадратная скобка неположительна, либо же $x(y-z^2)=$ $=1+y-z^2=z\ (11+3y-11z^2)=0$; в обоих случаях легко проверить, что $V<17$, что и требовалось доказать.

Точками покоя являются $O_1\ (0,\ 0,\ 0)$, $O_2\ (0,\ 0,-1)$, $O_3\ (0,0,1)$, $O_4\ (0,-1,0)$, $O_5\ (0,1,0)$. Вычисляя собственные значения матрицы Якоби в этих точках, находим, что они равны -1, -1, -1 для O_1, 1, 1, 2 для O_2, 1, 1, 2 для O_3, 1, 2, -1 для O_4 и -3, 2, -1 для O_5. Таким образом, O_1 — устойчивый узел, O_2 и O_3 — неустойчивые узлы, а O_4 и O_5 — седла.

Система (2) не имеет замкнутых траекторий. Действительно, в областях $|z|>1$ и $0<|z|<1$, ограниченных инвариантными плоскостями, это вытекает из неравенства $dz/dt\neq 0$. На плоскостях $z=1$ и $z=-1$ траектории не могут быть замкнутыми, так как каждая замкнутая траектория ограничивает область, содержащую точку покоя, а на каждой из этих плоскостей имеется только по одной точке покоя, из которой выходят четыре инвариантных луча. Наконец, на плоскости $z=0$ нет замкнутых траекторий, так как там лежат всего три точки покоя, которые соединены траекториями, лежащими на оси y. Так как из (2) видно, что $z\to 0$, ∞ или ± 1 при $t\to\pm\infty$, то предельными множествами траекторий могут быть только предельные множества на плоскостях $z=0$, $z=1$ и $z=-1$, т. е. только точки покоя.

Неустойчивое многообразие W_4^- седла O_4 совпадает с плоскостью $z=0$ (с исключенной положительной полуосью y). Устойчивое многообразие W_4^+ точки покоя O_4 касается в точке O_4 прямой, параллельной оси z. Устойчивое многообразие W_5^+ точки покоя O_5 касается в точке O_5 плоскости $y=1$, а неустойчивое W_5^- совпадает с положительной полуосью y. Таким образом, W_4^- и W_5^+ в окрестности точки O_5 имеют нормальное пересеение. Из симметрии системы (2) относительно плоскости $z = 0$ многообразия W_4^- и W_5^+ в любой точке $W_4^- \cap W_5^+$ имеют перпендикулярные касательные плоскости. Линией пересечения $W_4^- \cap W_5^+$ являются две траектории системы (2), выходящие из точки покоя O_4 и входящие в точку покоя O_5. Эти траектории и точки O_4 и O_5

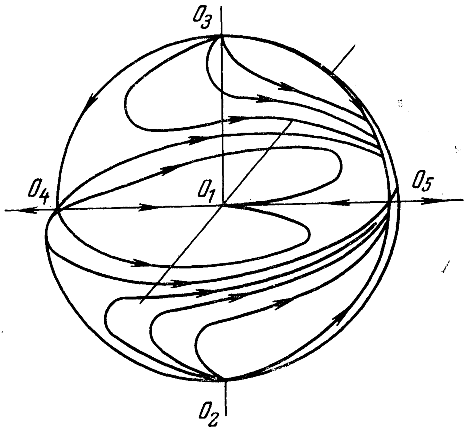

Рис. 2.

на плоскости $z = 0$ ограничивают область, из которой все траектории входят в точку O_1. Вне замыкания этой области расположены траектории, выходящие через поверхность (5). Траектории многообразия W_5^+ с $z > 0$ выходят из точки покоя O_3, так же как и одна траектория, образующая устойчивое многообразие W_4^+ точки O_4. Траектории же многообразия W_5^+ с $z < 0$, как и вторая траектория из W_4^+, выходят из точки O_2.

Эти траектории разбивают область (3) на четыре ячейки: 1) с источником O_3 и стоком O_1; 2) с источником O_2 и стоком O_1 (рис. 2); 3) с источником O_3 и стоком — границей области (3) и 4) с источником O_2 и стоком — границей области (3).

3. Построим теперь новую систему следующим образом. В некоторой точке траектории $W_4^- \cap W_5^+$ возьмем трансверсальную плоскость π_1 к этой траектории, на ней — окружность S с достаточно малым радиусом, так

чтобы внутри круга K, ограниченного S, все траектории пересекали эту плоскость в том же направлении что и траектория $W_4^- \cap W_5^+$. Проведем через каждую точку S траекторию системы до некоторой другой трансверсальной плоскости π_2 и получим поверхность Π. Отобразим замкнутую область, ограниченную π_1, π_2 и Π, на прямой круговой цилиндр

$$u^2 + v^2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant w \leqslant 1 \tag{6}$$

пространства (u, v, w), причем так, чтобы линия пересечения $W_4^- \cap K$ отобразилась на $v = 0$, $w = 0$, $-1 \leqslant \leqslant u \leqslant 1$, линия пересечения $W_5^+ \cap K$ — на $u = w = 0$, $-1 \leqslant v \leqslant 1$, а каждая дуга траектории системы (2) на $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $0 \leqslant w \leqslant 1$. Это отображение Φ может быть сделано гомеоморфизмом ([2], стр. 62—64), но нетрудно показать, что оно может быть сделано и диффеоморфизмом. При этом система (2) переходит в систему

$$du/ds = 0, \quad dv/ds = 0, \quad dw/ds = 1 \tag{7}$$

после соответственного преобразования параметра t в s. Если еще произвести замену координат $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$, то в цилиндрических координатах r, w, φ система (7) имеет вид

$$dr/ds = 0, \quad dw/ds = 1, \quad d\varphi/ds = 0. \tag{8}$$

Заменим поле системы (8) в цилиндре (6) на

$$\begin{gathered} dr/ds = 0, \quad dw/ds = 1, \\ d\varphi/ds = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i-1} g'(w) f(r, 2^{-2i-2}, 2^{-2i})\,\pi, \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$f(x, a, b) = \begin{cases} \exp\left(2^{-2}(b-a)^2 (x-a)^{-1}(x-b)^{-1}+1\right), & \text{если } a < x < b, \\ 0, & \text{если } x \in\!\!\!\!/\, (a, b), \end{cases}$$

$$g(x) = \int_0^x f(\tau, 0, 1)\,d\tau \Big/ \int_0^1 f(\tau, 0, 1)\,d\tau,$$

k — любое натуральное число.

Так как $d\varphi/ds|_{w=0} = d\varphi/ds|_{w=1} = d\varphi/ds|_{r=1} = 0$, то на поверхности цилиндра (6) поле новой системы (9) совпадает с полем первоначальной системы (8).

В соответствующей области пространства (x, y, z) систему (2) заменим системой, получаемой из (9) диффеоморфизмом Φ^{-1}.

4. Проследим, куда попадут на плоскости $w=1$ траектории системы (9), проходящие на плоскости $w=0$

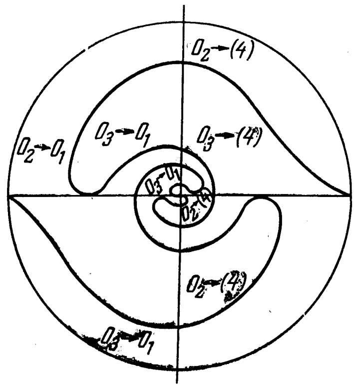

Рис. 3.

через точки $v=0$, т. е. соответствующие траекториям системы (2), содержащимся в W_4^-.

Так как решениями системы (9) служат

$$r=r_0,\ w=s,\ \varphi=\varphi_0+\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i-1}g(s)\,f(r_0,\,2^{-2i-2},\,2^{-2i})\,\pi,$$

то траектории с $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ образуют на $w=1$ линию Γ_1, определенную уравнениями

$$\varphi=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i-1}f(r,\,2^{-2i-2},\,2^{-2i})\,\pi,$$

$$\varphi=\pi+\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i-1}f(r,\,2^{-2i-2},\,2^{-2i})\,\pi.$$

Линия Γ_1 пересекает линию Γ_2 с уравнением $u=0$, соответствующую $W_5^+\cap\pi_2$, в точках $\varphi=\pm\pi/2$, $r=0,\ (5\pm3(\ln 2/(\ln 2+1))^{1/2})\,2^{-2i-3}$, $i=0,1,\ldots,k-1$, т. е. в $4k+1$ точке. В этих точках

$$d\varphi/dr\neq 0. \qquad (10)$$

Обе эти линии Γ_1 и Γ_2 разделяют круг $u^2 + v^2 \leqslant 1$, $w = 1$ на $4(k + 1)$ несвязные части (рис. 3).

Так как линия $W_4^- \cap \pi_2$ отделяет точки траекторий, выходящих из O_2, от точек траекторий, выходящих из O_3, а линия $W_5^+ \cap \pi_2$ — точки траекторий, входящих в O_1, от точек траекторий, входящих в поверхность (5), то получаем, что каждой компоненте связности круга $u^2 + v^2 \leqslant 1$, $w = 1$ соответствует одна ячейка системы, построенной в п. 3. В силу (10) границы ячеек имеют нормальные пересечения. Таким образом, эта система имеет $4(k + 1)$ ячеек. (На рис. 3 указаны источник и сток для каждой из этих ячеек.) Так как k — любое натуральное число, то система, построенная в п. 3 (и, очевидно, не имеющая замкнутых траекторий), обладает свойствами 1) — 4) п. 2, а также свойствами, указанными в конце п. 1.

Физико-технический институт
низких температур
АН Украинской ССР

Институт физики
АН Латвийской ССР

Поступило
23.X.1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S m a l e S., Morse inequalities for a dynamical system, Bull. Amer. Math. Soc., **66** (1960), 43—49.

[2] Л е ф ш е ц С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, М., 1961.