Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков, Об аддитивной проблеме делителей Инга-ма,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2006, номер 5, 32–35

https://www.mathnet.ru/vmumm3825

6. *Knapp A.* Elliptic curves. Princeton: Princeton Univ. Press, 1992.
7. *Schoof R.* Elliptic curves over finite fields and the computation of square roots mod p // Math. Comp. 1985. **44**. 483–494.
8. *Canfield E., Erdös P., Pomerance C.* On a problem of Oppenheim concerning "factorisatio numerorum" // J. Number Theory. 1983. **17**. 1–28.

Поступила в редакцию
16.12.2005

УДК 511

ОБ АДДИТИВНОЙ ПРОБЛЕМЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ ИНГАМА

Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков

В настоящей работе уточняется оценка остаточного члена $R(x)$ в асимптотической формуле аддитивной проблемы делителей Ингама

$$R(x) = R(x;k) = \sum_{n\leqslant x} \tau(n)\tau(n+k) - A_0 x \ln^2 x - A_1 x \ln x - A_2 x,$$

где

$$A_0 = \frac{6}{\pi^2}\sigma_{-1}(k), \quad \sigma_{-1}(k) = \sum_{d|k} d^{-1},$$

$$A_1 = ((4\gamma - 2)\xi_0 + 4\xi_1)\sigma_{-1}(k) + 4\xi_0\sigma_{-1}^{(1)}(k), \quad \xi_0 = \frac{6}{\pi^2},$$

$$\xi_j = (-1)^j \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)\ln^j d}{d^2}, \qquad \sigma_{-1}^{(0)}(k) = \sigma_{-1}(k), \qquad \sigma_{-1}^{(j)}(k) = (-1)^j \sum_{d|k} d^{-1}\log^j d, j \geqslant 1,$$

$$A_2 = (((2\gamma-1)^2 + 1)\xi_0 + 4(2\gamma-1)\xi_1 + 4\xi_2)\sigma_{-1}(k) + (4(2\gamma-1)\xi_0 + 8\xi_1)\sigma_{-1}^{(1)}(k) + 4\xi_0\sigma_{-1}^{(2)}(k),$$

причем $\gamma = 0,577\ldots$ — постоянная Эйлера, $\tau(n)$ — функция делителей и $\mu(n)$ — функция Мебиуса.

В 1927 г. А. Е. Ингам [1] установил, что

$$\sum_{m\leqslant x} \tau(m)\tau(m+k) \sim \frac{6}{\pi^2}\sigma_{-1}(k) x \ln^2 x.$$

В 1931 г. Т. Эстерман [2] уточнил результат А. Е. Ингама, доказав оценку

$$R(x) \ll x^{11/12}\ln^{17/3} x.$$

В 1979 г. Д. И. Исмоилов [3], развивая элементарный метод Т. Эстермана, получил новую оценку $R(x) \ll x^{5/6+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная. В 1979 г. независимо другим методом ту же оценку, но равномерную по параметру $k \leqslant x^{2/3}$, получил Хиз-Браун [4].

Исследованию аддитивной проблемы Ингама и ее обобщений посвящены работы многих авторов (см., например, [1–11]).

Здесь мы уточняем оценку остаточного члена в аддитивной проблеме Ингама.

Теорема. *Пусть $x \to \infty$. Тогда справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$I(x) = \sum_{n\leqslant x} \tau(n)\tau(n+1) = \sum_{n\leqslant x} \tau(n^2+n) = M(x) + R(x;1),$$

где главный член $M(x)$ асимптотической формулы имеет вид

$$M(x) = x(A_0\ln^2 x + A_1\ln x + A_2),$$

$$A_0 = 6/\pi^2, \quad A_1 = (4\gamma - 2)\xi_0 + 4\xi_1, \quad A_2 = ((2\gamma - 1)^2 + 1)\xi_0 + 4(2\gamma - 1)\xi_1 + 4\xi_2,$$

а остаточный член оценивается следующим образом:

$$R(x;1) \ll x^{3/4} \ln^4 x.$$

Заметим, что случай произвольного значения параметра k отличается от случая $k = 1$ только некоторыми техническими деталями. Кроме того, для суммы $\sum\limits_{n \leqslant x} \tau(n^2+1)$ К. Хооли [7] своим методом доказал следующую оценку сверху остатка: $x^{8/9} \ln^3 x$.

Доказательство теоремы. Число наборов (a, b, c, d) натуральных чисел a, b, c и d, удовлетворяющих условиям $ab - cd = 1$ и $ab \leqslant x$, равно величине $N(x)$ суммы

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n)\tau(n+1).$$

Отсюда имеем $(ab, cd) = 1$. Рассмотрим те наборы, для которых

$$a < d < c, \quad ab - cd = 1, \quad ab \leqslant x, \quad cd \leqslant x - 1.$$

Количество таких наборов равно $N(x)/8 + O(\sqrt{x} \ln x)$.

С другой стороны, поскольку $(a, d) = 1$, существует единственный вычет $\bar{a}, 1 \leqslant \bar{a} \leqslant d$, по модулю d, такой, что $a\bar{a} \equiv 1 \pmod{d}$. Положим $\bar{c} = \frac{a\bar{a}-1}{d}$. Число $\bar{c}$ будет целым неотрицательным.

Пусть t — целозначный параметр. Положим $b = \bar{a} + dt, c = \bar{c} + at$.

Тогда суммирование по наборам (a, b, c, d) для нахождения величины $N(x)$ можно заменить на суммирование по наборам (a, d, t) с условиями

$$1 < d \leqslant \sqrt{x-1}, 1 \leqslant a < d, (a, d) = 1,$$

причем переменная t удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} 0 < a(\bar{a} + dt) \leqslant x, \\ d < c = \bar{c} + at \leqslant \frac{x-1}{d}, \end{cases}$$

т.е.

$$\frac{d}{a} - \frac{\bar{a}}{d} + \frac{1}{ad} < t \leqslant \frac{x}{ad} - \frac{\bar{a}}{d}.$$

Следовательно,

$$\frac{N(x)}{8} + O(\sqrt{x} \ln x) = \sum_{1<d\leqslant\sqrt{x-1}} \sum_{\substack{1\leqslant a<d \\ (a,d)=1}} \left(\left[\frac{x}{ad} - \frac{\bar{a}}{d} \right] - \left[\frac{d}{a} - \frac{\bar{a}}{d} + \frac{1}{ad} \right] \right) = \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{1<d\leqslant\sqrt{x-1}} \sum_{\substack{1\leqslant a<d \\ (a,d)=1}} \left(\frac{x-1}{ad} - \frac{d}{a} \right), \qquad \Sigma_2 = \sum_{1<d\leqslant\sqrt{x-1}} \sum_{\substack{1\leqslant a<d \\ (a,d)=1}} \rho\left(\frac{x}{ad} - \frac{\bar{a}}{d} \right),$$

$$\Sigma_3 = \sum_{1<d\leqslant\sqrt{x-1}} \sum_{\substack{1\leqslant a<d \\ (a,d)=1}} \rho\left(\frac{d}{a} - \frac{\bar{a}}{d} + \frac{1}{ad} \right), \quad \rho(x) = 1/2 - \{x\}.$$

Заметим, что

$$\sum_{\substack{1\leqslant a<d \\ (a,d)=1}} \rho\left(\frac{d}{a} - \frac{\bar{a}}{d} + \frac{1}{ad} \right) = 0.$$

Отсюда получим $\Sigma_3 = 0$.

Сумма Σ_1 дает главный член асимптотической формулы. Имеем

$$\Sigma_1 = x \sum_{1<d\leqslant\sqrt{x-1}} \frac{1}{d} \sum_{\substack{1\leqslant a<d\\(a,d)=1}} \frac{1}{a} = x \sum_{1<d\leqslant\sqrt{x-1}} \frac{\omega(d)}{d}, \qquad \omega(d) = \sum_{\substack{1\leqslant a<d\\(a,d)=1}} \frac{1}{a}.$$

Отсюда стандартным образом получаем $\Sigma_1 = M(x) + O(\sqrt{x}\ln x)$.

Перейдем теперь к оценке суммы Σ_2. Сначала разобьем промежуток $1 < d \leqslant \sqrt{x-1}$ суммирования по d на промежутки вида $D < d \leqslant D', D' \leqslant 2D$. Получим не более $\ll \ln x$ сумм

$$\Sigma_2(D) = \sum_{D<d\leqslant D'} \sum_{\substack{1\leqslant a<d\\(a,d)=1}} \rho\Big(\frac{x}{ad} - \frac{\bar{a}}{d}\Big).$$

Воспользуемся разложением в ряд Фурье функции $\rho(x)$ (см., например, [12]). Положим $N = x^{1/4}$. Имеем

$$\rho(x) = \sum_{0<|m|\leqslant N} \frac{e^{2\pi imx}}{2\pi im} + O(r(x)),$$

где

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{1+N^2\sin^2\pi x}} = \sum_{0<|m|\leqslant N\ln N} c_m e^{2\pi imx} + O\left(\frac{\ln N}{N}\right),$$

$$c_m \ll \frac{\ln N}{N} e^{-|m|/N}.$$

Следовательно,

$$\Sigma_2(D) = \sum_{0<|m|\leqslant N} \frac{T_m}{2\pi im} + O\left(\frac{\ln N}{N} \sum_{1\leqslant m\leqslant N\ln N} |T_m|\right) + O\left(\frac{x\ln N}{N}\right),$$

где

$$T_m = \sum_{D<d\leqslant D'} \sum_{\substack{1\leqslant a<d\\(a,d)=1}} e^{2\pi im\left(\frac{x}{ad} - \frac{\bar{a}}{d}\right)}.$$

Вычет $\bar{a}$ по модулю d определяется из сравнения $a\bar{a} \equiv 1 \pmod d$ при условии, что $(a,d) = 1$.

Далее, разложим в ряд Фурье функцию

$$F(a) = F_m(a,d) = \begin{cases} e^{-2\pi i\frac{m\bar{a}}{d}}, & \text{если} \quad (a,d) = 1,\\ 0, & \text{если} \quad (a,d) > 1. \end{cases}$$

Имеем

$$F(a) = \sum_{k=1}^{d} f_k e^{2\pi i\frac{ak}{d}},$$

где

$$f_k = \frac{1}{d}\sum_{n=1}^{d} F(n) e^{-2\pi i\frac{nk}{d}} = \frac{1}{d} \sum_{\substack{n=1\\(n,d)=1}}^{d} e^{-2\pi i\frac{m\bar{n}+nk}{d}}.$$

Таким образом,

$$T_m = \sum_{D<d\leqslant D'} \sum_{k=1}^{d} f_k \sum_{1\leqslant a\leqslant d} e^{2\pi i\left(\frac{mx}{ad} + \frac{ak}{d}\right)}.$$

Коэффициенты Фурье f_k являются суммами Клостермана по модулю d. Для них справедлива оценка

$$|f_k| \leqslant \tau(d)d^{-1/2}(m,d)^{1/2},$$

где $\tau(d)$ — количество делителей числа d.

Подставляя эту оценку в сумму T_m, получим

$$T_m \ll \sum_{D<d\leqslant D'} \sum_{k=1}^{d} \tau(d)d^{-1/2}(m,d)^{1/2}|U_m|,$$

$$U_m = U_m(d,k) = \sum_{1\leqslant a\leqslant d} e^{2\pi i\left(\frac{mx}{ad}+\frac{ak}{d}\right)}.$$

При $D \leqslant x^{3/10}$ тривиальная оценка суммы U_m дает $\Sigma_2(D) \ll D^{5/2}\ln^2 x$, что обеспечивает оценку $\Sigma_2(D) \ll x^{3/4}\ln^x$. Поэтому достаточно оценить $\Sigma_2(D)$ при $x^{3/10} < D \leqslant x^{1/2}$.

При выполнении неравенства $|k - \frac{mx}{a^2}| \geqslant 1$ тригонометрическую сумму U_m оцениваем по первой производной функции, стоящей в ее экспоненте. В этом случае получим

$$\Sigma_2(D) \ll D^{3/2}\ln^4 x \ll x^{3/4}\ln^4 x.$$

Если $|k - \frac{mx}{a^2}| < 1$, то часть суммы U_m оцениваем по второй производной функции в экспоненте тригонометрической суммы. Это дает нам необходимую оценку $\Sigma_2(D)$ во всех рассматриваемых случаях. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ingham A.E.* Some asymptotic formulae in the theory of numbers // J. London Math. Soc. 1927. **2**. 202–208.
2. *Esterman T.* Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten // J. reine und ang. Math. 1931. **164**. 173–182.
3. *Исмоилов Д.И.* Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений // Докл. АН ТаджССР. 1979. **22**, № 2. 75–79.
4. *Heath-Brown D.R.* The fourths power moment of the Riemann zeta-function // Proc. London Math. Soc. 1979. **38**, N 3. 385–422.
5. *Линник Ю.В.* Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961.
6. *Малышев А.В.* О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1962. **65**.
7. *Хооли К.* Применение методов решета в теории чисел. М.: Наука, 1987.
8. *Deshouillers J.M., Iwaniec H.* An additive divisor problem // J. London Math. Soc. 1982. **26**, N 2. 1–14.
9. *Виноградов А.И., Тахтаджян Л.А.* Дзета-функция аддитивной проблемы делителей и спектральное разложение автоморфного лапласиана // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1984. **134**. 84–116.
10. *Суги М.* Целые точки в областях на плоскости Н.И. Лобачевского // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1994. **207**. 299–325.
11. *Архипов Г.И., Чубариков В.Н.* Асимптотическая формула для числа точек решетки в круге на плоскости Лобачевского // Дискретная математика (в печати).
12. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. 5-е изд. М.: Дрофа, 2004.

Поступила в редакцию
16.02.2006