E. A. Zlobina, A. P. Kiselev, Two-dimensional singular splash modes, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2019, Volume 483, 79–84

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 483, 2019 г.

Е. А. Злобина, А. П. Киселев

ДВУМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ СПЛЭШ МОДЫ

§1. Введение

Как показал Хёрмандер [1], у волнового уравнения с двумя пространственными переменными и постоянной скоростью $c > 0$,

$$\Box U := U_{xx} + U_{zz} - c^{-2} U_{tt} = 0, \tag{1}$$

есть решения во всем пространстве-времени $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, которые имеют сингулярность в одной пространственной точке (x, z), бегущей вдоль пространственной прямой со скоростью c. Хёрмандер построил пример такого решения (тесно связанный, как выяснилось в [2], с классическим некомплексифицированным решением Бейтмена [3]). Мы приводим простой пример решения с сингулярностью в бегущей точке, основанный на обобщении комплексифицированного решения Бейтмена на двумерный случай, см. [4, 5]:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\beta - ia}} f(\theta), \tag{2}$$

где f – произвольная функция одной комплексной переменной, а

$$\theta = \alpha + \frac{x^2}{\beta - ia}, \quad \alpha = z - ct, \quad \beta = z + ct, \tag{3}$$

и $a > 0$ – произвольная фиксированная постоянная. Ветвь квадратного корня в (2) можно выбрать любым образом. При аналитических в верхней полуплоскости f, гладких на вещественной оси, (2) удовлетворяет уравнению (1) при всех x, z и t.

Мы выбираем

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{-\theta}}, \tag{4}$$

тогда (2) превращается в

$$V = \frac{1}{\sqrt{-\alpha(\beta - ia) - x^2}}. \tag{5}$$

Ключевые слова: волновое уравнение, точные решения.
Работа частично поддержана грантом РНФ 17-11-01126.

Мы называем функцию (5) двумерной сплэш модой (splash mode) по аналогии с являющейся спецификацией комплексифицированного трехмерного решения Бейтмена функцией $v = f(\Theta)/(\beta - ia)$, $\Theta = \alpha + (x^2+y^2)/(\beta - ia) + \mathrm{Const}$ с $f(\Theta) = 1/\Theta$, рассматривавшейся под этим именем в [6, 7] и др. Эта функция сингулярна при $\operatorname{Im}\mathrm{Const} = 0$. В [8] доказано, что она удовлетворяет трехмерному однородному волновому уравнению $c^{-2}v_{tt} - v_{xx} - v_{yy} - v_{zz} = 0$ во всем пространстве-времени $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Функция (5) обращается в бесконечность в бегущей пространственной точке $\{z = ct,\ x = 0\}$. Тем не менее, в разделе 2 доказано, что (5) удовлетворяет однородному уравнению (1) в смысле обобщенных функций. Однако некомплексифицированная функция (5)

$$V_0 = V|_{a=0} = \frac{1}{\sqrt{-\alpha\beta - x^2}} \tag{6}$$

однородному уравнению (1) в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ не удовлетворяет. Это установлено в разделе 3.

§2. Комплексифицированная сплэш мода

Теорема 1. *Функция* (5) *удовлетворяет однородному волновому уравнению* (1) *во всем пространстве-времени* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ *в смысле обобщенных функций.*

Доказательство следует тому же плану, что и проведенное для трехмерного случая в [8], но несколько сложнее.

Доказательство. Для определенности фиксируем ветвь квадратного корня так, что $\arg\sqrt{\beta - ia} > 0$.

Действуя как в [8] нетрудно доказать, что V локально абсолютно интегрируема в $\mathbb{R}^3$. Поэтому наше утверждение равносильно равенству

$$(\Box V, \phi) = (V, \Box\phi) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx dz dt\, V \Box\phi = 0 \tag{7}$$

для произвольной основной функции $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Перейдем от переменных z, t к переменным α, β, см. (3). Рассмотрим область $\Omega_\varepsilon = \{(x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 : |\alpha| \geqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, в которой V, очевидно, удовлетворяет уравнению (1). Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dxdzdt\, V\Box\phi = \frac{1}{2c}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} dxd\alpha d\beta\, V\Box\phi. \tag{8}$$

Интегрируя по частям, с учетом финитности ϕ получим

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} dxd\alpha d\beta\, V\Box\phi = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} dxd\alpha d\beta\, \phi\Box V \\ + 4\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\beta dx\left((V_\beta\phi)(x,\varepsilon,\beta) - (V_\beta\phi)(x,-\varepsilon,\beta)\right). \tag{9}$$

Поскольку V удовлетворяет уравнению (1) в области Ω_ε, то первый интеграл в правой части равен нулю. Покажем, что второй интеграл стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Рассмотрим интеграл по x и сделаем в нём замену переменных $x = \sqrt{\varepsilon}\,\xi$.

$$2\int\limits_{\mathbb{R}} dx\left((V_\beta\phi)(x,\varepsilon,\beta) - (V_\beta\phi)(x,-\varepsilon,\beta)\right) \\ = \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\left(\frac{\phi(\sqrt{\varepsilon}\,\xi,\varepsilon,\beta)}{(-\xi^2-\beta+ia)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\phi(\sqrt{\varepsilon}\,\xi,-\varepsilon,\beta)}{(-\xi^2+\beta-ia)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ = \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\left(\frac{\phi(\sqrt{\varepsilon}\,\xi,0,\beta)}{(-\xi^2-\beta+ia)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\phi(\sqrt{\varepsilon}\,\xi,0,\beta)}{(-\xi^2+\beta-ia)^{\frac{3}{2}}}\right) + O(\varepsilon), \tag{10}$$

поскольку $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Последний интеграл в (10) можно записать как

$$\int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\left(\frac{\phi(\sqrt{\varepsilon}\,\xi,0,\beta)}{(-\xi^2-\beta+ia)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\phi(\sqrt{\varepsilon}\,\xi,0,\beta)}{(-\xi^2+\beta-ia)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ = \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\left(\frac{1}{(-\xi^2-\beta+ia)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(-\xi^2+\beta-ia)^{\frac{3}{2}}}\right)\left(\phi(\sqrt{\varepsilon}\,\xi,0,\beta) - \phi(0,0,\beta)\right) \\ + \int\limits_{\mathbb{R}} d\xi\left(\frac{1}{(-\xi^2-\beta+ia)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(-\xi^2+\beta-ia)^{\frac{3}{2}}}\right)\phi(0,0,\beta). \tag{11}$$

Ввиду компактности носителя ϕ, первый интеграл стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Покажем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} d\xi \left(\frac{1}{(-\xi^2-\beta+ia)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(-\xi^2+\beta-ia)^{\frac{3}{2}}} \right)$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(-\xi^2-\beta+ia)^{\frac{3}{2}}} + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(-\xi^2+\beta-ia)^{\frac{3}{2}}} = 0. \quad (12)$$

В первом интеграле сделаем замену переменных

$$\xi = p\sqrt[4]{\beta^2+a^2}\exp(i\varphi + i\frac{\pi}{2}),$$

а во втором

$$\xi = p\sqrt[4]{\beta^2+a^2}\exp(i\varphi),$$

где $2\varphi = \arg(\beta - ia)$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} d\xi \left(\frac{1}{(-\xi^2-\beta+ia)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(-\xi^2+\beta-ia)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{1}{\beta-ia} \int\limits_{C} \frac{dp}{(1-p^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (13)$$

где контур интегрирования C состоит из двух перпендикулярных прямых, см. Рис. 1; разрезы корня изображены волнистыми линиями.

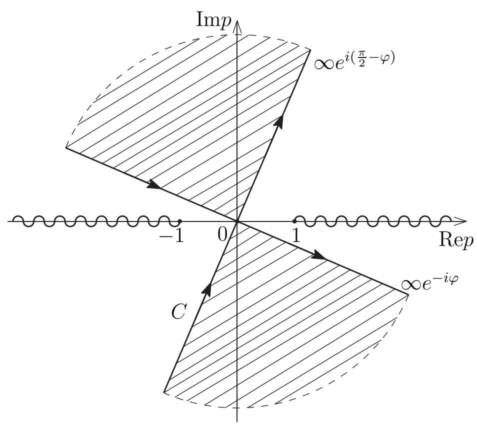

Рис. 1. Контур интегрирования C в (13) и разрезы корня $\sqrt{1-p^2}$.

Поскольку подынтегральная функция достаточно быстро убывает при $|p| \to \infty$ и аналитична в заштрихованных секторах, интеграл в левой части (12) равен нулю. Следовательно, второе слагаемое в правой части (11) равно нулю.

Теорема доказана. $\square$

§3. Некомплексифицированная сплэш мода

Рассмотрим функции

$$E_+ = \frac{1}{2\pi c}\frac{H(-\alpha\beta - x^2)}{\sqrt{-\alpha\beta - x^2}}, \quad E_- = \frac{1}{2\pi c}\frac{H(\alpha\beta + x^2)}{\sqrt{\alpha\beta + x^2}}, \tag{14}$$

где H – функция Хевисайда, $H(s) = 1$ при $s \geqslant 0$ и $H(s) = 0$ при $s < 0$, а ветвь корня выбрана так, что $\sqrt{1} = 1$. Несмотря на внешнее сходство функций $E_\pm$, они удовлетворяют разным уравнениям: функция E_+ является фундаментальным решением волнового уравнения, а E_- удовлетворяет однородному волновому уравнения :

$$\square E_+ = \delta(x)\delta(z)\delta(t), \quad \square E_- = 0. \tag{15}$$

Это следует из результата Хёрмандера, см. [1], стр. 169, теорема 6.2.1.

Теперь заметим, что некомплексифицированная функция (6) представима в виде линейной комбинации E_+ и E_-:

$$\begin{aligned} 2\pi c(E_+ - iE_-) &= \frac{H(-\alpha\beta - x^2)}{\sqrt{-\alpha\beta - x^2}} + \frac{H(\alpha\beta + x^2)}{i\sqrt{\alpha\beta + x^2}} \\ &= \frac{H(-\alpha\beta - x^2) + H(\alpha\beta + x^2)}{\sqrt{-\alpha\beta - x^2}} = V_0. \end{aligned} \tag{16}$$

Следовательно,

$$\square V_0 = 2\pi c\delta(x)\delta(z)\delta(t). \tag{17}$$

§4. Заключение

Как и в трехмерном случае, см. [8], Теорема 1 легко обобщается на комплексифицированные решения Бейтмена, имеющие такую же сингулярность, что и (5). Например, выбрав в (2) в соответствии с [9]

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{-\theta}}\exp\left(2ka\left(1 - \sqrt{1 - \frac{i\theta}{a}}\right)\right), \tag{18}$$

где $k > 0$ фиксировано, а ветвь корня выбрана так, чтобы $\mathrm{Re}\sqrt{1 - i\theta/a} \geqslant 0$, приходим к решению, экспоненциально убывающему по всем переменным с удалением от сингулярной точки.

Авторы благодарят А. С. Благовещенского и А. Б. Плаченова за критику и полезные обсуждения.

Список литературы

1. Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, Т. I, Мир, М., 1986
2. А. С. Благовещенский, А. П. Киселев, *Двумерные волны Бейтмена–Хёрмандера с сингулярностью в бегущей точке.* — Матем. заметки. **106**, (2019) 793–796.
3. H. Bateman, *The conformal transformations of space of four dimensions and their applications to geometrical optics.* — Proc. London Math. Soc. **7**, (1909) 70–89.
4. А. П. Киселев, М. В. Перель, *Относительно неискажающиеся решения m-мерного волнового уравнения.* — Дифференциальные уравнения **38** (2002), 1128–1129.
5. А. П. Киселев, М. В. Плаченов, *Точные решения m-мерного волнового уравнения из параксиальных. Дальнейшее обобщение решения Бейтмена.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **393**, (2011) 167–177.
6. R. W. Ziolkowski, *Localized transmission of electromagnetic energy.* — Phys. Rev. A. **39**, (1989) 2005–2011.
7. S. Feng, H. G. Winful, R. W. Hellwarth, *Spatiotemporal evolution of focused single-cycle electromagnetic pulses.* — Phys. Rev. E. **59**, (1999) 4630–4649.
8. А. С. Благовещенский, А. П. Киселев, А. М. Тагирджанов, *Простые решения волнового уравнения с сингулярностью в бегущей точке, основанные на комплексифицированном решении Бейтмена.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **438**, (2015) 73–82.
9. A. P. Kiselev, M. P. Perel, *Highly localized solutions of the wave equation.* — J. Math. Phys. **41**, (2000) 1934–1955.

Zlobina E. A., Kiselev A. P. Two-dimensional singular splash modes.

It is proved that a certain simple specification of the 2D Bateman-type complexified solution with a singularity at a running point satisfies the homogeneous wave equation, while the respective non-complexified function does not.

С.-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург 199034, Россия
E-mail: ezlobina2@yandex.ru
E-mail: aleksei.kiselev@gmail.com

Поступило 7 ноября 2019 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН;
Институт проблем
машиноведения РАН,
С.-Петербург 199178, Россия
E-mail: kiselev@pdmi.ras.ru