© 1990 г.

А. И. Скопин

НИЖНИЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ РЯД МАКСИМАЛЬНОЙ 2-ПОРОЖДЕННОЙ ТРАНСМЕТАБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ 1 ТИПА ЭКСПОНЕНТЫ 8

Приводится полученное при помощи ЭВМ описание группы с двумя образующими, имеющей экспоненту 8 и с условием абелевости третьего члена центрального ряда (называемым условием трансметабелевости I типа). Для этой группы находятся соотношения в факторах нижнего центрального ряда, класс нильпотентности и верхняя граница для порядка.

§ 1. Введение

Наряду с развитием общих методов исследования конечнопорожденных периодических групп, что привело к таким замечательным результатам, как положительное решение в 1958 г. А. И. Кострикиным ограниченной проблемы Бернсайда для простой экспоненты p [1], а сейчас Е. И. Зельмановым для экспоненты вида p^e при натуральном e [2], определенный интерес могут представлять также нахождение и совершенствование новых приемов детального изучения сравнительно небольших конкретных групп (некоторые из которых тем не менее достаточно сложны и их тоже принято называть Бернсайдовскими). Об одном из таких приемов (при использовании которого трудно обойтись без ЭВМ) здесь и пойдет речь.

В конце 60-х годов появился ряд статей по метабелевым группам экспоненты p^e (p - простое, e - натуральное число), в которых, в частности, был установлен класс нильпотентности [3] такой группы; для числа образующих $<p$ он оказался равным $e(p^e-p^{e-1})$. Совершенно иными средствами автором для частных значений экспонент 8, 9, 27 при двух образующих решалась более общая задача - нахождение определяющих соотношений в факторах нижнего центрального ряда соответствующей метабелевой группы (см. [4, 5]). Такой поиск, мы его называем аддитивной техникой, применяется и в данной статье к группе, в определяемом далее смысле следующей по сложности за метабелевой. Сразу заметим, что ввиду отсутствия уверенности в полноте нашего поиска результат, как и раньше, дает лишь верхние границы для порядков факторов, а значит, и для порядка всей группы и для ее класса нильпотентности.

Вследствие применения аддитивной записи изучаемой группы G мы степенью G^n обозначаем n-й член ее нижнего центрального ряда $G\supset G^2\supset\ldots\supset G^n\supset\ldots$ В частности, G^2 -

Ключевые слова: Бернсайдовы группы, аддитивная техника, нижний центральный ряд, собирательная формула, метабелевость, трансметабелевость, символьная запись, компьютерные вычисления.

коммутант. Условие метабелевости группы G записывалось бы равенством $(G^2)^2=0$ (абелевость коммутанта). Здесь мы рассматриваем *трансметабелеву группу* I *типа*, а именно группу, определяемую следующим равенством: $(G^3)^2=0$. (Это - одно из условий полинильпотентности, см. [6]. В данной работе оно будет коротко называться *трансметабелевостью.* Соответствующее название II типа отвечало бы условию $(G^2)^3=0$, см. [7]). Зафиксируем пару образующих рассматриваемой группы и будем всегда обозначать ее, пока нет оговорок, через x, y. Таким образом, в соответствии с заглавием пусть

$$G = \langle x, y \mid (G^3)^2 = 0, \quad 8G = 0 \rangle.$$

Нашей целью является установление следующих фактов.

Т е о р е м а A. $4G^2 \subset 2G^4+G^8$.

Т е о р е м а B. $2G^5 \subset G^9$.

Т е о р е м а C. $G^{13}= 0$.

Ясно, что из теоремы A умножением на x или y на основании теоремы B мы получим включение $4G^3 \subset G^9$, затем четырехкратные умножения на образующие последнего включения и включения в теореме B на основании теоремы C приведут нас к формулировкам:

Т е о р е м а A′. $4G^7= 0$.

Т е о р е м а B′. $2G^9= 0$.

Поскольку класс нильпотентности $c\ell(G)$ по сравнению с метабелевым случаем, в котором он равен 12 [3], снизиться не может, то по теореме C мы получаем, что и здесь $c\ell(G)=12$. Кроме того, будут приведены все найденные в факторах соотношения, что даст нам оценки порядков $|G^n/G^{n+1}|$ этих факторов и самой группы G. Именно, мы увидим, что $|G| \le 2^{111}$. (Для метабелевой группы такой порядок есть 2^{63}).

Доказательства основных теорем A-C получаются после вычислений, которые описываются далее в работе. Нужно заметить, что изложение материала в данной статье несколько нетрадиционно по сравнению с другими алгебраическими публикациями. Конечно, имеется в виду не замена обычно принятой для неабелевых групп мультипликативной записи на аддитивную, что мотивируется попросту отнюдь не обязательной линейно алгебраической комфортностью. Существенное отличие в том, что только (даже очень внимательного) прочтения работы должно быть недостаточно для подтверждения (или опровержения) справедливости полученных в ней результатов. (Не считая, разумеется, вопросов правильности используемых формул и логики рассуждений, доступных обычной проверке). Для полной оценки результатов, по-видимому, нужны (и это было бы очень полезно) независимые подсчеты, использующие современную вычислительную технику.

Вычисления проведены в Ленинградском отделении Математического института АН СССР (ЛОМИ) на персональном компьютере типа IBM. Программирование велось на паскале. В дальнейшем планируется опубликовать препринт ЛОМИ с более подробным изложением использованных рабочих программ.

§ 2. Некоторые особенности аддитивной техники

1°. Простейшие формулы. Как уже сказано, все время будет использоваться *аддитивная запись* группы G; *произведением* будет обозначаться коммутатор элементов: $ab=-a-b+a+b$. Это обозначение служит «правилом перестановки слагаемых" $b+a=a+b+ba$, нужным в получении собирательных формул. Для кратных коммутаторов при отсутствии скобок условимся считать запись «левоассоциированной": $(a_1\dots a_n)a_{n+1}= = a_1\dots a_n a_{n+1}$, или $(ab^n)b=ab^{n+1}$ (n - натуральное число). Обычным образом записывается трансформация: $a^x=-x+a+x$ $(a,x\in G)$. Очевидно, $a^x=a+ax$. Непосредственно проверяются левая и правая «квазидистрибутивность":

$$a(b+c) = ac + ab + abc;$$
$$(a+b)c = ac + acb + bc, \tag{1}$$

для любых $a,b,c\in G$. Аналогично имеют место формулы

$$(-a)b = -ab + ba(-a);$$
$$a(-b) = -ab(-b) - ab; \tag{2}$$
$$(-a)(-b) = ab + ab(-b) + (-b)a(-a),$$

для любых $a,b\in G$. Приведем еще полученные в [8] для данного типа трансметабелевой группы *тождество Якоби* для $a,b\in G$, $C\in G^2$,

$$Cba = Cab + C(ba) + Ca(ba) + Cb(ba) + Cab(ba) \tag{3}$$

и *собирательную формулу* для натурального n и $a\in G$, $B\in G^2$,

$$n(a+B) = na + nB + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} c^n_{ij}Ba^iB^j, \text{ где } c^n_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{k}{i}\binom{k}{j}. \tag{4}$$

(Произведение натурального числа n на элемент из группы понимается, естественно, как сумма n слагаемых, равных этому элементу. Порядок слагаемых под знаком суммирования в правой части приводимой формулы, как и в дальнейшем, безразличен благодаря трансметабелевости группы).

2°. Базис. Напомним, что при проведении собирательного процесса (см. [9]) образуются так называемые «базисные коммутаторы". В данной работе базисные коммутаторы веса n будут именоваться *базисными одночленами степени* n. Приведем начало последовательности базисных одночленов от оброазующих x,y степеней ≤ 5:

$$x,y;\ yx;\ yx^2,\ yxy;\ yx^3,\ yx^2y,\ yxy^2;\ yx^4,\ yx^3y,\ yx^2y^2,\ yxy^3,\ yx^2(yx),\ yxy(yx).$$

Базисные одночлены от x,y произвольной степени n (т.е. лежащие в разности $G^n\setminus G^{n+1}$) для трансметабелевой группы I типа имеют следующий вид:

$$v^1_1=x,\ v^1_2=y;\ v^n_{m,k}=yx^{n-2m-k}y^{k-1}(yx)^m, \qquad n>1, \tag{5}$$

где $k=1,\dots,n-2m-1$ и при $n>4$ $m=0,1,\dots,[\frac{n-3}{2}]$. Если бы в определении нашей группы G отсутствовало условие $8G=0$ (при соблюдении всех остальных условий), то мы имели бы дело со *свободной* трансметабелевой группой I типа ранга 2. В ней последователь-

ность одночленов (5) являлась бы *базисом* в том смысле, что любой элемент такой свободной группы *однозначно* раскладывался бы в линейную комбинацию этих одночленов с неотрицательными целыми коэффициентами, каждый из которых естественно назвать *координатой* (соответствующей *n-й степени*). В рассматриваемой же здесь группе G базисные одночлены составляют лишь *систему образующих*, и поэтому координаты (сохраним и далее в работе это название) элемента в этой системе определяются *неоднозначно*, что соответствует имеющимся между базисными одночленами (5) зависимостям. Эти зависимости или *соотношения* нам и нужно будет находить.

3°. Точность вычислений и редукции координат. Бесконечную последовательность базисных одночленов (5) для проведения конкретного изучения группы G нужно чем-то ограничить. Мы назовем *точностью* вычислений наибольшую степень e учитываемых в работе базисных одночленов. (Это фактически означает переход к исследованию фактор-группы G/G^{e+1}. Умышленно не будем при этом усложнять изложение новыми обозначениями). Если точность зафиксирована, то элементы из G однозначно (но не взаимно однозначно) определяются конечными *последовательностями координат*. С такими последовательностями нам и предстоит иметь дело. Самая грубая неоднозначность для координат вытекает из наличия экспоненты, т.е. из условия $8G=0$, - очевидно, все координаты можно редуцировать по модулю 8.

Покажем, что для координат возможны *дополнительные* редукции. Рассмотрим сначала ситуацию, когда теорема C уже доказана. Тогда все дальнейшие вычисления можно вести с точностью $e=12$. При этом по теореме A′ координаты степеней >6 можно редуцировать по модулю 4. Аналогично по теореме B′ координаты степеней >8 редуцируются по модулю 2. (Здесь удобно обозначить разность $e-8$ через f и назвать это число *глубиной* вычислений. Точность e и глубина f используются как константы в программировании при нахождении соотношений. Роль этих констант станет яснее позже - в связи с символьной формой).

Доказательства основных теорем сводятся к вычислениям, проводимым с точностью $e=13$ и глубиной $f=5$. При этом сначала доказывается теорема A, а затем - теорема B. Теорема C оказывается доказанной после нахождения соотношений вида $v^{13}_{m,k}=0$ при всех соответствующих m и k. Теоремы A′ и B′ получаются тогда, как это указано во введении. (Здесь, в этих основных вычислениях, редукции координат будут определяться на 1 большим значением точности, что будет разобрано в начале § 7).

§ 3. Формы записи соотношений для использования на ЭВМ

Содержание этого параграфа является развернутым переизложением предварительного эскиза, данного в несколько более общей форме в [7].

1°. Числовая запись. Соотношение вида $\sigma(x,y)=0$ можно изобразить в „координатной форме", если слово от образующих $\sigma(x,y)$, стоящее в левой его части, разложить по базисным одночленам (5). Тогда при подсчетах с точностью, например, $e=13$ полное количество координат, т.е. число всех базисных одночленов $v^{n}_{m,k}$ для $2\le n\le 13$, равно

198 (степень n для координат соотношений всегда оказывается >1). *Числовой записью* соотношения $\sigma(x,y)=0$ (или слова от образующих $\sigma(x,y)$) мы назовем (с точностью e=13) набор из 198 вычетов по модулю 8, являющихся координатами слова $\sigma(x,y)$ в его разложении по базису (5).

Координаты (как и соответствующие им базисные одночлены (5)) зависят от тройки параметров n,m,k, которые мы будем называть соответственно *степень*, *подстепень*, *номер*. Возможна также линейная („лексикографическая") упорядоченность (см. [7]) для координат (и базисных одночленов). Параметр, осуществляющий такую линеаризацию, назовем *адресом* координаты и обозначим его через a. Таким образом, при e=13 мы имеем $1\le a\le 198$. Воспроизведем указанную в [7] связь между этими двумя параметризациями координат. Если $\nu(n)$ - число базисных одночленов, степень которых $<n$, то по индукции без труда получается, что

$$\nu(n) = \frac{1}{24}\,(2n^3 - 3n^2 - 14n + 48 - 9(n \bmod 2)),\quad n>2;\quad \nu(2)=0.$$

(Можно проверить, что, как сказано выше, $\nu(14)=198$). Через $\mu(n,m)$ обозначается число базисных одночленов степени n и подстепени $<m$. Тогда нетрудно видеть, что $\mu(n,m)=(n-m)m$. Теперь ясно, что искомая связь между параметризациями в одну сторону дается равенством

$$a = \nu(n) + \mu(n,m) + k.$$

В обратную сторону связь аналитически значительно труднее (нужно искать целый корень кубического уравнения). Однако при помощи компьютера она осуществляется удивительно просто. Например, степень по данному значению адреса a находится перебором натуральных значений переменной n от 2 до тех пор, пока выполняется условие $\nu(n+1)<a$, а такой перебор ЭВМ выполняет практически мгновенно.

Стремясь (как и в дальнейшем) точнее описать фактическое программирование работы на ЭВМ, мы представим числовую форму записи как целочисленный массив (в терминологии паскаля), зависящий от целого аргумента, или, точнее, как отображение $\mathrm{mas}: A \longrightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, где A - отрезок натурального ряда значений адреса от a=1 до максимального (при данной точности e), $a_m=\nu(e+1)$. Значит, для $1\le a\le a_m$ через $\mathrm{mas}[a]\in\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ обозначается координата, имеющая адрес a. Массив mas по командам, включенным в программу, воспринимается машиной и далее может быть использован по усмотрению пользователя для различных операций над исследуемыми соотношениями вида $\sigma(x,y)=0$.

Числовая форма записи mas, однако, является неудобным для обозрения объектом (например, в ней много „ненужных" нулей). Для перехода к более удобной символьной записи, приводимой в следующем пункте, понадобится некоторая *цифровая детализация* числовой формы, которая будет обозначаться через mass. Смысл такой детализации в „расчленении" величины каждой координаты в тройку двоичных „цифр", равных 0 или 1, изображающих эту координату в обычной „двоичной записи". Таким образом, если $\bar{A}=\{1,2,3\}\times A$, то отображение $\mathrm{mass}: \bar{A} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ таково, что $\mathrm{mass}[i,a]$ представляет собой i-ю цифру (i=1,2,3) двоичной записи координаты $\mathrm{mas}[a]$ с адресом a.

2°. Символьная запись. Сейчас для слова $\sigma(x,y)$ или соотношения вида $\sigma(x,y)=0$

мы предложим более приятную „для глаз" форму записи, чем числовую. (Конечно, это - дело привычки и вкуса, о котором не принято спорить, и настаивать на ней всерьез не имеет смысла).

Замысел символьной записи состоит в намерении последовательно перечислить номера k (с указанием степени n и подстепени m) одних лишь *ненулевых* координат слова $\sigma(x,y)$, разложенного по базису (5). (Иначе говоря, символьная форма есть как бы „носитель" соотношения в нашем базисе). При этом сама величина координаты должна определяться *расположением* относящихся к координате параметров n,m,k, как это будет указано далее. Итак, *символьная запись* слова $\sigma(x,y)$ - это последовательность символов, начинающаяся левой скобкой '(', заканчивающаяся правой скобкой ')' и разбитая в двух пунктах знаком конъюнкции '&' на три *серии*: $\sigma(x,y)$ = = (...&...&...). (Используемые символы можно, конечно, заменить любыми другими). Если некоторая координата mas[a] отлична от нуля, то соответствующие адресу a значения параметров n,m,k указываются в каждой серии с номером i (=1,2,3), для которого mass[i,a]=1 (мы будем в этом случае говорить, что координата „входит" в i-ю серию), и не указываются, когда mass[i,a]=0. Иначе говоря, 1-я серия содержит „четверки", 2-я - „двойки" и 3-я - „единицы", из которых „состоят" сами координаты. Заполнение каждой серии происходит так. Серия делится на части, соответствующие степеням n входящих в серию координат в порядке возрастания степеней. Эти части (если они непусты) внутри серии разделяются символом '/'. Каждая такая часть делится на подчасти, соответствующие возрастающим значениям подстепеней m (при фиксированной степени n); непустые подчасти разделяются друг от друга символом ';'. Подчасть, соответствующая подстепени m=0 начинается символами 'n:', а при m>0 - символами '$n.m$='. Далее, в каждой подчасти идут, возрастая, номера k координат, входящих в данную серию, имеющих степень n и подстепень m. После каждого номера k ставится *пробел* (причем других пробелов в символьной записи нет). Пример символьной записи соотношения будет приведен в 4°.

При программировании символьная форма задается двумя переменными: во-первых, массивом символьного типа, т.е. отображением sig:$N \longrightarrow \Sigma$ нумерующего отрезка N=[1...ℓen] натурального ряда (достаточной длины ℓen) в множество символов Σ, так, что sig[1]='(', и, во-вторых, целым числом - длиной b, являющейся номером последнего символа записи, т.е. sig[b]=')'. Например, символьная запись нулевого слова имеет минимальную длину 4 : 0 =(&&).

3°. Процедуры над записями соотношений. Обе предложенные здесь формы записи переводятся друг в друга двумя связывающими их процедурами. Процедура „Transℓ" преобразует вводимую в нее символьную форму sig заданной длины b в числовую форму mas и ее цифровую детализацию mass. Процедура „Return" выполняет обратное преобразование. (В этом пункте мы только упоминаем процедуры без пояснений). Имеется еще две более грубые процедуры - „Intake" и „Derive", первая из которых „читает" данную последовательность, а вторая „пишет" имеющуюся или полученную последовательность символов в указанное место (на экран, на бумагу, в заготовленный файл

для хранения или дальнейшего использования). С целью предварительной „очистки" числовых массивов mas и mass составлена процедура „Start", аннулирующая их.

4°. Собирательная формула. Поиск соотношений начинается с получения основного соотношения – *собирательной формулы*, т.е. разложения по базисным одночленам (5) левой части соотношения $8(x+y)=0$. Этот общий случай значительно сложнее частного случая (4), в котором одно из слагаемых, соответствующее здесь члену y, лежит в коммутанте, из-за чего в частном случае и удается найти явные формулы для коэффициентов разложения. В [7] было описано, как при помощи ЭВМ можно провести очень тяжелые комбинаторные подсчеты, чтобы получить собирательную формулу, являющуюся отправным пунктом дальнейших исследований. Вот символьная запись собирательной формулы с точностью e=13:

(**2:1** /3:2 /4:1 /5:3 ;5.1=2 /6:1 2 5 /7:2 4 6 ;7.1=1 ;7.2=2 &**4:1 2 3** /5:2 4 ;5.1=1 /6:3 4 ;6.1=1 3 /7:4 ;7.1=2 3 ;7.2=2 /8:2 4 5 7 ;8.1=4 ;8.2=1 2 3 /9:2 3 7 8 ;9.1=1 3 4 6 ;9.2=1 2 3 4 ;9.3=2 &**8:1 2 3 4 5 6 7 ;8.1=1 2 5 ;8.2=1 2 3** /9:2 4 6 8 ;9.1=1 3 4 5 ;9.2=4 ;9.3=1 /10:3 4 7 8 ;10.1=1 3 5 7 ;10.2=2 ;10.3=1 2 3 /11:4 8 ;11.1=2 3 6 7 ;11.2=2 4 6 ;11.3=1 4 ; 11.4=1 /12:5 6 7 8 ;12.1=3 5 6 7 ;12.2=2 3 6 7 ;12.3=2 3 ;12.4=2 3 /13:6 8 ;13.1=4 5 7 ;13.2=6 ;13.3=1 2 4 5 6 ;13.4=1 3 4).

Сделаем некоторые наблюдения и описания. Обратим внимание на степени координат, которыми начинаются серии. В данном соотношении это n=2, 4, 8 соответственно. Здесь и далее для любого соотношения координаты таких степеней (первых в сериях) мы назовем *главными координатами* серии этого соотношения, а самую первую из координат (обозначаемую здесь символами 2:1) – *главной координатой всего соотношения*. Соответствующие слагаемые назовем *главными членами соотношения*. В соответствии с редукциями, указанными в 3° из § 2, серии обрываются так, что за главными координатами следуют координаты еще (не более) f степеней в каждой серии. Это – точное соответствие с теоремами A′, B′, C.

Итак, если, возвращаясь от символьной формы к „обычной" записи, ограничиться написанием только одних главных членов в каждой серии, то собирательная формула (экспоненты 8 при двух образующих в трансметабелевом случае I типа) представляет собой следующее соотношение:

$$4yx + \ldots + 2yx^3 + 2yx^2y + 2yxy^2 + \ldots + yx^7 + yx^6y +$$
$$+ yx^5y^2 + yx^4y^3 + yx^3y^4 + yx^2y^5 + yxy^6 + yx^5(yx) + yx^4y(yx) +$$
$$+ yxy^4(yx) + yx^3(yx)^2 + yx^2y(yx)^2 + yxy^2(yx)^2 + \ldots = 0.$$

Так обстоит дело с данным, основным соотношением. Все остальные соотношения будут получаться из этого и из вновь полученных соотношений преобразованиями трех типов, которые мы будем называть соответственно алгебраическими преобразованиями, деформациями и преобразованиями гауссова типа. Деформации соотношений сводятся к деформациям отдельных слагаемых, и будет ясно, что степени одночленов при этом могут только увеличиваться. Два других типа преобразований носят характер

нахождения линейной комбинации от уже имеющихся соотношений, поэтому наше наблюдение о степенях главных координат останется верным для всех соотношений и в дальнейшем до конца работы.

В трех ближайших параграфах (§ 4-6) будут описаны преобразования этих трех перечисленных типов. Затем в § 7 будут изложены детали хода поиска соотношений и в § 8 подведутся итоги всех подсчетов.

§ 4. Алгебраические процедуры

1°. Сложение и вычитание. Процедура для выполнения основного действия в группе G - сложения (или вычитания) - составляется без особого труда. Она очень мало отличается от набора команд для такого же покомпонентного действия над обычными векторами. Действительно, поскольку все базисные одночлены, на которые разбивается всякое соотношение, лежат в G^2, а слагаемые, имеющие адрес $a>1$, - даже в G^3, то учесть случаи нарушения коммутативности здесь очень просто. (Практически такие случаи и не могут возникнуть). Схема процедуры „Addit", о которой идет речь, вкратце такова. Символьные записи sig, sig_1 (имеющие длины b, b_1) двух данных соотношений процедурой „Transℓ" преобразуются в числовые массивы mas, mas_1. Далее для всех значений адреса $1\le a\le a_m$ выполняется оператор присваивания значений: $\mathrm{mas}[a]:=\mathrm{mas}[a]+\mathrm{mas}_1[a]$. Затем процедурой „Return" массив mas преобразуется в новый символьный массив sig, соответствующий искомому соотношению. С указанием параметров процедура имеет, например, такую запись: $\mathrm{Addit}(-,\mathrm{sig},\mathrm{sig}_1)$.

2°. Умножение соотношения на одночлен (процедура „Multi"). Здесь имеются нестандартные трудности, и их надо отметить. Напомним, что соотношение раскладывается на сумму слагаемых $\tau=V+\ldots$, из которых только первое может лежать в G^2, а остальные принадлежат G^n, $n>2$. Мы изучим умножение соотношения справа на первые три базисных одночлена, т.е. на одночлен вида $u=x$ или y или yx. (Умножение на другие базисные одночлены тривиально из-за трансметабелевости). Отметим „полную" дистрибутивность такого умножения.

П р е д л о ж е н и е 1. *Если* $V\in G^2$, $W\in G^3$, $u\in G$, *то* $(V+W)u=Vu+Wu$. Это вытекает из (1) и трансметабелевости группы. ●

Теперь, сохраняя обозначения, можно перейти к умножению одночлена V на u. Мы сначала разберем „влияние координаты", т.е. случай, когда V снабжено коэффициентом $i\in\mathbb{Z}$, а потом останется „чистый" случай при $i=1$, т.е. когда V имеет в точности вид (5).

П р е д л о ж е н и е 2. *Если* i *- целое* >0 *и* $V\in G^2$, $u\in G$, *то*

$$(iV)u=\sum_{j=0}^{i-1}\binom{i}{j+1}VuV^j.$$

Действительно, $(iV)u=-iV-u+iV+u=-iV+i(-u+V+u)=-iV+i(V+Vu)$, и теперь остается использовать тождество (4), заменив в нем a на V и B на Vu. ●

Выделим частный случай:

П р е д л о ж е н и е 2′. *При тех же обозначениях, если* $V\in G^3$, *то* $(iV)u=iVu$. ●

Значит, требуют специального рассмотрения лишь два таких случая - $(i(yx))x$ и $(i(yx))y$, причем поскольку в качестве i выступает координата, то интересны только значения $i=2$ и $i=4$. Поэтому на основании предложения 2 перечислим следующие 4 формулы:

$$(2yx)x = 2yx^2 + yx^2(yx), \tag{6}$$

$$(2yx)y = 2yxy + yxy(yx), \tag{7}$$

$$(4yx)x = 4yx^2 + 6yx^2(yx) + 4yx^2(yx)^2 + yx^2(yx)^3, \tag{8}$$

$$(4yx)y = 4yxy + 6yxy(yx) + 4yxy(yx)^2 + yxy(yx)^3. \tag{9}$$

Перейдем к трем случаям умножения „чистого" одночлена вида $V=yx^ry^s(yx)^t$, $r+s>1$, на u. Сразу получается самый легкий случай при $u=yx$:

$$V\cdot(yx) = yx^ry^s(yx)^{t+1}. \tag{10}$$

Далее, обращаемся к случаю $u=y$ и рассмотрим произведение $V\cdot y$. Используя тождество (3) при $C=yx^ry^s(yx)^{t-1}$ и $b=yx$, получим $yx^ry^s(yx)^ty=yx^ry^s(yx)^{t-1}y(yx)$. Повторным применением t раз этого приема мы найдем

$$V\cdot y = yx^ry^{s+1}(yx)^t. \tag{11}$$

Наконец, остается случай $u=x$. Буквальным повторением только что проведенного рассуждения мы снова из (3) получаем

$$V\cdot x = yx^ry^sx(yx)^t. \tag{12}$$

Нам осталось „только" показать, как приводится к сумме базисных одночленов произведение yx^ry^sx, что, однако, требует большого „программистского" усилия и машинного времени. Для получения этого разложения построена процедура „MuℓtiX" для x-умножения, рекурсивно зависящая от показателя s, как от параметра. Вычисление коэффициентов разложения для конкретного значения s происходит следующим образом. На основании тождества (3), положив в нем (если $s>1$) $C=yx^ry^{s-1}$ и $b=y$, мы получим разложение искомого произведения на 5 слагаемых

$$(yx^ry^{s-1})\cdot y\cdot x=yx^ry^{s-1}xy+yx^ry^{s-1}(yx)+yx^ry^{s-1}x(yx)+yx^ry^s(yx)+yx^ry^{s-1}xy(yx).$$

Здесь второе и четвертое слагаемые в правой части уже представляют собой базисные одночлены типа (5), а остальные три - первое, третье и пятое - сводятся к рекуррентному подсчету той же процедурой с заменой значения параметра s на $s-1$. В конце концов вычисления приводятся к случаю, когда значение параметра равно 0, а тогда разложение тривиально - $yx^r\cdot x=yx^{r+1}$, и к использованию уже разобранных случаев умножения (вида (10) или (11)) одночленов с целыми коэффициентами в некоторой сумме на y или на yx.

Такова вкратце схема построения процедуры „Muℓti" с использованием вспомогательной процедуры „MuℓtiX". Однако так построенная процедура работает недопустимо

долго (на одно умножение соотношения на x тратилось до 10 мин машинного времени). Поэтому раз и навсегда был составлен список произведений всех базисных одночленов на x. Этот список представляет собой последовательность символьных записей разложений каждого произведения вида Vx, где V пробегает все одночлены (5). (Такой список по существу относится к свободной трансметабелевой группе I типа. С нашей группой G он связан лишь редуцированием координат). После этого в процедуре „Multi" вызов процедуры „MultiX" был заменен вызовом записи соответствующего разложения из списка.

В окончательном виде процедура „Multi" зависит от следующих четырех параметров: 1) множитель u с выбором значений x, y, yx; 2) желаемое значение кратности умножения на u; 3) символьная запись sig соотношения; 4) ее длина b.

Заметим, что в результате сложения (вычитания) соотношений и умножения соотношения на любой рассмотренный одночлен u мы, очевидно, вновь получаем соотношение в группе G.

§ 5. Деформации соотношений

Мы сейчас рассмотрим еще пять преобразований, которые назовем *деформациями* и при помощи которых соотношения переводятся в новые соотношения. Буквами x, y теперь обозначаются *любые* два элемента из группы G (а не пара образующих, как ранее обозначалось, - это удобно, чтобы не вводить новых базисных одночленов (5)). Основная цель этого параграфа - описать некоторые способы „размножения" соотношений.

1°. Замена $y \longrightarrow yx$. Первой мы рассматриваем совсем просто выполнимую деформацию (она легко осуществляется и „вручную"). Образ базисного одночлена вида (5) после подстановки $y \longrightarrow yx$ будет отличен от нуля, как мы сейчас увидим, в том и только в том случае, когда $t=0$ и $n+k \le e$. Действительно, условие $t=0$ необходимо из-за трансметабелевости, и результат замены в этом случае оказывается следующим:

$$V^{n}_{0k} = yx^{n-k}y^{k-1} \longrightarrow yx^{n-k+1}{}_{(yx)}{}^{k-1} = V^{n+k}_{k-11}. \tag{13}$$

Преобразование координат на основании такой закономерности, конечно, не представляет труда. Процедура этого преобразования, переводящая символьную запись sig данного соотношения длины b в новую запись sig_1 длины b_1, названа „Ascent" (подъем).

2°. Замена $y \longrightarrow 2y$. Эту замену даже в метабелевом случае трудно выполнить без ЭВМ. Замена в соотношении сводится к замене в каждом его слагаемом. Значит, речь идет о разложении в сумму базисных одночленов (5) результата данной замены в одном произвольном таком одночлене, т.е. о разложении по базису выражения вида

$$(2y)x^{n-2m-k}(2y)^{k-1}((2y)x)^{m}. \tag{14}$$

В качестве первого шага по аналогии с выкладкой, доказывающей предложение 2

(см. § 4, п. 2°), на основании, как и ранее, тождества (4) мы получаем более сильное, чем (6), равенство

$$(2y)x = 2yx+yxy+yxy(yx), \qquad x,y\in G. \tag{15}$$

Это - начальный этап в организации процедуры, осуществляющей замену. Теперь (в соответствии с видом выражения (14)) нужно проделать $(n-2m-k-1)$-кратное умножение на x многочлена, стоящего в правой части равенства (15). Это делается уже описанной в 2° из § 4 процедурой (точнее, ее соответствующей частью). Сумма (15) перейдет при этом в некоторый многочлен F. Пусть одночлен V - его произвольное слагаемое. Далее, пусть s - целое положительное число. Переходим к описанию s-кратного умножения одночлена V справа на $2y$. Раскрывая скобки на основании (1) в произведении $V(y+y)$, получаем

$$V(2y) = 2Vy + Vy^2. \tag{16}$$

Нужно проделать $s=k-1$ раз эту операцию. Предположим, что при показателе $s-1$ интересующее нас разложение приняло вид

$$V(2y)^{s-1} = \sum_{i=0}^{s} \varepsilon_{is-1} Vy^{s+i-1},$$

где ε_{is-1} - коэффициенты разложения. Умножение справа этого равенства еще раз на $2y$ по (16), а также на основании предложений 1 и 2′, дает следующее:

$$V(2y)^s = \sum_{i=0}^{s} \varepsilon_{is-1} Vy^{s+i-1}(2y) = \sum_{i=0}^{s} \varepsilon_{is-1}(2Vy^{s+i}+ Vy^{s+i+1}) =$$

$$= 2\varepsilon_{0s-1}Vy^s+ \sum_{i=1}^{s} (2\varepsilon_{is-1}+\varepsilon_{i-1s-1})Vy^{s+i}+\varepsilon_{ss-1}Vy^{2s+1}= \sum_{i=0}^{s+1} \varepsilon_{is}Vy^{s+i},$$

откуда коэффициенты ε_{is} можно получать на основании следующих рекуррентных соотношений:

$$\varepsilon_{is}= \varepsilon_{is-1}+ \varepsilon_{i-1s-1}, \quad s>0, \quad i=0,\dots,s+1. \tag{17}$$

Эти соотношения с добавлением условий $\varepsilon_{00}=1$, $\varepsilon_{ij}=0$ при $j>s+1$ использованы в специальной процедуре «Table», дающей таблицу коэффициентов для этой и следующей (замена $y \longrightarrow 3y$) деформаций. Итак, $(k-1)$-й столбец этой таблицы позволяет разложить по базису выражение

$$(2y)x^{n-2m-k}(2y)^{k-1}.$$

Для завершения разложения всего выражения (14) применяется m-й столбец той же таблицы коэффициентов. Действительно, по (15) и на основании трансметабелевости нужно выполнить m-кратное умножение лишь на одночлен $2yx$, что по (16) приводит (для каждого одночлена V уже имеющегося разложения) к повторному разложению вида

$$V(2yx)^m = \sum_{i=0}^{m+1} \varepsilon_{im}V(yx)^{m+i}.$$

Таким образом, рассматриваемая процедура после кратного умножения на x и

получения в результате этого многочлена F завершается (для каждого его слагаемого) выполнением двойного цикла, использующего таблицу коэффициентов ε_{is}, находимую при помощи (17).

Процедура имеет имя „Change2". Она зависит от параметров sig, sig_1, b, b_1, как и другие процедуры всех пяти деформаций этого параграфа.

3°. Замена $y \longrightarrow 3y$. Схема построения процедуры „Change3", осуществляющей данную замену, такая же, как только что рассмотренная. Здесь нужно произвести разложение по базису каждого из следующего выражений:

$$(3y)x^{n-2m-k}(3y)^{k-1}((3y)x)^m.$$

Сначала находится разложение

$$(3y)x = 3yx + 3yxy + yxy^2 + 5yxy(yx) + 2yxy^2(yx) + 2yxy(yx)^2 + yxy^2(yx)^2.$$

(Здесь, как и для вывода разложения (15), используется тождество (4)). Затем умножением $n-2m-k-1$ раз на x последней суммы 7 слагаемых мы получаем некоторый многочлен F. И наконец, к каждому слагаемому V многочлена F применяется, как и в 2°, двойной цикл с использованием коэффициентов ε_{is}. Однако здесь их таблица отличается от предыдущей. Определяющие эту таблицу рекуррентные соотношения в отличие от (17) имеют вид

$$\varepsilon_{is} = \varepsilon_{i\ s-1}+3\varepsilon_{i-1\ s-1}+3\varepsilon_{i-2\ s-1}, \tag{18}$$

что получается такой же, как и раньше, выкладкой, но при использовании вместо равенства (16) его следующего аналога:

$$V(3y) = 3Vy + 3Vy^2 + Vy^3. \tag{19}$$

Новая таблица коэффициентов получается при помощи упомянутой в 2° процедуры „Table". (Эта процедура снабжена специальным параметром ℓ, принимающим натуральные значения. В случае первой замены этот параметр нужно взять равным 2, а сейчас - 3. Описанные две замены можно было бы легко обобщить и составить замену при любом натуральном ℓ).

Процедура „Change2" преобразует исходное соотношение - собирательную формулу с точностью e=13 примерно за 10 мин, а „Change3" на это же тратит около 30 мин машинного времени.

4°. Замена $x \longleftrightarrow y$ **(процедура** „Dual"**).** Для рассматриваемой трансметабелевой группы это преобразование (автоморфизм, когда x, y - образующие группы) - назовем его *дуализацией* - выполняется значительно сложнее, чем в метабелевом случае (где оно попросту переводит $yx^{n-k}y^{k-1}$ в $-yx^ky^{n-k-1}$). Для дуализации любого соотношения достаточно дуализировать его слагаемые. Запишем выражение, являющееся результатом дуализации базисного одночлена (5):

$$xy^{n-2m-k}x^{k-1}(xy)^m. \tag{20}$$

Требуется разложить это выражение по базису. Предварительно докажем две формулы. (Бесконечное суммирование в них понимается как суммирование со сколь угодно

большой точностью e).

П р е д л о ж е н и е 3. *Если $A, C \in G^2$ и m – целое положительное число, то*

$$A(-C)^m = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{m+i} \binom{m+i-1}{m-1} AC^{m+i}. \tag{21}$$

П р е д л о ж е н и е 4. *Если $C \in G^2$ и Y – последовательность любых правых множителей из G, то*

$$(-C)Y = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} CYC^j. \tag{22}$$

Эти формулы выводятся из (2). Действительно,

$$A(-C) = -AC - AC(-C) = -AC - (-AC^2 - AC^2(-C)) = -AC + AC^2 + AC^2(-C).$$

Продолжая эти выкладки, далее получаем для любого e

$$A(-C) = \sum_{i=0}^{e-1} (-1)^{i+1} AC^{i+1} + (-1)^e AC^e(-C),$$

т.е. при $m=1$ равенство (21) получено. (Условие $\in G^2$ используется для коммутирования слагаемых). Пусть теперь мы имеем

$$A(-C)^m = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{m+i} \binom{m+i-1}{m-1} AC^{m+i}.$$

Тогда

$$A(-C)^{m+1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{m+i} \binom{m+i-1}{m-1} AC^{m+i}(-C) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{m+i} \binom{m+i-1}{m-1} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} AC^{m+i+j+1};$$

обозначая здесь $i+j$ снова через i, получаем

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{m+i+1} \left[\sum_{j=0}^{i} \binom{m+j-1}{m-1} \right] AC^{m+i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{m+i+1} \binom{m+i}{m} AC^{m+i+1},$$

и формула (21) установлена.

Переходя к формуле (22), заметим, что достаточно установить ее для „базы индукции", т.е. когда последовательность Y сводится к одному множителю y_1, поскольку „индукционный переход" сразу же вытекает из предложения 1 и трансметабелевости. Итак, пользуясь (2), проверяем

$$(-C)y_1 = -Cy_1 + (-Cy_1)(-C) = -Cy_1 + Cy_1C + Cy_1C(-C) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} Cy_1C^j,$$

на основании (21).

Займемся теперь разложением по базису выражения (20). Запишем его в виде

$$(-yx)y^{n-2m-k-1}x^{k-1}(-yx)^m. \tag{20'}$$

На основании доказанных предложений получаем следующее разложение:

$$\sum_{i,\,j=0}^{\infty} (-1)^{m+i+j+1} \binom{m+i-1}{m-1}' yxy^{n-2m-k-1}x^{k-1}(yx)^{m+i+j}, \tag{23}$$

где штрих при биномиальном коэффициенте $\binom{\ }{\ }'$ напоминает, что он отличен от нуля только при $m>0$, поэтому считаем, что при $m=0$ суммирование ведется только по j. Разложение (23) еще не окончательное. Без особого труда составляется программа, при помощи которой с использованием $(k-1)$-кратного x-умножения (см. п. 2°, § 4) отсюда находится искомое разложение по базису.

О времени работы этой процедуры и о сокращении этого времени говорится в конце следующего пункта.

5°. Замена $y \longrightarrow y+x$ (процедура „Move"). Приводим схему процедуры для *сдвига* - последней деформации. Рассматриваемая замена базисный одночлен (5) приводит к следующему выражению:

$$(y+x)x^{n-2m-k}(y+x)^{k-1}((y+x)x)^m, \tag{24}$$

которое нужно разложить по базису (5). На основании (1) получаем первый шаг в выполнении процедуры: $(y+x)x=yx+yx^2$, откуда легко выводим $(y+x)x^{n-2m-k}= yx^{n-2m-k} + yx^{n-2m-k+1}$. Если отметить, что в силу трансметабелевости завершающее m-кратное умножение нужно производить только на yx, а не $yx+yx^2$, то ясно, что единственная стоящая перед нами задача заключается в $(k-1)$-кратном умножении на двучлен $(y+x)$. Каждый раз на этот двучлен нужно умножать некоторый многочлен, состоящий из базисных одночленов. Пусть V - произвольное слагаемое этого многочлена. Тогда на основании (1) получаем: $V(y+x) = Vx+Vy+Vyx$. Для каждого слагаемого этой суммы находится разложение по базису либо непосредственно (для второго), либо путем x-умножения (см. 2°, § 4).

Две последние процедуры после их изготовления по описанной схеме требовали очень много машинного времени. Поэтому пришлось прибегнуть к составлению двух списков деформаций каждого базисного одночлена (аналогичных списку для x-умножения). Использование этого усовершенствования сократило время работы примерно в 100 раз.

§ 6. Гауссовы процедуры

Процедуры, к описанию которых мы переходим, предназначены для улучшения внешнего вида соотношений. Они *исключают* некоторые „лишние" координаты данного соотношения (правда, при этом могут появиться другие „на некотором удалении") при помощи вычитания умноженных на подходящие множители соотношений из специального списка „Relat". Этот список переменный, он в процессе исследования данной группы пополняется и уточняется, входящие в него соотношения „улучшаются". (Название процедур - „гауссовы" - дано из-за сходства их работы с использованием „метода Гаусса" приведения матрицы к треугольному виду).

Таким образом, программа опирается на четыре списка символьных записей: три постоянных - для x-умножения „Tbℓ" и для двух последних деформаций „Tbd" и „Tbm", и один переменный „Relat", состоящий из соотношений именно этой группы. (Как заполняется последний список, пойдет речь в следующем параграфе).

Коснемся некоторых деталей работы с этими списками. Каждый из четырех списков вводится в машину по команде процедурой „Entry" для „запоминания". После этого возможно извлечение из списка при помощи процедуры „Fragm" по указанию порядкового номера той символьной записи, которая нужна в данный момент.

Среди гауссовых процедур три - по числу серий - осуществляют либо полное исключение всех координат соответствующей серии, либо всех тех координат серии, степень которых не больше указанной грани, и три процедуры, исключающие в данной серии все координаты, кроме некоторого числа (предписанного заранее), пропускаемого в начале серии.

Исключение очередной координаты в обрабатываемом соотношении происходит так. При помощи вспомогательной процедуры „Address" находятся параметры a, n, m, k (см. § 3) той координаты, которая (в силу занимаемого ею в символьной записи места) в соответствии с заданием данной гауссовой процедуры подлежит очередному исключению. Далее, по этим параметрам в списке „Relat" находится запись того соотношения, которое путем кратных умножений на одночлены y или yx приводится к соотношению с главной координатой, равной исключаемой координате, и с главным членом, равным исключаемому члену. И наконец, происходит само исключение координаты путем вычитания из обрабатываемого соотношения того, которое найдено при помощи списка.

Завершим это общее описание примерным изложением более конкретных деталей схемы одной гауссовой процедуры „ExcluG1". Она работает, когда список соотношений „Relat" состоит по крайней мере из f+1 соотношений - самóй собирательной формулы (4° из § 3) и результатов последовательного f раз проведенного умножения на x этого основного соотношения. (Такое „пополнение" списка „Relat" делается и далее. Его цель - ускорить работу гауссовых процедур).

Данная процедура производит „косметическую обработку" собирательной формулы - исключение всех ее координат первой серии, кроме главной, с тем, чтобы соотношение приняло вид (2:1 &...). Ясно, что такое „исключение четверок" достигается последовательным вычитанием из данного соотношения кратностей его самого, поскольку главный член $4yx$ собирательной формулы после умножения справа на подходящие множители вида $u=x$ или y или yx может быть, очевидно, приведен к виду $4V$, где V - любой базисный одночлен вида (5) (степени $n\geq 2$). Последнее простое рассуждение и его естественное развитие будет существенным и дальше в аналогичных ситуациях, поэтому приведем его следующее оформление.

Л е м м а. *Пусть V_0 пробегает все базисные одночлены вида* (5) *степени n_0 и i_0V_0 - главные члены некоторой такой системы соотношений* (S_0) *группы G, в которой i_0 - одинаковая главная координата всех соотношений из* (S_0), *равная* 4 *или* 2, *или* 1. *Тогда для всякого базисного одночлена V степени $n\geq n_0$ в группе G существует соотношение с главным членом i_0V.* •

Приведем теперь схему процедуры „ExcluG1". Во-первых, применяется упомянутая ранее в этом пункте процедура „Address", которая „настраивается" так, чтобы она *игнорировала* в первой серии первую координату обрабатываемой символьной записи sig

и выдавала параметры a, n, m, k точно *второй* координаты (которая должна существовать - в противном случае, т.е. если вслед за первым пробелом в записи уже стоит символ '&', работа должна быть закончена). Итак, пусть процедура „Address" устанавливает, что сейчас должна быть исключена координата (равная 4, поскольку рассматривается первая серия), соответствующая базисному одночлену $yx^{n-2m-k}y^{k-1}(yx)^m$. В списке „Relat", как ранее указано, на $(n-2m-k)$-м месте находится соотношение с главным членом $4yx^{n-2m-k}$, которое и извлекается под именем sig_0 из списка процедурой „Fragm" с указанным номером в качестве значения параметра. После этого извлеченная символьная запись подвергается действию процедуры „Multi" при $u=y$ с кратностью $k-1$ и при $u=yx$ с кратностью m. Наконец, процедурой „Addit" из соотношения sig вычитается соотношение sig_0, и очередная координата исключена. Все эти манипуляции оформлены в виде цикла, продолжаемого до выполнения условия sig[6]='&', т.е. до тех пор, пока на 6-м месте записи sig не окажется символ '&'.

§ 7. Поиск соотношений

Переходим к описанию проведенного на компьютере поиска соотношений в исследуемой группе. Как указано в § 2, п. 3°, весь поиск вплоть до завершения доказательства теоремы C ведется с точностью $e=13$ (и, стало быть, с глубиной $f=5$). Увеличение на единицу точности приводит к тому, что редукции координат в каждой серии будут определяться равенствами с показателями на единицу большими, чем в теоремах A′, B′, C:

$$4G^8 = 0, \qquad 2G^{10} = 0, \qquad G^{14} = 0,$$

Первые два равенства выводятся из теорем A и B и включения $4G^4 \subset G^{10}$ аналогично тому, как во введении обосновываются теоремы A′, B′, а в справедливости теорем A и B можно будет убедиться рассуждениями, не зависящими от точности. Таким образом, в 1-й (соответственно во 2-й, в 3-й) серии учитываются координаты до 7-й (соответственно до 9-й, 13-й) степени включительно. По числу серий в символьной записи для нашей группы G поиск разбивается на три этапа, соответствующих трем первым пунктам этого параграфа. Будем называть *соотношением i-й серии* ($i=1,2,3$) соотношение с главным членом в i-й серии.

1°. Исключение четверок и доказательство теоремы A. Поиск на 1-м этапе практически сводится к нахождению одного соотношения 1-й серии, а именно собирательной формулы, которая уже найдена (см. § 3, п. 4°). Остается резюмировать ситуацию.

Во-первых, доказана теорема A. Действительно, собирательная формула независимо от того, с какой точностью она получена, свидетельствует именно о возможности выразить элемент $4yx$, а значит, и любой элемент из $4G^2$ в виде суммы слагаемых из $2G^4$ и G^8.

Далее, после нахождения собирательной формулы процедура „Excl1" для

исключения четверок, т.е. координат 1-й серии, очень проста. В конце § 6 была описана более сложная процедура „ExcℓuG1", поэтому мы ограничимся указанием того, что список соотношений „Reℓat" в этот момент составлен из f+1=6 соотношений - собирательной формулы и пяти соотношений, получаемых из этого последовательными умножениями на x, что делается, как сказано в § 6, для ускорения работы исключающих процедур. После обработки соотношений процедурой „ExcℓuG1" они приобретают следующий вид (во 2-й и в 3-й сериях дается лишь несколько начальных координат):

(2:1 &4:1 2 3 /5:3 ;5.1=1 2 /...&8:1 2 ...), (r_0)

(3:1 &5:1 2 ...&9:1 2 ...), (r_1)

(4:1 &6:1 2 ...&10:1 2 ...), (r_2)

(5:1 &7:1 2 ...&11:1 2 ...), (r_3)

(6:1 &8:1 2 ...&12:1 2 ...), (r_4)

(7:1 &9:1 2 ...&13:1 2 ...). (r_5)

Эти соотношения и используются при исключении четверок процедурой „Excℓu1". (После проведения второго этапа в этих соотношениях будут исключены координаты степеней ≥5 во второй серии. Такие упрощения всех соотношений списка „Reℓat" производятся и далее, по мере возможности).

2°. Исключение двоек и доказательство теоремы B. Оказывается возможным получить все соотношения для исключения координат 2-й серии, начиная с координат 5-й степени. Таких соотношений шесть (по числу базисных одночленов 5-й степени). Покажем, как они находятся.

При описании хода поиска мы будем перечислять основные команды (в форме вызова процедур), включенные в программу, и указывать (в сокращенной записи) полученный результат. Соотношения, подвергаемые преобразованиям, вызываются из списка „Reℓat" упомянутой в § 6 процедурой „Fragm" с указанием в качестве параметров процедуры имени, которое дается вызываемой символьной записи, и номера, под которым она входит в список „Reℓat". Например, выражение Fragm(sig,1) будет означать вызов соотношения (r_0) (имеющего в записи номер 1) и придание ему имени sig. Запись процедуры „Derive" для вывода будет опускаться.

Приведем перечень десяти основных моментов в работе второго этапа поиска (вся эта работа заняла примерно 1 ч 40 мин машинного времени). В полученных результатах указано лишь, как обычно, несколько первых координат. Индексы массивов будут записываться далее в строку „без спуска", например, sig3 вместо sig_3.

1)Fragm(sig,1); Change3(sig,sig3); Excℓu1(sig3).

Результат: sig3=(&5:3 ;5.1=1 2 /...).

2) Dualℓ(sig3,sig2); Excℓu1(sig2).

Результат: sig2=(&5:2 ;5.1=2 /...).

3) Change2(sig,sig4); Excℓu1(sig4).

Результат: sig4=(&5:3 4 ;5.1=1 2 /...).

4) Dualℓ(sig4,sig1); Excℓu1(sig1).

Результат: sig1=(&5:1 2 ;5.1=2 /...).

5) Addit(-,sig1,sig2); Exclu1(sig1).

Результат: sig1=(&5:1 /(s_1). (s_1)

6) Addit(-,sig4,sig3); Exclu1(sig4).

Результат: sig4=(&5:4 /...). (s_4)

7) Move(sig2,sig5); Addit(-,sig5,sig1); Addit(-,sig5,sig2); Exclu1(sig5).

Результат: sig5=(&5.1=1 /...). (s_5)

8) Ascent(sig,sig6); Addit(-,sig6,sig2); Addit(-,sig6,sig3); Exclu1(sig6).

Результат: sig6=(&5.1=2 /...). (s_6)

9) Addit(-,sig2,sig6); Exclu1(sig2).

Результат: sig2=(&5:2 /...). (s_2)

10) Addit(-,sig3,sig5); Addit(-,sig3,sig6); Exclu1(sig3).

Результат: sig3=(&5:3 /...). (s_3)

Мы получили 6 соотношений 2-й серии (s_1),...,(s_6). Каждое из них подвергается (как и прежде, для упрощения работы исключающих процедур) после- довательному 4-кратному умножению на x. Например, из (s_1) получаются соотношения (s_{11}),...,(s_{14}):

(&6:1 /...); (&7:1 /...); (&8:1 /...); (&9:1 /...).

Всего, таким образом, оказывается 30 новых соотношений 2-й серии, включаемых в список „Relat" вслед за имеющимися уже там шестью соотношениями 1-й серии.

Теперь отметим, что выполнены условия леммы из § 6 (при n_0=5, i_0=2), и можно приступить к созданию процедур „Exclu2" или „ExcluG2", исключающих координаты 2-й серии. Эти процедуры строятся аналогично таким же процедурам для 1-й серии по схеме, намеченной в § 6, лишь с более сложным учетом номеров соотношений, вызываемых из списка „Relat", и мы подробно описывать их не будем.

Далее, проделывается значительное упрощение всех 36 соотношений списка „Relat" при помощи процедуры „ExcluG2". (Заметим, что при выполнении исключающих процедур 2-й серии часто появляются координаты 1-й серии, и приходится организовывать „челночную" работу процедур. Описание деталей этого мы также опускаем). Как и следует ожидать, например, соотношение (r_0) принимает вид

(2:1 &4:1 2 3 &8:1 2 3 4 5 6 7 ; ...). (r_0)

Укажем также вид, к которому при этом приводятся основные соотношения 2-й серии:

(&5:1 &9:1 3 5 ;...), (s_1)

(&5:2 &9:2 4 6 ;...), (s_2)

(&5:3 &9:3 5 7 ;...), (s_3)

(&5:4 &9:4 6 8 ;...), (s_4)

(&5.1=1 &9.3=1 /...), (s_5)

(&5.1=2 &9.3=2 /...). (s_6)

Обратимся теперь к теореме B. Соотношения (s_1),...,(s_6) как раз свидетель-

ствуют о ее справедливости. На самом деле, из (s_1), например, мы получаем $2yx^4 = yx^8+yx^6y^2+yx^4y^4+\ldots$, и такое представление можно получить (используя и остальные соотношения), для любого элемента из $2G^5$. Возможность такого конструктивного представления мы получили с учетом точности e=13 (и глубины f=5), т.е. при использовании некоторых редукций для координат соотношений. Однако ясно, что принципиальная возможность представлений такого вида всегда возможна и главные члены в этих представлениях не зависят от точности вычислений и редукции координат. (Убедиться в этом можно, проведя вычисления с точностью e=9 и глубиной f=1). Таким образом, теорема B верна.

3°. Соотношения 3-й серии и доказательство теоремы C. Получение соотношений 3-й серии проводится в несколько шагов, которые удобно располагать в порядке возрастания подстепени соотношений, при этом на каждом шаге уточняется очередная версия процедуры „Excℓu3" (в силу возможности использования вновь найденных соотношений в списке „Reℓat"). В приводимом далее описании программ вычисления соотношений мы будем набор гауссовых процедур „Excℓu1", „Excℓu2" с добавлением затем „Excℓu3" коротко обозначать через „Excℓu".

В начале третьего этапа поиска список „Reℓat" состоит, как отмечалось, из 36 соотношений, а процедуры „Excℓu3" еще нет. Для получения первых трех соотношений 3-й серии используются соотношения (s_1), (s_2), (s_3), имеющие в списке „Reℓat" номера соответственно 7, 12, 17. Проводятся вычисления по следующей программе

```
Fragm(sig,7); Ascent(sig,sig1); Excℓu(sig1); Duaℓ(sig1,sig3);
Fragm(sig,12); Duaℓ(sig,sig2); Fragm(sig,17); Addit(-,sig2,sig);
Addit(-,sig2,sig1); Addit(-,sig2,sig3); Excℓu(sig2).
```

В результате получаются соотношения

```
sig1=(&&10:3 5 ;...),    sig2=(&&10:4 6 ;...),    sig3=(&&10:5 7 ;...).
```

После добавления к списку „Reℓat" этих соотношений (и соотношений, получаемых из них умножением на x, что в дальнейшем для краткости оговариваться не будет) составляется первая версия процедуры „Excℓu3".

На втором шаге выполняется следующая программа:

```
Fragm(sig,1); Duaℓ(sig,sig1); Move(sig1,sig2); Excℓu(sig1); Excℓu(sig2),
```

которая дает два таких соотношения:

```
sig1=(&&10.1=1 2 3 4 5 6 7 ;...),        sig2=(&&10.1=2 3 4 5 6 7 ;...).
```

Отсюда с помощью следующих процедур:

```
Addit(-,sig1,sig2); Duaℓ(sig1,sig7); Move(sig7,sig3); Addit(-,sig3,sig1);
Addit(-,sig3,sig7); Addit(-,sig2,sig3); Addit(-,sig2,sig7)
```

получается такая четверка соотношений:

sig1 = (&&10.1=1 ;...), sig2 = (&&10.1=2 4 6 ;...),

sig3 = (&&10.1=3 5 ;...), sig7 = (&&10.1=7 ;...),

после включения которых в список „Relat" проводится корректирование процедуры „ExcluЗ".

Дальнейшие шаги поиска изложим короче: полученные соотношения приведем без указания процедур для их получения. (Выбор таких процедур, конечно, неоднозначен). Приводим соотношения в том порядке, в котором они получены. Очередной шаг дал соотношения

(&&11.2=1 ;...), (&&11.2=2 ;...), (&&11.2=5 ;...),

(&&11.2=6 ;...), (&&12:2 ...), (&&12:8 ;...),

Затем появились соотношения

(&&11.3=1 ;...), (&&11.3=2 ;...), (&&11.3=3 ;...),

(&&11.3=4 ;...), (&&12:9 ...), (&&12.1=6 ...), (&&12.2=4 ...).

Далее

(&&12.4=1 /...), (&&12.4=2 /...), (&&12.4=3 /...).

И, наконец, на последнем шаге

(&&13:1 ...), (&&13:10), (&&13:11), (&&13:12),

(&&13.5=1), (&&13.5=2)..,

Нетрудно видеть, что найдены все соотношения 13-й степени, а значит, и теорема С доказана.

4°. О дальнейшем поиске. Теперь, как указано в § 2, п. 3°, можно организовать заново все вычисления с меньшей точностью e=12, а поэтому значительно более быстрые. При таких вычислениях соотношения приводятся к более простому, „окончательному" виду и делается попытка обнаружить „пропущенные" соотношения.

Список „Relat" при вычислениях с точностью e=12 содержит 74 соотношения. После всех упрощений в них суммарное количество символов в списке равно 1914. (Для сравнения заметим, что на заключительной стадии работы с точностью e=13 такой список содержал 102 соотношения, на которые было израсходовано 12 354 символа). Упрощение символьной записи соотношений завершает процедура „ExcluG3", после которой в записи каждого соотношения не остается ни одной координаты, кроме главной, которая совпадала бы с главной координатой другого соотношения из списка „Relat" (или получалась бы при домножении на y или yx), т.е. которую можно исключить. Вот, например, окончательный вид, к которому приводится соотношение (r_0), т.е. это - последний вариант (ср. с § 3, п. 4°) собирательной формулы

(2:1 &4:1 2 3 &8:1 2 3 4 5 6 7 ;8.1=1 2 5 ;8.2=1 2 3 /9.1=2 4 6 ;9.2=1

2 /10.1=4 5 ;10.2=4 5 ;10.3=1 2 /11.2=4 ;11.4=1 /12:1 10 11).

Затем проведен широкий поиск, который тем не менее не выявил новых

соотношений. Программа имела следующую схему: каждое из 74 соотношений списка „Relat" подвергалось каждой из 5 деформаций и каждой из 25 пар деформаций с последующим применением к каждому из 74·30=2220 результатов всех гауссовых процедур. Во всех случаях ответ был один: нулевой элемент (&&), т.е. каждый результат „обработки" одного соотношения оказывается „линейной комбинацией" уже имеющихся в списке соотношений.

§ 8. Индуцирование результатов вычислений на факторы нижнего центрального ряда

Будем считать в этом параграфе (допуская нестрогость, чтобы не вводить новых обозначений) набор базисных одночленов (5) фиксированной степени n системой образующих фактора $M_n=G^n/G^{n+1}$. Обозначая $\mathbb{Z}/(s)$ через $\mathbb{Z}_s$, мы можем $\mathbb{Z}_8$-модуль M_n считать $\mathbb{Z}_4$-модулем при $n\geq 2$ (соответственно $\mathbb{Z}_2$-модулем при $n\geq 5$) благодаря возможности исключения четверок (соответственно двоек). Найденные в § 7 соотношения в группе G позволяют подойти к явному описанию модулей M_n. Приступим к такому последовательному описанию.

В $\mathbb{Z}_8$-модуле M_1 образующие x,y не связаны нетривиальными соотношениями, и $|M_1|=8^2=2^6$. В $\mathbb{Z}_4$-модулях M_2,M_3,M_4 $\mathbb{Z}_4$-размерности равны соответственно 1,2,3, и поэтому $|M_2|=2^2$, $|M_3|=2^4$, $|M_4|=2^6$. Начиная с $n=5$, $\mathbb{Z}_2$-базисом в M_n является $\mathbb{Z}_2$-независимая система одночленов (5) n-й степени. До $n\leq 9$ нетривиальных зависимостей в таких системах не обнаружено (по-видимому, их нет), и $|M_n|\leq 2^{\nu(n+1)-\nu(n)}$ на основании определения функции ν (§ 3, п.1°). Обозначим через $|M_n|=2^{d_n}$ для любого $n\in\mathbb{Z}$. Мы уже можем для $1\leq n\leq 9$ составить таблицу верхних границ для d_n:

n =	1	2	3	4	5	6	7	8	9,
d_n =	6	2	4	6	6	8	12	15	20.

Поскольку мы установили (§ 7), что для $n\geq 13$ $M_n=0$, нам остается изучить три модуля. В $\mathbb{Z}_2$-модуле M_{10} найдены первые нетривиальные соотношения (§ 7, п.3°) - три, подстепени $m=0$:

$$yx^7y^2+yx^5y^4 = 0, \qquad yx^6y^3+yx^4y^5 = 0, \qquad yx^5y^4+yx^3y^6 = 0,$$

и четыре, подстепени $m=1$:

$$yx^7(yx) = 0, \qquad yx^6y(yx)+yx^4y^3(yx)+yx^2y^5(yx) = 0,$$

$$yx^5y^2(yx)+yx^3y^4(yx) = 0, \qquad yxy^6(yx) = 0.$$

Для наглядности получающуюся картину в размерностях модулей удобно сопоставить с ситуацией в случае свободной трансметабелевой группы. Приведем таблицу размерностей в „свободном случае" в зависимости от степени n и подстепени m:

n =	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\nu(n)$ =	0	1	3	6	12	20	32	47	67	91	121	156	198
$\nu(n+1)-\nu(n)$ =	1	2	3	6	8	12	15	20	24	30	35	42	
m = 0:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
m = 1:				2	3	4	5	6	7	8	9	10	
m = 2:						2	3	4	5	6	7	8	
m = 3:								2	3	4	5	6	
m = 4:										2	3	4	
m = 5:												2	

Значит, при n=10 в таблице „свободного случая" имеет место следующее „разложение для размерностей": 9+7+5+3=24. В рассматриваемом же случае (т.е. для нашей группы G) мы, учитывая количества найденных в § 7 зависимостей (т.е. при следующем уменьшении слагаемых: 9-3=6 и 7-4=3), получаем

$$d_{10} \le 6+3+5+3 = 17.$$

Далее, аналогичным образом для n=11 из указанных в § 7 п.3° соотношений без труда получаем в M_{11} 4 соотношения при m=0:

$$yx^8y^2+\ldots=0, \qquad yx^7y^3+\ldots=0, \qquad yx^6y^4+\ldots=0, \qquad yx^5y^5+\ldots=0;$$

6 соотношений при m=1:

$$yx^8(yx)+\ldots=0, \qquad yx^7y(yx)+\ldots=0, \qquad yx^6y^2(yx)+\ldots=0,$$

$$yx^5y^3(yx)+\ldots=0, \qquad yx^2y^6(yx)+\ldots=0, \qquad yxy^7(yx)+\ldots=0;$$

4 соотношения при m=2:

$$yx^6(yx)^2 = yx^5y(yx)^2 = yx^2y^4(yx)^2 = yxy^5(yx)^2 = 0$$

и все 4 соотношения при m=3:

$$yx^4(yx)^3 = yx^3y(yx)^3 = yx^2y^2(yx)^3 = yxy^3(yx)^3 = 0.$$

(Для краткости мы не пишем полностью все соотношения, но сделать это несложно). При m=4 соотношений не обнаружено (т.е. одночлены $yx^2(yx)^4$, $yxy(yx)^4$ остались свободными). Из перечисленного, вместо „табличного" разложения 10+8+6+4+2=30 мы имеем следующее ограничение:

$$d_{11} \le 6+2+2+0+2 = 12.$$

Наконец, для n=12 по таблице мы имеем 11+9+7+5+3=35, а с учетом найденных соотношений и соответствующего уменьшения слагаемых мы получаем последнее неравенство

$$d_{12} \le 3+0+0+0+0 = 3.$$

Таким образом, можно суммировать все полученные оценки для d_n:

$$6+2+4+6+6+8+12+15+20+17+12+3 = 111,$$

а отсюда $|G| \le 2^{111}$, что и указано во введении.

Список литературы

[1] Кострикин А.И. О проблеме Бернсайда // ДАН СССР. 1958. Т.119, N 6. С.1081-1084.

[2] Zelmanov E.I. On the restricted Bernside's problem // Международная конференция по алгебре, посвященная памяти А.И.Мальцева (1909-1989). Новосибирск, 1989: Тез. докл. по теории колец, алгебр и модулей. С.223.

[3] Bachmuth S., Heilbroun H., Mochisuki H.Y. Metabelian Bernside groups // Proc. Roy. Soc., Ser. A. 1968. Vol.307. P.235-250.

[4] Скопин А.И. Факторы нильпотентного ряда некоторых метабелевых групп примарной экспоненты // Модули и алгебраические группы. II. Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1983. Т.132. С.129-163.

[5] Скопин А.И. Исследование на БЭСМ-6 структуры нильпотентного ряда метабелевой 2-порожденной группы экспоненты 27 // Аналитическая теория чисел и теория функций. 8. Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1987. Т.160. С.247-256.

[6] Шмелькин А.Л. Свободные полинильпотентные группы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т.28, N 1. С.91-122.

[7] Скопин А.И. О реализации вычислений на ЭВМ в трансметабелевых группах // Вестн. ЛГУ. Сер.1. 1988. Вып.1. С.20-23.

[8] Скопин А.И. Тождество Якоби и собирательная формула Ф.Холла в трансметабелевых группах двух типов // Кольца и модули. 3. Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1989. Т.175. С.106-112.

[9] Холл М. Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 468 с.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР
191011, Ленинград, наб. Фонтанки, 27

Поступило 14 июня 1989 г.