Л.Б.Клебанов

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ БЛИЗОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ТЕРМИНАХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

I°. Пусть P и Q две вероятностных меры на σ-алгебре $\mathfrak{A}_m$ борелевских подмножеств m-мерного евклидова пространства R^m, а $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ $(t=(t_1,\dots,t_m)^T\in R^m)$ их характеристические функции. Хорошо известно, что расстояние по вариации между мерами P и Q определяется как

$$\rho_1(P,Q)=\sup\{|P(A)-Q(A)|: A\in\mathfrak{A}_m\}.$$

Допустим, что $\mathcal{L}\subset\mathfrak{A}_m$ – класс подмножеств под условием

$$\sup\{|P(A)-Q(A)|: A\in\mathfrak{A}_m\}=\sup\{|P(A)-Q(A)|: A\in\mathcal{L}\}$$

и положим для $\delta=(\delta_1,\dots,\delta_m)^T$, $\delta_j>0$, $j=1,\dots,m$

$$\omega(P;\delta)=\omega(P;\delta;\mathcal{L})=\sup_{A\in\mathcal{L}}\sup\{|P(A)-P(A-y)|:|y_j|\le\delta_j, j=1,\dots,m\},$$

где

$$y=(y_1,\dots,y_m)^T,\quad A-y=\{x: x=z-y,\ z\in A\}.$$

ТЕОРЕМА I. Пусть характеристические функции φ и ψ абсолютно непрерывны по каждой из переменных. Тогда для любых $T_1>1,\dots,T_m>1$, $\delta=(\delta_1,\dots,\delta_m)^T$, $\delta_j>0$, $r>m\,(r\ge 2)$ справедливо

$$\begin{aligned}\rho_1(P,Q)\le{}&\omega(P;\delta)+\omega(Q;\delta)+\\&+C_{m,r}\cdot\Big[1+\sum_{j=1}^m(2/T_j+\delta_j)\Big]\cdot\Big(\int_{T(m)}|\varphi(t)-\psi(t)|^r dt\Big)^{1/r}+\\&+C_{m,r}\sum_{j=1}^m\Big(\int_{T(m)}\Big|\frac{\partial}{\partial t_j}(\varphi(t)-\psi(t))\Big|^r dt\Big)^{1/r}+\\&+C(1+3^m)m^2/\Big(\prod_{j=1}^m\delta_j^2\cdot T_{min}^2\Big),\end{aligned}\tag{I}$$

где C – абсолютная постоянная, $T_{min}=\min(T_1,\dots,T_m)$, $T(m)=\{t:|t_j|\le T_j,\ j=1,\dots,m\}$, а

$$C_{m,r}=(2\pi)^{\frac{2-s-ms}{2s}}\Big(\int\limits_{R^m}\frac{dx}{\left|1+i\sqrt{\sum\limits_1^m x_j^2}\,\right|^r}\Big)^{1/r},\quad \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через V класс комплекснозначных функций $A(x)$ на R^m, имеющих там ограниченную вариацию

$$var(A)=\int\limits_{R^m}|dA(x)|.$$

Пусть $\tilde{V}$ - класс функций, являющихся преобразованиями Фурье-Стилтьеса функций из V. Если $a(t)\in\tilde{V}$, то

$$a(t)=\int\limits_{R^m}e^{it^Tx}\,dA(x),\qquad A\in V.$$

Положив $\|a\|=var(A)$ мы превратим $\tilde{V}$ в нормированное пространство, причем

$$\|a_1+a_2\|\leq\|a_1\|+\|a_2\|,\qquad \|a_1\cdot a_2\|\leq\|a_1\|\cdot\|a_2\|.$$

ЛЕММА I. Пусть функция $a(t)$, $(t=(t_1,\dots,t_m)^T\in R^m)$ абсолютно непрерывна по каждой из переменных t_j и, кроме того, $a(t)$ и $\frac{\partial a}{\partial t_j}$, $j=1,\dots,m$ принадлежат $L^r(R^m)$ и $a(t)\in L^s(R^m)$, $1/s+1/r=1$, $1<s\leq 2$. Тогда $a(t)\in\tilde{V}$ и

$$\|a\|\leq(2\pi)^{\frac{2-s-ms}{2s}}\cdot\Big(\int\limits_{R^m}\frac{dx}{\left|1+i\sqrt{\sum\limits_1^m x_j^2}\,\right|^r}\Big)^{1/r}\cdot$$

$$\cdot\Big[\Big(\int\limits_{R^m}|a(t)|^r dt\Big)^{1/(r-1)}+\sum_{j=1}^m\Big(\int\limits_{R^m}\Big|\frac{\partial a}{\partial t_j}\Big|^r dt\Big)^{1/(r-1)}\Big]^{1/s}. \qquad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь распространением теоремы Планшереля (см. [1]), сопоставим функции $a(t)$ ее преобразование Фурье $\tilde{a}(x)$. Тогда

$$\|\tilde{a}\|_s^s\leq(2\pi)^{1-\frac{s}{r}}\cdot\|a\|_r^{\frac{r}{r-1}} \qquad (3)$$

(здесь $\|f\|_\ell$ означает норму f в пространстве $L^\ell(R^m)$). Функция $a(t)$ заведомо принадлежит $\tilde{V}$, если $\tilde{a}\in L^1(R^m)$, причем тогда

$$\|a\| = var(A) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^m \int_{R^m} |\tilde{a}(x)|\,dx\,. \tag{4}$$

По условию леммы I функции $a(t), \frac{\partial a}{\partial t_j} \in L^r(R^m)$, $a(t) \in$ $\in L^s(R^m)$, $j=1,\dots,m$, но тогда $x_j\tilde{a}(x) \in L^s(R^m)$, $j=1,\dots,m$ и

$$\|x_j\,\tilde{a}\|_s^s \leq (2\pi)^{1-\frac{s}{r}} \left\|\frac{\partial}{\partial t_j}\,a(t)\right\|_r^{\frac{r}{r-1}}\,. \tag{5}$$

Из (3)-(5) теперь получаем, что

$$\|a\| = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^m \int_{R^m} \left|1+i\sqrt{\sum_1^m x_j^2}\right| \cdot |\tilde{a}(x)| \cdot \frac{1}{\left|1+i\sqrt{\sum_1^m x_j^2}\right|}\,dx \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^m \cdot \left(\int_{R^m} \frac{dx}{\left|1+i\sqrt{\sum_1^m x_j^2}\right|^r}\right)^{1/r} \cdot \left[\int_{R^m} \left|1+i\sqrt{\sum_1^m x_j^2}\right|^s |\tilde{a}(x)|^s dx\right]^{1/s} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^m \cdot \left(\int_{R^m} \frac{dx}{\left|1+i\sqrt{\sum_1^m x_j^2}\right|^r}\right)^{1/r} \cdot \left[\int_{R^m} |\tilde{a}(x)|^s dx + \sum_{j=1}^m \int_{R^m} |x_j\,\tilde{a}(x)|^s dx\right]^{1/s} \leq$$

$$\leq (2\pi)^{\frac{2-s-ms}{2s}} \cdot \left(\int_{R^m} \frac{dx}{\left|1+i\sqrt{\sum_1^m x_j^2}\right|^r}\right)^{1/r} \cdot \left[\left(\int_{R^m} |a(t)|^r dt\right)^{1/(r-1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^m \left(\int_{R^m} \left|\frac{\partial a}{\partial t_j}\right|^r dt\right)^{1/(r-1)}\right]^{1/s}\,,$$

что и завершает доказательство леммы I.

Отметим, что одномерный вариант леммы I для $r=2$ имеется в [2, стр.26] (по существу этот результат восходит к работе [3]).

Продолжим теперь доказательство теоремы I. Положим при $\tau > 0$ и $z \in R^1$

$$\hat{v}_\tau(z) = \begin{cases} \frac{c}{\tau}\,exp\left\{-\frac{\tau^2}{\tau^2 - z^2}\right\}, & |z| < \tau\,, \\ 0\,, & |z| \geq \tau\,, \end{cases}$$

так что $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}_\tau(z)\,dz = 1$;

$$v_\delta(y) = \prod_{j=1}^m \hat{v}_{\delta_j}(y_j)\,.$$

Очевидно, что $v_\delta(y)$ – бесконечно дифференцируемая функция,

$$\int_{R^m} v_\delta(y)\,dy = 1$$

и $v_\delta(y) = 0$, если $|y_j| > \delta_j$ хотя бы при одном значении j.

Рассмотрим меры P_δ и Q_δ, определенные равенствами

$$P_\delta(A)=\int_{R^m} P(A-y)v_\delta(y)dy,\quad Q_\delta(A)=\int_{R^m} Q(A-y)v_\delta(y)dy,\quad A\in\mathfrak{A}_m .$$

Покажем, что меры P_δ и Q_δ абсолютно непрерывны по мере Лебега и имеют бесконечно дифференцируемые ограниченные плотности. В самом деле, если F и G – функции распределения, соответствующие мерам P и Q, то функции распределения, соответствующие мерам P_δ и Q_δ имеют вид

$$F_\delta(x)=\int_{R^m} F(x-y)v_\delta(y)dy,\quad G_\delta(x)=\int_{R^m} G(x-y)v_\delta(y)dy .$$

Очевидно, что F_δ и G_δ бесконечно дифференцируемы и их плотности

$$p_\delta(x)=\int_{R^m} v_\delta(x-y)\,dF(y),\quad q_\delta(x)=\int_{R^m} v_\delta(x-y)\,dG(y)$$

ограничены (в силу ограниченности v_δ).

Обозначим $\varphi_\delta(t)$ и $\psi_\delta(t)$ характеристические функции распределений F_δ и G_δ соответственно. Ясно, что

$$\varphi_\delta(t)-\psi_\delta(t)=\int_{R^m} e^{it^Tx}\,d(F_\delta(x)-G_\delta(x))=$$

$$=\int_{R^m} e^{it^Tx}(p_\delta(x)-q_\delta(x)dx=\left[\varphi(t)-\psi(t)\right]\cdot\gamma_\delta(t), \qquad (6)$$

где

$$\gamma_\delta(t)=\prod_{j=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_jx_j}\,\hat{v}_{\delta_j}(x_j)\,dx_j .$$

Поэтому

$$\int_{R^m} |p_\delta(x)-q_\delta(x)|\,dx=\|\varphi_\delta(t)-\psi_\delta(t)\| .$$

Введем в рассмотрение функции $k_j(z)$, $z \in R^1$, полагая

$$k_j(z)=\begin{cases} 0, & |z|>T_j, \\ 2(z+T_j)/T_j, & -T_j \le z < -T_j/2, \\ 1, & |z| \le T_j/2, \\ 2(T_j-z)/T_j, & T_j/2 < t \le T_j \end{cases}$$

и определим

$$k(t)=\prod_{j=1}^{m} k_j(t_j).$$

Очевидно,

$$|k(t)| \le 1, \quad \left|\frac{\partial k}{\partial t_j}\right| \le 2/T_j.$$

Без труда можно подсчитать, что $k \in \tilde{V}$ и $\|k\| \le 3^m$.

Если

$$h(t)=\varphi_\sigma(t)-\psi_\sigma(t)=h(t)k(t)+h(t)(1-k(t)),$$

то

$$\int_{R^m} |p_\sigma(x)-q_\sigma(x)|\,dx \le \|hk\|+\|h(1-k)\|.$$

По лемме I

$$\|hk\| \le C_{m,r}\Big[\Big(\int_{R^m}|h(t)k(t)|^r dt\Big)^{1/(r-1)}+\sum_{j=1}^{m}\Big(\int_{R^m}\Big|\frac{\partial}{\partial t_j}h(t)k(t)\Big|^r dt\Big)^{1/(r-1)}\Big]^{1/r} \le$$

$$\le C_{m,r}\Big[\Big(\int_{\pi(m)}|h(t)k(t)|^r dt\Big)^{1/r}+\sum_{j=1}^{m}\Big(\int_{\pi(m)}\Big|\frac{\partial}{\partial t_j}h(t)k(t)\Big|^r dt\Big)^{1/r}\Big] \le$$

в силу неравенства Минковского и свойств функции $k(t)$

$$\le C_{m,r}\Big[\Big(\int_{\pi(m)}|h(t)|^r dt\Big)^{1/r}+\sum_{j=1}^{m}\frac{2}{T_j}\Big(\int_{\pi(m)}|h(t)|^r dt\Big)^{1/r}+\sum_{j=1}^{m}\Big(\int_{\pi(m)}\Big|\frac{\partial}{\partial t_j}h(t)\Big|^r dt\Big)^{1/r}\Big] \le$$

в силу определения $h(t)$ и (6)

$$\leqslant C_{m,r}\Big[1+\sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{2}{T_j}+\delta_j\Big)\Big]\cdot\Big(\int_{T(m)}|\varphi(t)-\psi(t)|^r dt\Big)^{1/r}+C_{m,r}\sum_{j=1}^{m}\Big(\int_{T(m)}\Big|\frac{\partial}{\partial t_j}(\varphi(t)-\psi(t))\Big|^r dt\Big)^{1/r}.$$

Здесь

$$C_{m,r}=(2\pi)^{\frac{2-s-ms}{2s}}\Big(\int_{R^m}\frac{dx}{\Big|1+i\sqrt{\sum_1^m x_j^2}\Big|^r}\Big)^{1/r}.$$

Таким образом, мы имеем

$$\|hk\|\leqslant C_{m,r}\Big[1+\sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{2}{T_j}+\delta_j\Big)\Big]\cdot\Big(\int_{T(m)}|\varphi(t)-\psi(t)|^r dt\Big)^{1/r}+$$

$$+C_{m,r}\sum_{j=1}^{m}\Big(\int_{T(m)}\Big|\frac{\partial}{\partial t_j}(\varphi(t)-\psi(t))\Big|^r dt\Big)^{1/r}. \qquad (7)$$

Для оценки $\|h(1-k)\|$ воспользуемся тем, что $1-k(t)=0$, если $|t_j|\leqslant T_j/2$, $j=1,\dots,m$ и запишем $\|h(1-k)\|$ в виде

$$\|h(1-k)\|=\Big\|\Big[\prod_{j=1}^{m}(1+t_j^2)(\varphi_\delta(t)-\psi_\delta(t)\Big]\cdot u\cdot(1-k)\Big\|,$$

где функция $u\in\tilde{V}$ выбрана так, что при $|t_j|>T_j/2$ хотя бы при одном j она равна $1/\prod_{j=1}^{m}(1+t_j^2)$, а в остальном произвольна. Так как $\|k\|\leqslant 3^m$, то

$$\|h(1-k)\|\leqslant\Big\|\prod_{j=1}^{m}(1+t_j^2)(\varphi_\delta(t)-\psi_\delta(t))\Big\|\cdot\inf\|u\|\cdot\|1-k\|\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\Big\|\prod_{j=1}^{m}(1+t_j^2)\varphi_\delta(t)\Big\|+\Big\|\prod_{j=1}^{m}(1+t_j^2)\psi_\delta(t)\Big\|\Big)\cdot(1+\|k\|)\cdot\inf\|u\|\leqslant \qquad (8)$$

$$\leqslant(3^m+1)\cdot\Big(\Big\|\prod_{j=1}^{m}(1+t_j^2)\varphi_\delta\Big\|+\Big\|\prod_{j=1}^{m}(1+t_j^2)\psi_\delta\Big\|\Big)\cdot\inf\|u\|,$$

где $\inf$ берется по всем функциям u указанного выше вида. С помощью леммы 1 легко показать, что

$$\inf\|u\|\leqslant C\cdot m/T_{min}^2 .$$

(Здесь и ниже символом C мы обозначаем абсолютные постоянные, быть может различные).

С другой стороны, нетрудно показать, что

$$-t_j^2\varphi_\delta(t)=\int_{R^m} e^{it^Tx}\frac{\partial^2 p_\delta(x)}{\partial x_j^2}dx,\quad -t_j^2\psi_\delta(t)=\int_{R^m} e^{it^Tx}\frac{\partial^2 q_\delta(x)}{\partial x_j^2}dx\,. \qquad (9)$$

Для этого достаточно показать, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} p_\delta(x)=\lim\limits_{|x|\to\infty} q_\delta(x)=0$ и применить интегрирование по частям в интегралах

$$\int_{R^m} e^{it^Tx}\frac{\partial^2 p_\delta(x)}{\partial x_j^2}dx,\quad \int_{R^m} e^{it^Tx}\frac{\partial^2 q_\delta(x)}{\partial x_j^2}dx\,.$$

Однако

$$\int_{R^m}\left|\frac{\partial^2 p_\delta(x)}{\partial x_j^2}\right|dx=\int_{R^m}\left|\int_{R^m}\frac{\partial^2 v_\delta(x-y)}{\partial x_j^2}dF(y)\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_{R^m}dx\int_{R^m}\left|\frac{\partial^2 v_\delta(x-y)}{\partial x_j^2}\right|dF(y)=\int_{R^m}dF(y)\int\limits_{\{|y_l|\leqslant\delta_l,\,l=1,\dots,m\}}\dots\int\left|\frac{\partial^2 v_\delta(z)}{\partial z_j^2}\right|dz\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C}{\delta_j^3}\int_{R^m}2\delta_j\,dF(y)=\frac{C}{\delta_j^2}\,,$$

так как $\left|\frac{\partial^2 v_\delta(z)}{\partial z_j^2}\right|\leqslant\frac{C}{\delta_j^3}$. Совершенно так же доказывается, что

$$(-1)^k t_{j_1}^2\dots t_{j_k}^2\,\varphi_\delta(t)=\int_{R^m} e^{it^Tx}\frac{\partial^{2k}p_\delta(x)}{\partial x_{j_1}^2\dots\partial x_{j_k}^2}dx\,, \qquad (10)$$

$$(-1)^k t_{j_1}^2\dots t_{j_k}^2\,\psi_\delta(t)=\int_{R^m} e^{it^Tx}\frac{\partial^{2k}q_\delta(x)}{\partial x_{j_1}^2\dots\partial x_{j_k}^2}dx\,, \qquad (11)$$

$$\int_{R^m}\left|\frac{\partial^{2k}p_\delta(x)}{\partial x_{j_1}^2\dots\partial x_{j_k}^2}\right|dx\leqslant C\Big/\prod_{l=1}^{k}\delta_{j_l}^2\,, \qquad (12)$$

$$\int_{R^m}\left|\frac{\partial^{2k}q_\delta(x)}{\partial x_{j_1}^2\dots\partial x_{j_k}^2}\right|dx\leqslant C\Big/\prod_{l=1}^{k}\delta_{j_l}^2 \qquad (13)$$

для $j_1\neq j_2\neq\dots\neq j_k$, $\quad 1\leqslant k\leqslant m$.

Из соотношений (7)-(13) получаем

$$\int_{R^m}|p_\delta(x)-q_\delta(x)|dx\leqslant C_{m,r}\Big[1+\sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{2}{T_j}+\delta_j\Big)\Big]\cdot\Big(\int_{T(m)}|\varphi(t)-$$

$$-\psi(t)|^r dt)^{1/r}+C_{m,r}\sum_{j=1}^{m}\Big(\int_{T(m)}\Big|\frac{\partial}{\partial t_j}(\varphi(t)-\psi(t))\Big|^r dt\Big)^{1/r}+$$

$$+C(1+3^m)\,m^2/\Big(\prod_{j=1}^{m}\sigma_j^2\cdot T_{min}^2\Big)\,.$$

Однако

$$\sup\{|P_\sigma(A)-Q_\sigma(A)|:A\in\mathfrak{A}_m\}=\frac{1}{2}\int_{R^m}|p_\sigma(x)-q_\sigma(x)|\,dx\,.$$

Кроме того, для любого $A\in\mathcal{X}$

$$|P_\sigma(A)-P(A)|=\Big|\int_{R^m}[P(A-y)-P(A)]\,v_\sigma(y)\,dy\Big|\leq$$

$$\leq\int_{|y|\leq\sigma}|P(A-y)-P(A)|\,v_\sigma(y)\,dy\leq\omega(P;\sigma)\,.$$

Точно так же

$$|Q_\sigma(A)-Q(A)|\leq\omega(Q;\sigma)\,.$$

Поэтому мы окончательно имеем

$$\rho_1(P,Q)\leq\omega(P;\sigma)+\omega(Q;\sigma)+C_{m,r}\Big[1+\sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{2}{T_j}+\sigma_j\Big)\Big]\cdot$$

$$\cdot\Big(\int_{T(m)}|\varphi(t)-\psi(t)|^r dt\Big)^{1/r}+C_{m,r}\cdot\sum_{j=1}^{m}\Big(\int_{T(m)}\Big|\frac{\partial}{\partial t_j}(\varphi(t)-\psi(t))\Big|^r dt\Big)^{1/r}+$$

$$+C(1+3^m)\,m^2/\Big(\prod_{j=1}^{m}\sigma_j^2\,T_{min}^2\Big)\,,$$

что и завершает доказательство теоремы 1.

Отметим, что в случае $m=1$ удобнее величину $\|h(1-k)\|$ представить в виде

$$\|h(1-k)\|=\|it(\varphi_\sigma(t)-\psi_\sigma(t))\cdot u\cdot(1-k)\|\,,$$

где функция $u\in\tilde{V}$ выбрана так, что при $|t|>T/2$ она равна $-\frac{1}{it}$, а в остальном произвольна. Тогда

$$\inf \|u\| \leq C/T ,$$

а

$$\|-it(\varphi_\delta(t)-\psi_\delta(t))\|$$

может быть оценена более простым образом. В частности, если меры P и Q имеют абсолютно непрерывные плотности $p(x)$ и $q(x)$ относительно меры Лебега, то

$$\|it\varphi_\delta(t)\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |p'(x)|\,dx, \quad \|it\psi_\delta(t)\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |q'(x)|\,dx .$$

2^0. Рассмотрим теперь более подробно одномерный случай, т.е. случай $m=1$. В этом случае несколько огрубляя неравенство (I) его можно представить в более простом виде.

ТЕОРЕМА 2. Пусть характеристические функции φ и ψ абсолютнонепрерывны. Тогда для любых $T>1$, $1\geq\delta>0$, $r\geq 2$ справедливо неравенство

$$\rho_1(P,Q) \leq \omega(P;\delta)+\omega(Q;\delta)+$$
$$+C\{(\int_{-T}^{T}|\varphi(t)-\psi(t)|^r dt)^{1/r}+(\int_{-T}^{T}|\varphi'(t)-\psi'(t)|^r dt)^{1/r}+ \tag{I4}$$
$$+1/(\delta^2T^2)\} .$$

Неравенство (I4) весьма просто получается из (I) при $m=1$ и мы не будем останавливаться на его доказательстве.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть в условиях теоремы 2 P и Q - меры, соответствующие целочисленным законам. Тогда для $T>1$, $r\geq 2$

$$\rho_1(P,Q) \leq C\{\frac{1}{T^2}+(\int_{-T}^{T}|\varphi(t)-\psi(t)|^r dt)^{1/r}+(\int_{-T}^{T}|\varphi'(t)-\psi'(t)|^r dt)^{1/r}\} .$$

Доказательство очевидно, так как в качестве $\mathcal{L}$ может быть взята совокупность всевозможных объединений открытых промежутков единичной длины с серединами в целых точках. В этом случае $\omega(P;\delta)=\omega(Q;\delta)=0$ при $\delta<1$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Несколько изменив доказательство теоремы I в одномерном случае можно доказать следующий факт. Пусть меры P и Q имеют абсолютно непрерывные плотности p и q относительно меры Лебега и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, p(x)\, dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, q(x)\, dx < \infty .$$

Тогда для любого $T > 1$ и $r \geqslant 2$

$$\rho_1(P,Q) \leqslant C\{(\int_{-T}^{T} |\varphi(t)-\psi(t)|^r dt)^{1/r} + (\int_{-T}^{T} |\varphi'(t)-\psi'(t)|^r dt)^{1/r} +$$

$$+ \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left(|p'(x)| + |q'(x)|\right) dx\} .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для того, чтобы $\omega(P;\delta;\mathfrak{A}_1) \longrightarrow 0$ при $\delta \to 0$ необходимо и достаточно, чтобы мера P имела плотность p относительно меры Лебега.

Это следует из одного результата Бохнера [4] .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предположение о том, что P и Q вероятностные меры не очень существенно. Доказательство теоремы 1 в одномерном случае и замечание 2 показывают, что справедливо следующее утверждение. Пусть $p(x)$ и $q(x)$ - функции на R^1 , для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(x)|\, dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |q(x)|\, dx < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x p(x)|\, dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |x q(x)|\, dx < \infty .$$

Положим

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)\, dx, \qquad \psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} q(x)\, dx ,$$

$$\tilde{\omega}(p;\delta) = \sup\{\int_{-\infty}^{\infty} |p(x-y)-p(x)|\, dx : |y| \leqslant \delta\}$$

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} (|p(x)| + |q(x)|)\, dx .$$

Тогда для всех $T > 1$, $1 \geqslant \delta > 0$ и $r \geqslant 2$ имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(x)-q(x)|\, dx \leqslant \tilde{\omega}(p;\delta) + \tilde{\omega}(q;\delta) + C\{\lambda/(\delta T)^2 +$$

$$+ (\int_{-T}^{T} |\varphi(t)-\psi(t)|^r dt)^{1/r} + (\int_{-T}^{T} |\varphi'(t)-\psi'(t)|^r dt)^{1/r}\} .$$

3°. Пусть теперь меры P и Q абсолютно непрерывны относительно меры Лебега, а $p(x)$ и $q(x)$ – их плотности. Допустим, что $p(x)$ и $q(x)$ имеют s непрерывных производных и положим

$$\overline{\omega}(p;\delta)=\sup_x \sup\{|p(x-y)-p(x)|:|y|\leq\delta\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть меры P и Q имеют конечный абсолютный момент первого порядка и плотности p и q, непрерывно дифференцируемые s раз ($s\geq 0$). Тогда для любых $T>1$ и $1\geq\delta>0$

$$\sup_x |p^{(s)}(x)-q^{(s)}(x)|\leq\overline{\omega}(p^{(s)};\delta)+\overline{\omega}(q^{(s)};\delta)+$$
$$+C\Big\{\frac{1}{\delta T}\int_{-\infty}^{\infty}(|p^{(s)}(x)|+|q^{(s)}(x)|)\,dx+\Big(\int_{-T}^{T}|t|^{2s+2}\cdot|\varphi(t)-\psi(t)|^2dt\Big)^{1/2}+$$
$$+\Big(\int_{-T}^{T}|t|^{2s}\cdot|\varphi(t)-\psi(t)|^2dt\Big)^{1/2}+\Big(\int_{-T}^{T}|t|^{2s+2}\cdot|\varphi'(t)-\psi'(t)|^2dt\Big)^{1/2}\Big\}.$$

Доказательство теоремы 3 использует те же идеи, что и доказательство теоремы 1 и замечания 3 в случае $r=2$ и поэтому мы не будем приводить его здесь.

В заключение отметим, что методы, сходные с примененными нами, часто используются при получении оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме (см., например, [5]).

Основные результаты этой работы были анонсированы в [6] .

Литература

1. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье, Москва, 1948.
2. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины, М., Наука, 1965.
3. Esseen C.G. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law, - Acta math, 1945, vol.77, p.1-125.
4. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье, М., Физматгиз, 1962.

5. С а з о н о в В.В. Об оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме (конечномерный и бесконечномерный случай), В кн.: Международный конгресс математиков в Ницце. 1970. Доклады советских математиков, М., Наука, 1972.

6. К л е б а н о в Л.Б. Оценки близости распределений в терминах характеристических функций. - Теор.вероят. и ее применен., XXII, 1977, № 3, с.654-655.